第3章

点、直线、平面的投影

知识目标

掌握点的三面投影及两个点的相对位置关系。

掌握各种位置直线的投影及其特性。

掌握平面的表示方法、各种位置平面的投影及其特性。

3.1 点的投影

空间形体可以看成是由点、线、面构成的。如图 3-1 所示，一个形体由多个侧面围成，各侧面相交于多条侧棱，各侧棱相交于多个顶点 1,2,3,4,…,16。如果画出各点的投影，再把各点的投影一一连接，就可以画出一个形体的投影。所以，点是形体最基本的元素，点的投影规律是点、线、面投影的基础。

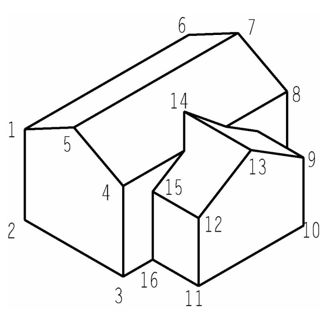
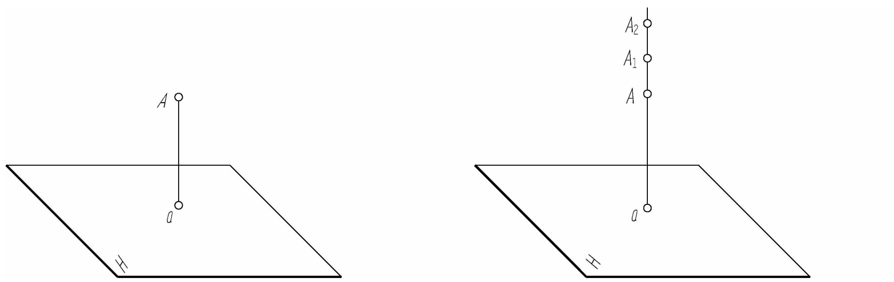


图 3-1 空间形体的组成

3.1.1 点的单面投影

如图 3-2(a)所示，过空间点 A 向投影面 H 作垂直投射线，该投射线与 H 面的交点 a 即为点 A 在 H 面上的正投影，这个正投影是唯一确定的。相反，由点的正投影 a 却不能确定点 A 的空间位置，因为位于投射线 Aa 上的所有点在 H 面上的正投影均与 a 点重合，如

图 3-2(b)所示的 A_1、A_2。所以,由点的一个正投影不能确定该点在空间的位置。



(a) 由空间点可确定其投影点位置　　(b) 由单投影点不能确定空间点的具体位置

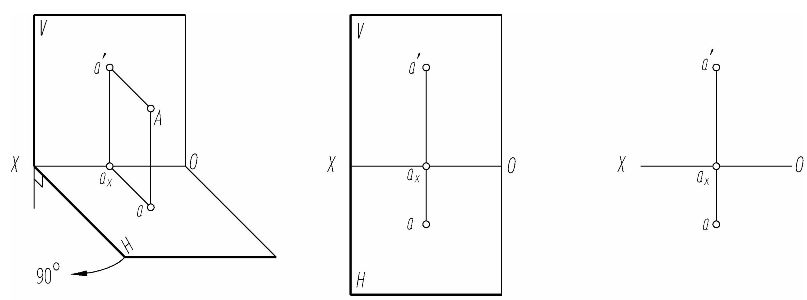
图 3-2　点的单面投影

3.1.2　点的两面投影

如图 3-3(a)所示,增加垂直于投影面 H 的投影面 V,两投影面交线为投影轴 OX。过 A 点向 H 面作投射线 Aa,交点 a 就是 A 点在 H 面的投影,称为 A 点的水平投影,也称为 H 面投影。同理,过 A 点向 V 面作投射线 Aa',a'就是 A 点在 V 面的投影,称为 A 点的正面投影,也称为 V 面投影。

由图 3-3(a)可知,因投射线 Aa 垂直于 H 面,投射线 Aa'垂直于 V 面,故平面 Aaa_Xa'垂直于 H 面和 V 面,且 H 面和 V 面又互相垂直,因而这三个平面互相垂直,故交线 $aa_X \perp OX$、$a'a_X \perp OX$ 和 $aa_X \perp a'a_X$;同时说明 Aaa_Xa'是一个矩形,并且能确定点在空间的位置。由此得出的结论是由点的两个投影能够确定点在空间的位置。

点的两面投影分别位于两个投影面上,但实际上应在一个平面上表示出空间两个投影面上的投影。为此,把 H 面和 V 面展成一个平面,如图 3-3(a)所示,V 面不动,H 面绕 OX 轴向下旋转 90°,使其与 V 面在一个平面上,如图 3-3(b)所示,a 点和 a'点之间的连线称为投影联系线,简称联系线,用细实线表示。因为确定点的位置与投影面的边框线无关,故在投影图上只需画出投影轴和点的两个投影即可,如图 3-3(c)所示,也可省去 OX 轴。



(a) 空间状况　　(b) 展开图　　(c) 投影图

图 3-3　点在两面投影体系中的投影图

综上所述，点的两面投影规律如下：

(1)点的水平投影和正面投影之间的联系线垂直于 OX 轴，如图 3-3(c)所示，$a'a \perp OX$。

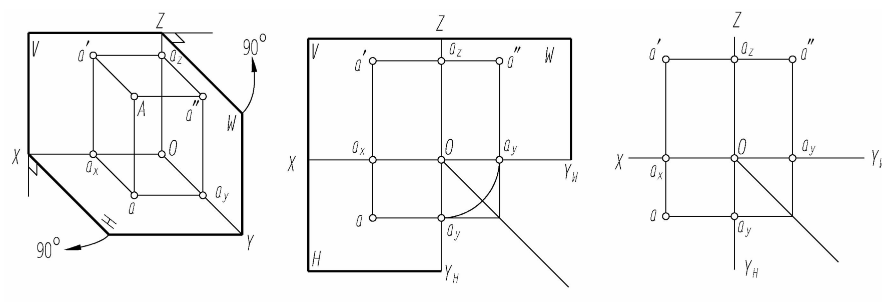
(2)点的水平投影到 OX 轴的距离等于空间点 A 到 V 面的距离，如图 3-3(a)中的 $|aa_X| = |Aa'|$。

(3)点的正面投影到 OX 轴的距离等于空间点 A 到 H 面的距离，如图 3-3(a)中的 $|a'a_X| = |Aa|$。

3.1.3 点的三面投影及其坐标

1. 点的三面投影

虽然由点的两面投影能够确定点在空间的位置，但为了能够清楚地表达形体的形状，还需要研究点的三面投影。如图 3-4(a)所示，垂直 H 面和 V 面增加新的投影面 W 面。H 面与 W 面的交线为投影轴 OY，V 面与 W 面的交线为投影轴 OZ。三轴交点为原点 O。点 A 位于三投影面体系的空间内，过点 A 分别向三个投影面作投射线，可得到三个投影 a、a'、a''，其中，a''称为点 A 的侧面投影，也称为 W 面投影。为了使三个投影面上的投影成为在一个平面上的投影图，如图 3-4(a)所示，使 V 面保持不动，H 面绕 OX 轴向下旋转 90°，W 面绕 OZ 轴向右旋转 90°与 V 面成一个平面，结果如图 3-4(b)所示。去掉投影面边框，即得点的三面投影图，如图 3-4(c)所示。在三面投影图上，过 a 点的水平线与过 a''点的竖直线刚好交于通过原点 O 的一条 45°斜线上，H 面投影与 W 面投影总满足此关系。



(a) 点在三面投影的空间状况　　(b) 点的三面投影展开图　　(c) 点的三面投影图

图 3-4　点在三面投影体系中的投影图

如无特殊要求，a_X、a_Y、a_{Y_H}、a_{Y_W}、a_Z 可以省去，投影轴也可以省去。

根据以上分析及点的两面投影规律，可以得出点的三面投影规律：

(1)点的正面投影与水平投影的联系线垂直于 OX 轴，如图 3-4(c)所示的 $aa' \perp OX$，即长对正。

(2)点的正面投影与侧面投影的联系线垂直于 OZ 轴，如图 3-4(c)所示的 $a'a'' \perp OZ$，即高平齐。

(3)点的水平投影到 OX 的距离等于点的侧面投影到 OZ 轴的距离，如图 3-4(c)所示的 $|aa_X| = |a''a_Z|$，即宽相等。

上述点的三面投影规律“长对正、高平齐、宽相等”即是作图原则。根据该投影规律，在三面投影体系中，由一个点的任意两个投影均可确定该点在空间的位置，同时由一个点的任

意两个投影也可以求出第三个投影。

【例 3-1】 已知点的两面投影，求第三面投影，如图 3-5(a)所示。

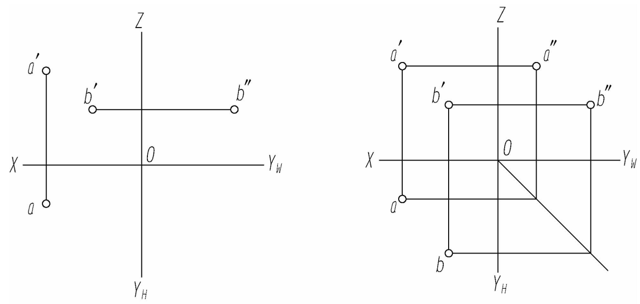
【解】 分析：根据点的任意两面投影可以求出第三面投影，作图原则为“长对正、高平齐、宽相等”。

作图步骤如下：

(1)先画 45°分角线。

(2)按高平齐原则，过 a' 向 OZ 轴作垂直线并延长；按宽相等原则，过 a 作水平线与 45°分角线相交，从交点处向上作铅垂线，该铅垂线与过 a' 所作的与 OZ 轴垂直的水平线相交，交点即为 a''，如图 3-5(b)所示。

(3)按长对正原则，过 b' 向下作铅垂线；按宽相等原则，过 b'' 向下作铅垂线与 45°分角线相交，从交点处向左作水平线，该水平线与过 b' 所作的铅垂线相交，交点即为 b，如图 3-5(b)所示。

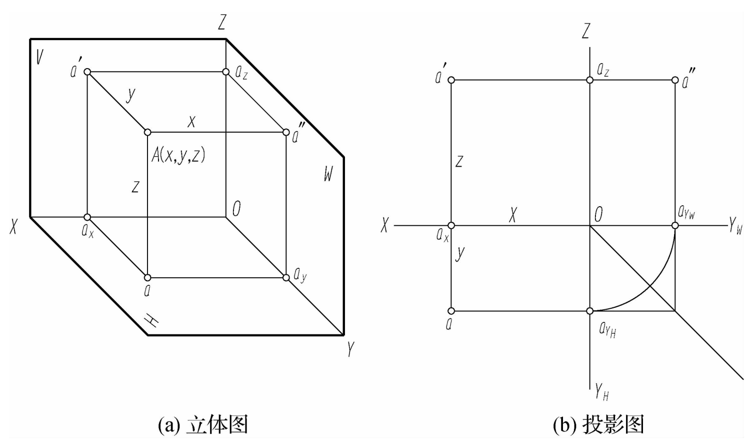


(a) 已知　　(b) 作图

图 3-5　求点的第三面投影

2. 点的坐标

点的空间位置可用坐标来确定，如点 A 的坐标可表示为 $A(x,y,z)$，以毫米(mm)为单位。其中，x 表示点 A 到 W 面的距离，即 $x=|Aa''|$；y 表示点 A 到 V 面的距离，即 $y=|Aa'|$；z 表示点 A 到 H 面的距离，即 $z=|Aa|$，如图 3-6(a)所示。空间点 A 由三个坐标确定，其投影由两个坐标确定，如 $a(x,y)$、$a'(x,z)$、$a''(y,z)$。已知点的三个坐标，可作出该点的三面投影；已知点的三面投影，可以量出该点的三个坐标，如图 3-6(b)所示。



(a) 立体图　　(b) 投影图

图 3-6　点的坐标

实际上，三个投影面就是三个空间坐标面，三个投影轴就是三个空间坐标轴，三个投影就是三个坐标，只是叫法不同而已。

【例 3-2】 已知点 $A(20,18,22)$，求作点 A 的三面投影图和立体图。

【解】 分析：已知点的三个坐标，由 $a(x,y)$、$a'(x,z)$ 和 $a''(y,z)$ 可以画出该点的三面投影图，可采用两种方法，作图步骤分别如下：

(1)方法一，如图 3-7(a)所示。

① 画出投影轴，在投影轴 OX、OY_H、OY_W、OZ 上分别从原点 O 截取 20、18、18、22，得到点 a_X、a_{Y_H}、a_{Y_W} 和 a_Z。

② 过 a_X、a_{Y_H}、a_{Y_W} 和 a_Z 点，分别作投影轴 OX、OY_H、OY_W、OZ 的垂线，分别相交得到点 A 的三面投影 a、a'、a''。

(2)方法二，如图 3-7(b)所示。

①在 OX 轴上，从 O 点截取 20，得 a_X 点，过该点作 OX 轴的垂线，在该垂线上，从 a_X 点向下截取 18，得到 a 点，向上截取 22，得到 a'点。

②过 O 点作 45°方向斜线，从 a 点作水平线交 45°斜线于点 a_O，过 a_O 点向上作竖直线与过 a'点向右作的水平线相交，其交点即为 a''点。

作立体图的步骤如图 3-7(c)所示。

(1)画出三面投影体系。

(2)在 OX、OY、OZ 轴上，分别从 O 点截取 20、18、22，得点 a_X、a_Y、a_Z。

(3)在 H 面、V 面、W 面内分别从点 a_X、a_Y、a_Z 作各轴的平行线，各平行线得三个交点 a、a' 和 a''。

(4)分别过三个投影点做 H 面、V 面与 W 面的平行线，三线交于点 A，即为 A 点的立体图。

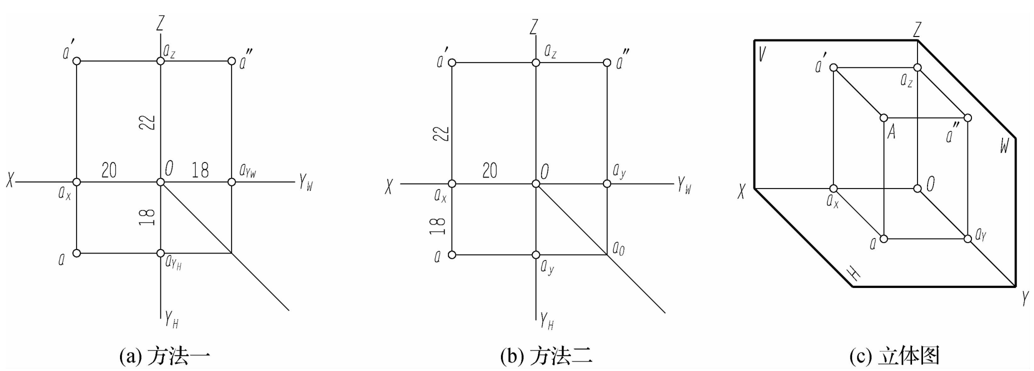


图 3-7 根据点的坐标求作点的投影图和立体图

3.1.4 各种位置点的投影

图 3-7 中的 A 点没有位于任何投影面、投影轴或原点 O 上，实际上，一个点可以位于投影面、投影轴或原点 O 上。不论一个点位于空间体系中的哪个位置，该点的投影都符合点的投影规律。

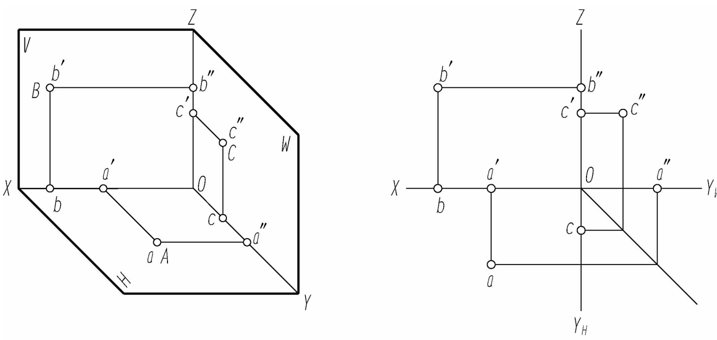
1. 点在投影面上

当空间点的三个坐标中有一个为0时，点就从属于某一个投影面。属于投影面的点的投影特性如下：

(1)点的一个投影与空间点本身重合。

(2)点的另外两个投影在坐标轴(投影轴)上。

如图3-8所示，空间点 A、B、C 分别位于 H 面、V 面、W 面上，其三面投影分别位于一个投影面和两个投影轴上。



(a) 直观图　　(b) 投影图

图 3-8　点在投影面上

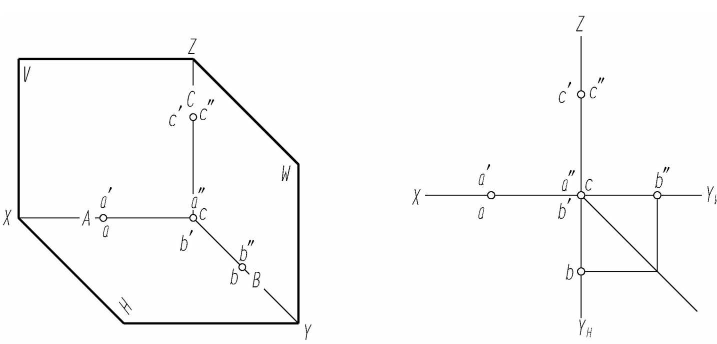
2. 点在投影轴上

当空间点的三个坐标中有两个为0时，点就位于投影轴上。在投影轴上的点的投影特性如下：

(1)空间点和它的两个投影重合于投影轴上。

(2)空间点的另外一个投影与原点 O 重合。

如图3-9所示，空间点 A、B、C 分别位于 X 轴、Y 轴、Z 轴上，其两个投影重合在一个投影轴上，另外一个投影与原点 O 重合。



(a)直观图　　(b)投影图

图 3-9　点在投影轴上

3. 点在原点 O 上

空间点在原点 O 上，则其三面投影均与原点 O 重合。

【例 3-3】 已知点 A、B、C、D 分别位于投影面和投影轴上，求作各点的三面投影图，如图 3-10(a)所示。

【解】 分析：因为不论点位于空间体系中的哪个位置，空间点的投影都符合点的三投影规律。

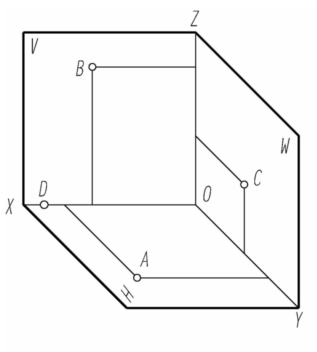
作图步骤如下：

(1)由图 3-10(a)可知，点 A 位于 H 面上，其水平投影 a 与 A 点重合，其正面投影 a' 和侧面投影 a'' 分别位于 OX 轴和 OY_W 轴上，作图结果如图 3-10(b)所示。

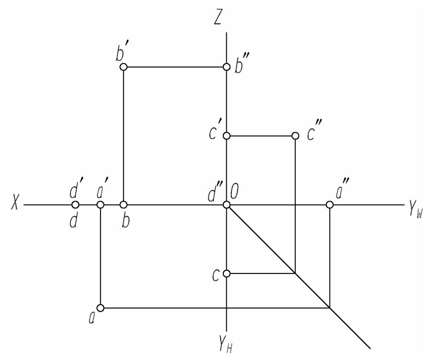
(2)B 点位于 V 面上，其正面投影 b' 与 B 点重合，水平投影 b 和侧面投影 b'' 分别位于 OX 轴和 OZ 轴上，作图结果如图 3-10(b)所示。

(3)C 点位于 W 面上，其侧面投影 c'' 与 C 点重合，其正面投影 c' 和水平投影 c 分别位于 OZ 轴和 OY_H 轴上，作图结果如图 3-10(b)所示。

(4)D 点位于 OX 轴上，其正面投影 d' 和水平投影 d 与 D 点重合位于 OX 轴上，侧面投影 d'' 位于原点 O 上，作图结果如图 3-10(b)所示。



(a) 已知



(b) 作图

图 3-10 求特殊位置点的投影

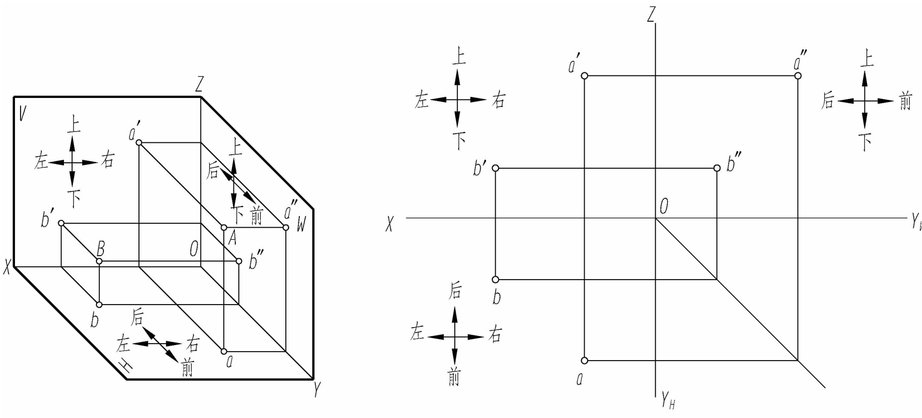
3.1.5 两个点的相对位置

1. 相对位置的判定

空间两个点具有左右、前后、上下六个方位，由前述可知，根据点的三个坐标可以确定空间点到三个投影面的距离。因此，分析空间两点的相对位置，只需分析它们的坐标值即可。根据 X 坐标值的大小可以判断两点的左右位置；根据 Y 坐标值的大小可以判断两点的前后位置；根据 Z 坐标值的大小可以判断两点的上下位置。即 X 坐标值大的点在左，小的点在右；Y 坐标值大的点在前，小的点在后；Z 坐标值大的点在上，小的点在下。

空间两点的相对位置可以在它们的三面投影中反映出来。如图 3-11(a)所示，A、B 两点的 H 面投影反映了两点的左右、前后关系；两点的 V 面投影反映了两点的左右、上下关系；两点的 W 面投影反映了两点的前后、上下关系。展开之后的投影图如图 3-11(b)所示。从

直观图(或投影图)上可以看出点 A 在点 B 的右、前、上，点 B 在点 A 的左、后、下。



(a) 直观图　　(b) 投影图

图 3-11　两个点的相对位置

若已知两点的相对位置及其中一点的三面投影，就能作出另一点的三面投影。

【例 3-4】 已知点 A、B 的三面投影，判断两点的相对位置，如图 3-12 所示。

【解】 分析：空间两点的相对位置，可由它们的三面投影来确定。

(1)由 H 面投影可判断出 A 点在 B 点的左前方。

(2)由 V 面投影可判断出 A 点在 B 点的左下方。

(3)由 W 面投影可判断出 A 点在 B 点的前下方。

(4)由三面投影中的任两面投影即可得出 A 点在 B 点的左、前、下方。

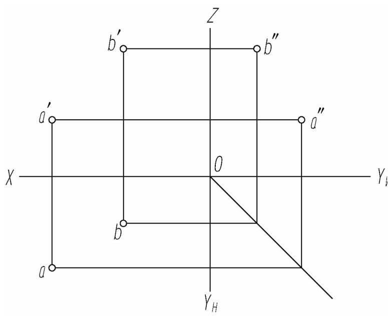
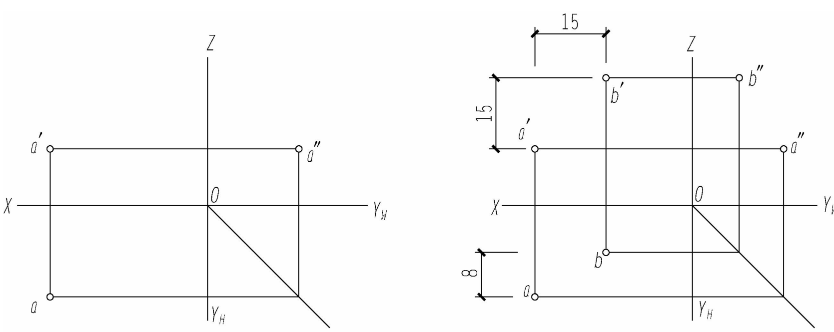


图 3-12　判断两点的相对位置

【例 3-5】 已知 A 点的三面投影，如图 3-13(a)所示，且知 B 点在 A 点后 8 mm、上15 mm、右 15 mm，求 B 点的三面投影。



(a) 已知　　(b) 作图

图 3-13　已知点 *A* 的三面投影求点 *B* 的三面投影

【解】 分析:通过正面投影所反映出的 A、B 两点之间的左右、上下位置确定 b' 点,再由水平投影所反映出的 A、B 两点之间的前后关系及长对正原则得到 b 点,最后由高平齐、宽相等原则得到 b'' 点。

作图步骤如图 3-13(b)所示。

(1)在正面投影上,由 a' 点向上量 15 mm,再向右量 15 mm,得到 b' 点。

(2)在水平投影上,由 a 点向后量 8 mm,并作 OX 轴的平行线,与过 b' 点作 OX 的垂直线相交,交点就是 b 点。

(3)由高平齐、宽相等原则得到 b'' 点。

2. 重影点

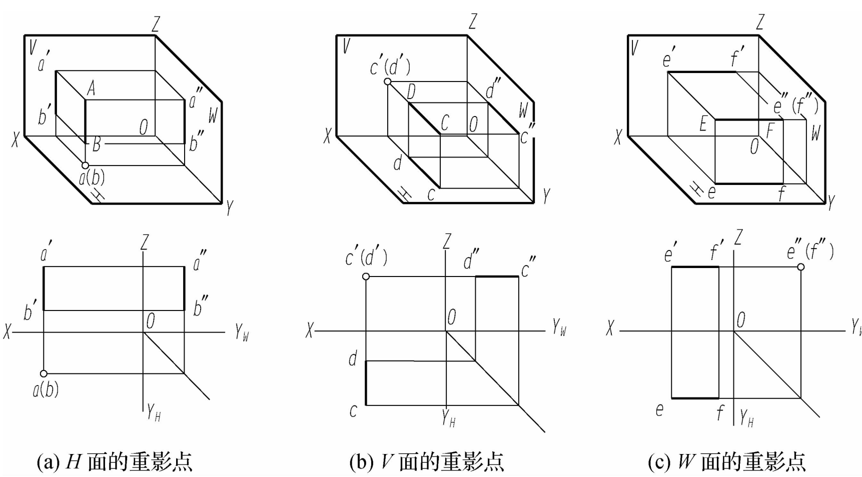
当两个点有两个坐标相同时,这两个点将处于同一条投射线上,因而对某一投影面的投影将重合为一点,该点称为重影点。

(1)H 面的重影点。如图 3-14(a)所示,A、B 两点的水平投影重合为一点,A、B 两点称为 H 面的重影点,A 点在上,B 点在下,A 点可见,B 点不可见,标注为 $a(b)$。

(2)V 面的重影点。如图 3-14(b)所示,C、D 两点的正面投影重合为一点,C、D 两点称为 V 面的重影点,C 点在前,D 点在后,C 点可见,D 点不可见,标注为 $c'(d')$。

(3)W 面的重影点。如图 3-14(c)所示,E、F 两点的侧面投影重合为一点,E、F 两点称为 W 面的重影点,E 点在左,F 点在右,E 点可见,F 点不可见,标注为 $e''(f'')$。

两个点对产生重影的投影面而言,距离该投影面较远的点(坐标值较大的点)是可见的,而另一点(坐标值较小的点)是不可见的。因此,可以利用重影点对点的可见性进行判断。



(a) H 面的重影点　(b) V 面的重影点　(c) W 面的重影点

图 3-14　重影点

【例 3-6】 如图 3-15(a)所示,已知形体的立体图,按照给定的投影方向画出其三面投影,并在投影图上标出重影点。

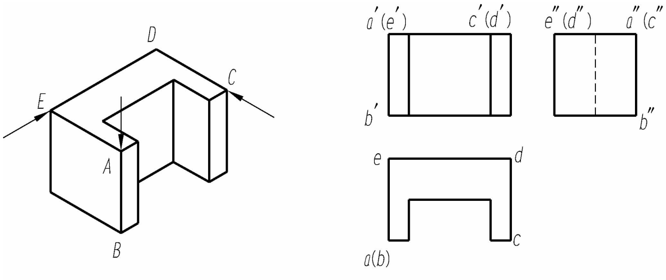
【解】 作图步骤如图 3-15(b)所示。

(1)根据图 3-15(a)给出的投影方向,画出形体的三面投影图。

(2)因 A、B 两点位于同一条垂直于 H 面的侧棱上,故这两点的 H 面投影重合,A 点在上为可见,B 点在下为不可见,它们的重合投影标记为 $a(b)$。

(3)因 C、D 两点与 A、E 两点分别位于两条垂直于 V 面的侧棱上,故 C、D 两点和 A、E 两点的 V 面投影各自重影,其中,C、D 两点中 C 点在前为可见,D 点在后为不可见,它们的重合投影标记为 $c'(d')$;A、E 两点中,A 点在前为可见,E 点在后为不可见,它们的重合投影标记为 $a'(e')$。

(4)因 E、D 两点位于同一条垂直于 W 面的侧棱上,A、C 两点所在的两条侧棱处于同一条垂直于 W 面的直线上,故 E、D 两点和 A、C 两点的 W 面投影重影,其中,E、D 两点中 E 点在左为可见,D 点在右为不可见,它们的重合投影标记为 $e''(d'')$。



(a) 已知条件　　(b) 作投影图,标重影点

图 3-15　求重影点

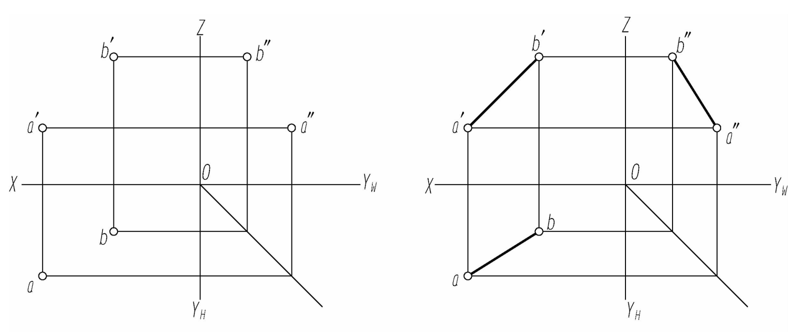
3.2　直线的投影

3.2.1　直线投影的求法

直线的投影一般仍为直线。由几何学可知,空间两点决定一条直线,因此只要画出直线上两端点的同面投影(两点在同一投影面上的投影称为同面投影),再将其连线即可得到直线在该投影面上的投影。

【例 3-7】 如图 3-16(a)所示,已知点 A、B 的三面投影,求直线 AB 的三面投影。

【解】 空间两点决定一条直线,将同一投影面上 A、B 两点的投影相连,即得直线 AB 的三面投影,如图 3-16(b)所示。



(a) 已知两点的三面投影　　(b) 作直线的三面投影

图 3-16　由两点投影求直线投影

3.2.2 各种位置直线的投影及其特性

在三面投影体系中，根据直线相对于投影面位置的不同，可将直线分为一般位置直线和特殊位置直线。其中，特殊位置直线包括投影面平行线和投影面垂直线。

直线与其水平投影、正面投影、侧面投影的夹角分别称为直线对投影面 H、V、W 的倾角，分别用字母 α、β、γ 表示。当直线平行于投影面时，直线与该投影面的倾角为 0°；当直线垂直于投影面时，直线与该投影面的倾角为 90°。

1. 一般位置直线的投影及其特性

与三个投影面都倾斜的直线称为一般位置直线。如图 3-17(a)中的直线 AB 即一般位置直线。其与三个投影面的倾角分别是 α、β、γ。图 3-17(b)为直线 AB 的三面投影图。因为一般位置直线的三个投影都倾斜于投影轴，所以其投影长度都小于线段实长，三个投影与投影轴的夹角均不反映该空间直线对投影面的倾角。

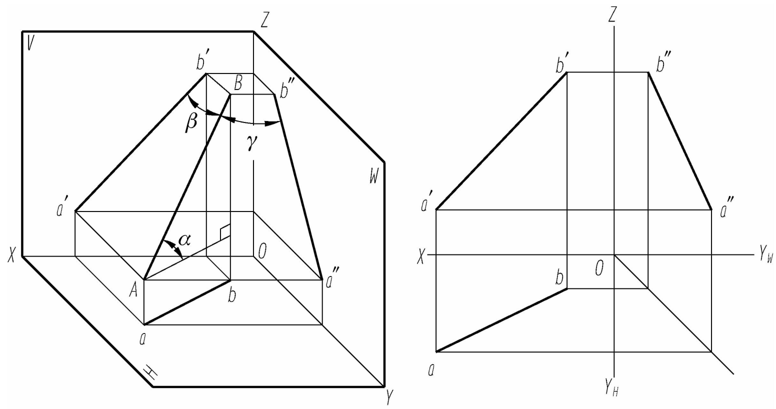


图 3-17 一般位置直线

【例 3-8】 如图 3-18(a)所示，已知直线 AB 的两面投影，求直线 AB 的第三面投影。

【解】 分析：两点确定一条直线。已知线段的两个端点的投影即可求出线段的投影。

作图步骤如图 3-18(b)所示。

(1)过 O 点作 45°斜线。

(2)根据长对正、高平齐、宽相等，由 a'、a 求出 a''，由 b'、b 求出 b''。

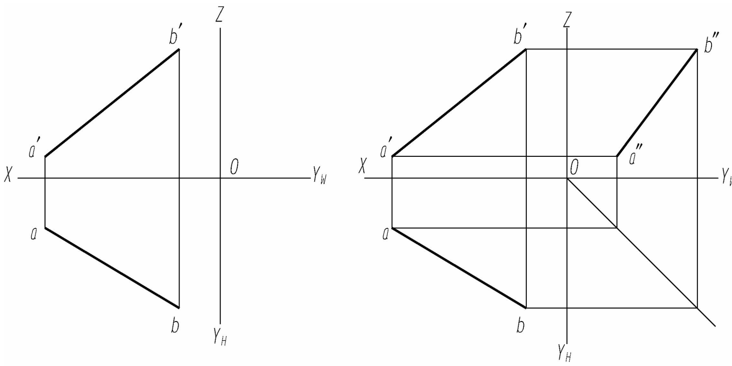
(3)连接 a''、b''，即得直线 AB 的 W 面投影。

2. 特殊位置直线的投影及其特性

(1)投影面平行线。

①定义。平行于某一个投影面，且倾斜于另外两个投影面的直线称为投影面平行线。

②分类。投影面平行线分为水平线、正平线、侧平线。水平线是平行于 H 面，倾斜于 V 面、W 面的直线。正平线是平行于 V 面，倾斜于 H 面、W 面的直线。侧平线是平行于 W 面，倾斜于 H 面、V 面的直线。

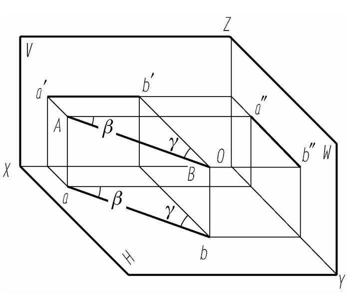
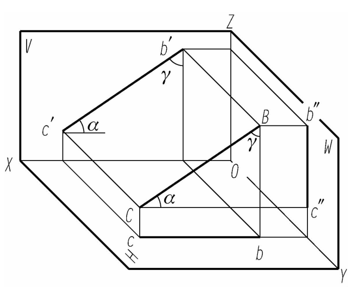
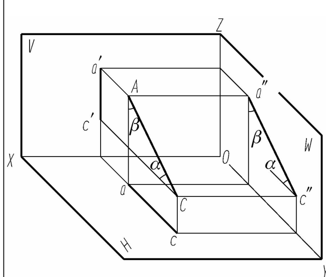
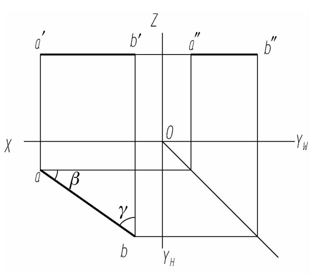
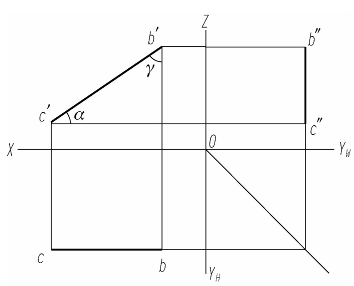
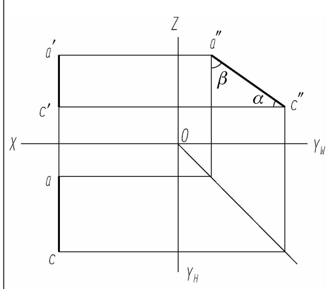


(a) 已知　　　　(b) 作图

图 3-18　求直线 *AB* 的第三面投影

③投影特性。投影面平行线在它所平行的投影面上的投影反映其实长，并且反映空间直线与另外两个投影面的倾角。投影面平行线在形体立体图和投影图中的位置及投影特性见表 3-1。

表 3-1　投影面平行线在形体立体图和投影图中的位置及投影特性

名称	水平线 AB	正平线 BC	侧平线 AC
立体图			
投影图			
投影特性	(1)水平投影反映实长，与 X 轴夹角为 β，与 Y 轴夹角为 γ。 (2)正面投影平行于 X 轴。 (3)侧面投影平行于 Y 轴	(1)正面投影反映实长，与 X 轴夹角为 α，与 Z 轴夹角为 γ。 (2)水平投影平行于 X 轴。 (3)侧面投影平行于 Z 轴	(1)侧面投影反映实长，与 Y 轴夹角为 α，与 Z 轴夹角为 β。 (2)正面投影平行于 Z 轴。 (3)水平投影平行于 Y 轴

【例 3-9】 如图 3-19(a)所示,已知直线 AB 为正平线,$\alpha=30°$,求直线 AB 的第三面投影。(求出一解即可。)

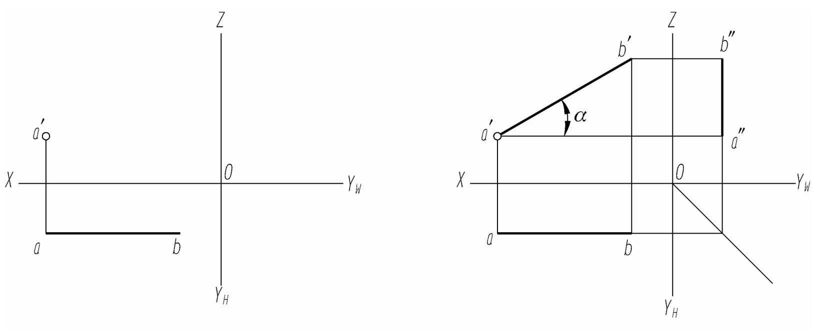
【解】 分析:AB 为正平线,其水平投影平行于 OX 轴;$\alpha=30°$,则其正面投影与 OX 轴夹角为 30°。

作图步骤如图 3-19(b)所示。

①过 O 点作 45°斜线。

②在正面投影上过 a' 点作与 OX 轴夹角为 30°的直线,与过 b 点向上作的投影连线相交于 b' 点,连接 a'、b' 点得直线 AB 的正面投影 $a'b'$。

③根据长对正、高平齐、宽相等,即可由 ab、$a'b'$ 求出直线 AB 的侧面投影 $a''b''$。



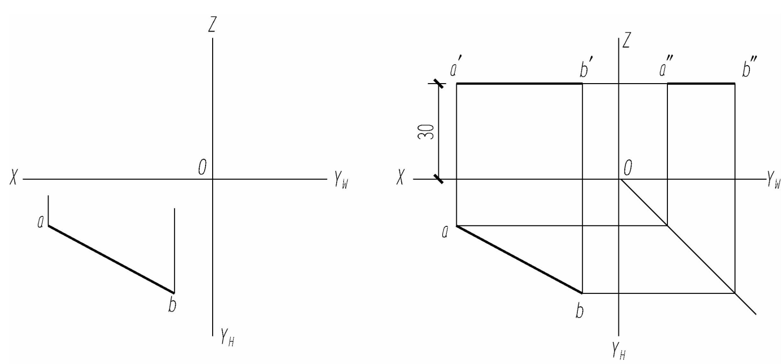
(a) 已知　　(b) 作图

图 3-19　求正平线 AB 的第三面投影

【例 3-10】 如图 3-20(a)所示,已知直线 AB 为水平线,距离 H 面 30 mm,求直线 AB 的另外两面投影。

【解】 分析:根据已知条件可知 AB 为水平线,其正面投影平行于 OX 轴,且距离 OX 轴 30 mm。

作图步骤如图 3-20(b)所示。



(a) 已知　　(b) 作图

图 3-20　求水平线 AB 的另外两面投影

①过 O 点作 45°斜线。

②在正面投影上作与 OX 轴平行且相距 30 mm 的直线，与过 a 点向上作的投影连线相交于 a' 点，与过 b 点向上作的投影连线相交于 b' 点，连接 a'、b' 点即得直线 AB 的正面投影 $a'b'$。

③根据长对正、高平齐、宽相等，即可由 ab、$a'b'$ 求出直线 AB 的侧面投影 $a''b''$。

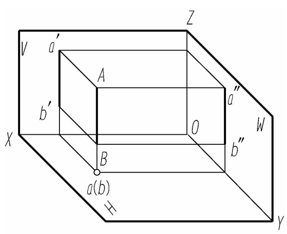
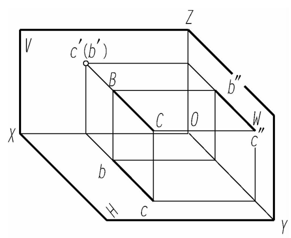
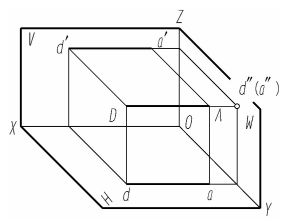
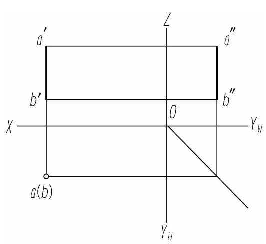
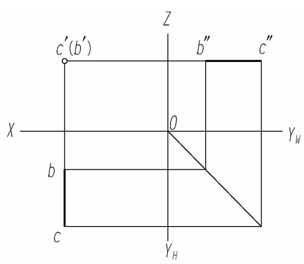
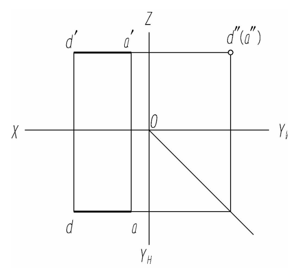
(2)投影面垂直线。

①定义。垂直于某一个投影面的直线称为投影面垂直线。

②分类。投影面垂直线分为铅垂线、正垂线和侧垂线。其中，铅垂线是垂直于 H 面的直线，正垂线是垂直于 V 面的直线，侧垂线是垂直于 W 面的直线。

③投影特性。投影面垂直线在它所垂直的投影面上的投影积聚为一点，另外两个投影垂直于相应的投影轴。投影面垂直线在形体立体图和投影图中的位置及投影特性见表 3-2。

表 3-2　投影面垂直线在形体立体图和投影图中的位置及投影特性

名称	铅垂线 AB	正垂线 BC	侧垂线 AD
立体图			
投影图			
投影特性	(1)水平投影积聚为一点。 (2)正面投影和侧面投影均平行于 OZ 轴，并反映实长	(1)正面投影积聚为一点。 (2)水平投影和侧面投影均平行于 OY 轴，并反映实长	(1)侧面投影积聚为一点。 (2)正面投影和水平投影均平行于 OX 轴，并反映实长

【例 3-11】 如图 3-21(a)所示，已知直线 AB 为铅垂线，A 点距离 H 面 30 mm，$AB=$ 25 mm。求直线 AB 的另外两面投影。

【解】 分析：根据已知条件可知 AB 为铅垂线，其正面投影垂直于 OX 轴，由已知的水平投影 $a(b)$ 可知 A 点在 B 点上方，且 a' 点距离 OX 轴 30 mm。

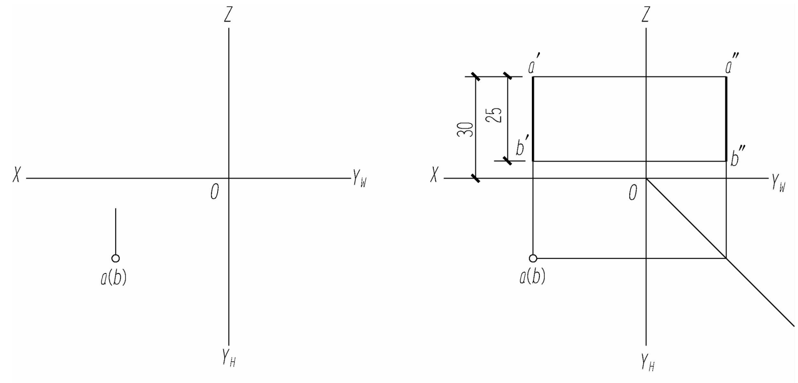
作图步骤如图 3-21(b)所示。

①过 O 点作 45°斜线。

②在正面投影上作与 OX 轴平行且相距为 30 mm 的直线，与过 $a(b)$ 点向上作的投影联

系线相交于点 a'。由 a' 点向下截取 25 mm 得 b' 点。连接 a'、b' 点即得直线 AB 的正面投影 $a'b'$。

③根据长对正、高平齐、宽相等，即可由 $a(b)$、$a'b'$ 求出直线 AB 的侧面投影 $a''b''$。



(a) 已知　　(b) 作图

图 3-21　求铅垂线 *AB* 的另外两面投影

3.2.3　一般位置直线的实长与倾角

由前述可知，特殊位置直线至少有一个投影面的投影是反映空间线段实长的，投影图上也能反映出空间直线与投影面的夹角。但一般位置直线的三面投影既不能反映空间直线的实长，也不能反映直线对投影面的倾角。因为一般位置直线与各投影面之间存在夹角，使得其投影不能反映实长，但是通过一般位置直线的任意两个同面投影可以确定它在空间的位置，所以可以利用其任意两个同面投影求出实长和倾角，这种方法称为直角三角形法。

如图 3-22(a)所示，一般位置直线 AB 的投影 ab、$a'b'$ 的长度均小于实长，且不反映与任意倾角的大小。过 B 点作 ab 的平行线交 Aa 于 A_0 点，得直角三角形 ABA_0。该直角三角形的一条直角边 $A_0B=ab$，即 H 面的投影长度；另一条直角边 $AA_0=|Aa-A_0a|=|Z_A-Z_B|=\Delta Z_{AB}$，即该直线两端点 Z 坐标的差。由于两直角边在投影图上都为已知，因此可以在投影图上画出这样的直角三角形来求出倾角 α 及直线 AB 的实长，如图 3-22(b)所示。同理，按照同样的方法可以求出直线 AB 对 V 面的倾角 β 及实长，如图 3-22(b)所示。

直角三角形可以画在投影图的任何位置上，但为了方便，一般可以直接利用直线的投影作出，如图 3-22(b)所示。

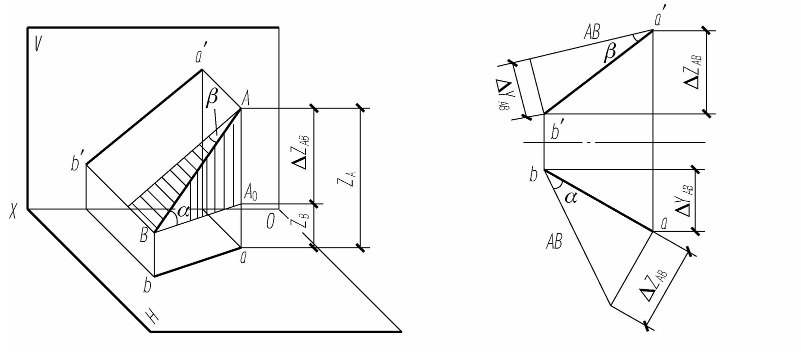
直角三角形法的四要素为坐标差、投影长、实长和倾角。

综合以上分析可以得出以下结论：

(1)在 α 所存在的直角三角形中，α 所相邻的一条直角边为 H 面投影长，所对应的直角边为 Z 坐标差 ΔZ，如图 3-23(a)所示。

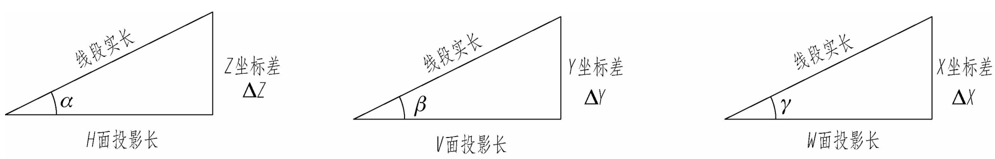
(2)在 β 所存在的直角三角形中，β 所相邻的一条直角边为 V 面投影长，所对应的直角边为 Y 坐标差 ΔY，如图 3-23(b)所示。

(3)在 γ 所存在的直角三角形中，γ 所相邻的一条直角边为 W 面投影长，所对应的直角边为 X 坐标差 ΔX，如图 3-23(c)所示。



(a) 立体图　　(b) 用直角三角形法求 α、β 及实长

图 3-22　用直角三角形法求直线段的实长及倾角



(a)　(b)　(c)

图 3-23　坐标差、投影长、实长和倾角之间的关系

【例 3-12】 求线段 AB 的实长及对 H 面、V 面的倾角 α、β，如图 3-24(a)所示。

【解】 分析：由直角三角形法则可知，由直线的两面投影可求出直线的实长及对投影面的倾角。

作图步骤如下：

(1)在正面投影图上量出 ΔZ_{AB}、ab 的长，作直角三角形，得到线段实长及倾角 α，如图 3-24(b)所示。

(2)同理，在水平投影图上作直角三角形，得到线段实长及倾角 β，如图 3-24(c)所示。

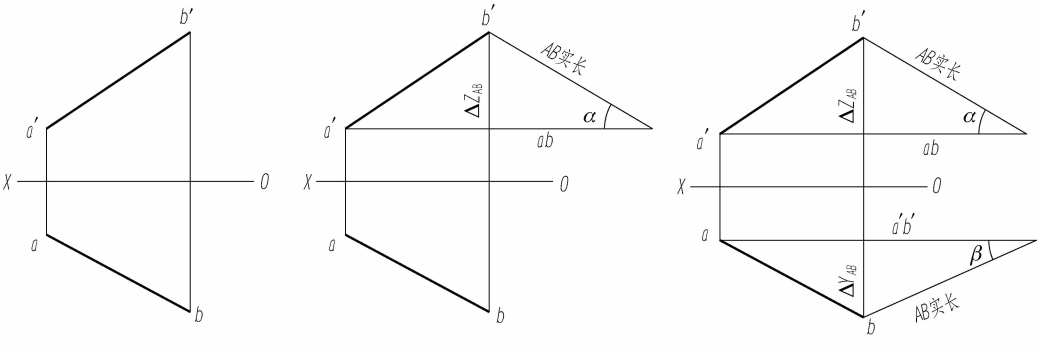
【例 3-13】 如图 3-25(a)所示，已知直线 AB 的一个端点 A 的水平投影 a 及直线的正面投影 $a'b'$，$AB=25$ mm，点 B 在点 A 的前面，求直线 AB 的水平投影及倾角 β。

【解】 分析：由点的投影规律可知，b 和 b' 的连线垂直于 OX 轴，由此可确定出 b 点所在的直线方位。在正下方的 H 投影面上，只要求出 A、B 两点的 Y 坐标差 ΔY，即可确定 b 点。a、b 两点相连即可得直线 AB 的水平投影 ab。在 β 所存在的直角三角形中，β 所相邻的一条直角边为 V 面投影长，所对应的直角边为 Y 坐标差。

作图步骤如图 3-25(b)所示。

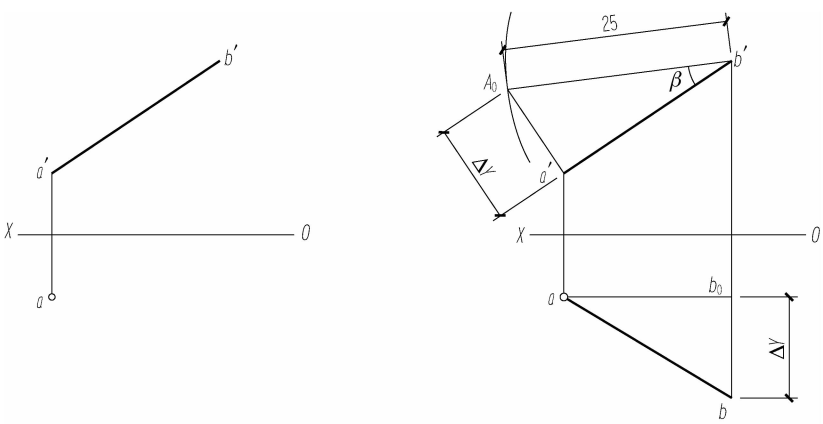
(1)过 a' 作 $a'b'$ 的垂线，再以 b' 为圆心，以 25 mm 长为半径作圆弧与所作垂线相交于 A_0 点，连接 A_0、b' 点得直角三角形 $A_0a'b'$，A_0a' 的长度即为 A、B 两点的 Y 坐标差 ΔY。$a'b'$ 与 A_0b' 的夹角即为 β。

(2)过点 a 作水平线与过 b' 所作的 X 轴垂线交于点 b_0，在该垂线上自 b_0 向下截取 $b_0b=A_0a'$，即得点 b，连接 a、b 两点，得到直线 AB 的水平投影 ab。



(a) 已知　　(b) 求实长及α　　(c) 求实长及β

图 3-24　求线段 AB 的实长及对 H 面、V 面的倾角 α、β



(a)已知　　(b)作图

图 3-25　求直线 AB 的水平投影及倾角 β

3.2.4　点和直线之间的位置关系

点和直线之间的位置关系包括点在直线上和点不在直线上。若点在直线上，则由正投影的基本性质可知，应具有从属性和定比性两个投影特性。

直线上点的投影规律可作为求直线上点的投影或判断点是否在直线上的依据。

【例 3-14】　用两种方法判断点 K 是否在直线 AB 上，如图 3-26(a)所示。

【解】　方法一：由定比性可知，若点 K 在直线 AB 上，则 $AK:KB=ak:kb=a'k':k'b'=a''k'':k''b''$，因此可用定比性判断点是否在直线上。作图步骤如下：

(1)在 ab 上过 b 点作一条斜线，取 $ba_1=b'a'$，$a_1k_1=a'k'$，如图 3-26(b)所示。

(2)连接 aa_1 和 kk_1，如图 3-26(b)所示，因为 aa_1 和 kk_1 不平行，所以可知点 K 不在直线 AB 上。

方法二：由从属性可知，若点在直线上，则点的投影必在直线的同名投影上且符合点的投影规律。求出直线 AB 和点 K 的第三面投影 $a''b''$ 和 k''，从图 3-26(c)可以看出 k'' 不在 $a''b''$ 上，所以可知点 K 不在直线 AB 上。

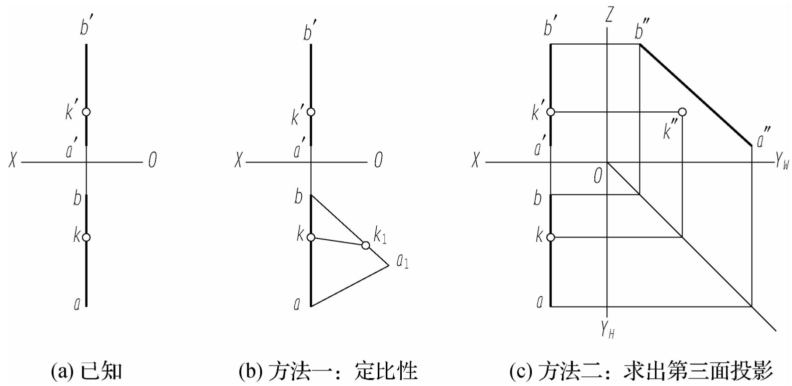


图 3-26　判断点是否在直线上

【例 3-15】 已知点 C 在直线 AB 上，且 $AC:CB=1:2$，如图 3-27(a)所示，求点 C 的两面投影。

【解】 利用定比性求解，作图步骤如下：

(1)过 a'、b'、a、b 任一点(如 a' 点)任意作一条直线，截取 $a'1$ 为一个单位长，线段 13 为两个单位长，即 $a'1:13=1:2$。如图 3-27(b)所示。

(2)连接 $3b'$，过点 1 作 $1c' /\!/ 3b'$，求得 c'，过 c' 作联系线得 c，如图 3-27(c)所示。

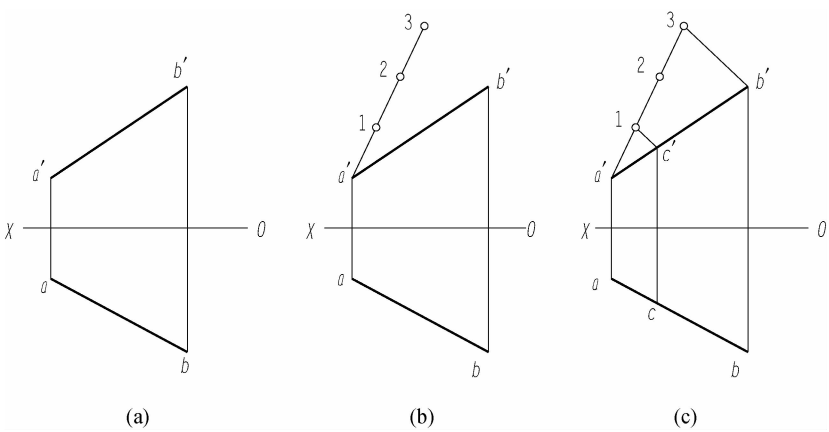


图 3-27　求点 C 的两面投影

3.2.5　两条直线间的相对位置关系

空间两条直线的相对位置有平行、相交、交叉和垂直四种情况。

1. 两条直线平行

由平行投影的特性可知，两条直线平行时有如下结论。

(1)若两条直线平行，则它们各对同面投影一定平行。如图 3-28 所示，$AB /\!/ CD$，则 $ab /\!/ cd$、$a'b' /\!/ c'd'$、$a''b'' /\!/ c''d''$。

(2)若两条直线平行，则它们的同面投影长度之比与它们实长之比相等，且指向相同。如图 3-28 所示，$AB : CD = ab : cd = a'b' : c'd' = a''b'' : c''d''$，若 AB 与 CD 指向相同，则 ab 与 cd、$a'b'$ 与 $c'd'$、$a''b''$ 与 $c''d''$ 指向也各自相同。

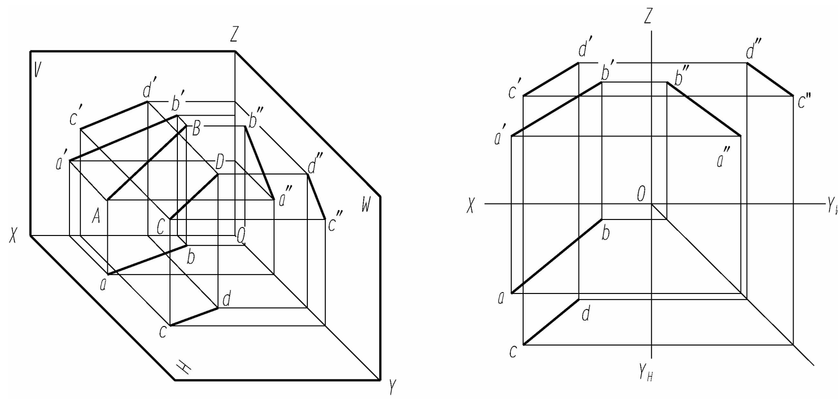


图 3-28　两条直线平行

判断两条直线是否平行的方法如下：

(1)若两条直线的三组同面投影都平行，则两条直线在空间平行。

(2)若两条直线均为一般位置直线，任意两组同面投影平行，则可判断两条直线在空间平行。

(3)若两条直线同时平行于某一投影面，则需通过两条直线在该投影面上的投影来判断，或者通过定比性和指向来判断。

【例 3-16】 判断两侧平线 AB 与 CD 是否平行，如图 3-29(a)所示。

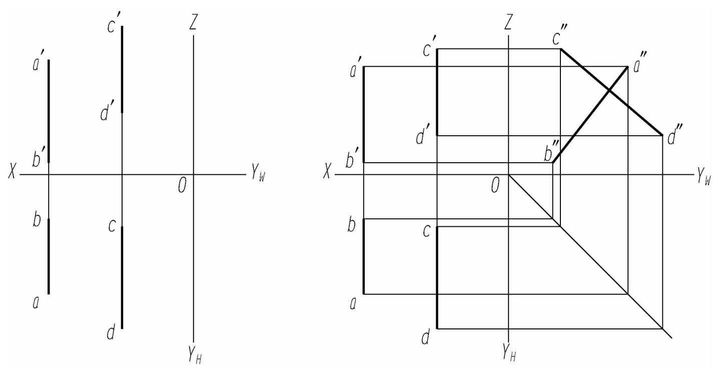


图 3-29　判断两侧平线是否平行