第 5 章

测量误差的理论基础

5.1 误差概述

5.1.1 误差的定义、来源及种类

1. 误差的定义

实践证明，对某量进行多次观测，各次所得的结果总是存在差异，如对一个三角形的三个内角进行观测，其和不等于 180°，这种差异实质上表现为各次测量所得的观测值与未知量客观存在的真值之间的差值，这种差值称为真误差，其计算公式为

$$真误差=观测值-真值$$

在测量中，某些量很难得到真值，甚至得不到真值，真误差也就无法知道。此时常采用多次观测的算术平均值作为该量的最可靠值，该值称为该量的最或是值，又称似真值。观测值与最或是值之差称为最或是误差，又称似真误差，其计算公式为

$$最或是误差=观测值-最或是值$$

2. 误差的来源

进行测量时，误差的来源可归纳为以下三个方面：

(1) 测量仪器的构造不完善。测量工作依靠特制的仪器进行，仪器的设计与制造不可能完美，如仪器各轴线间的几何条件不完全满足、刻划不均匀、采用的度量单位不能量尽物体的大小等。

(2) 观测者感觉器官的鉴别能力有限。观测者对鉴别力所不及的部分往往忽略或舍去，且观测结果与观测者的技术水平、当时的生理及心理状态密切相关，所以在仪器的安置、照准、读数等方面都会产生误差。

(3) 外界环境与气象条件不稳定。气温、湿度、风力、亮度及折光等自然条件不稳定，将会使观测结果含有误差。

观测结果的精确程度称为观测精度，观测精度取决于观测时所用的仪器、人和环境所构成的观测条件。具有同样技术水平的人用同等精度的仪器在同样的外界环境下进行的观测(观测条件相同)称为等精度观测，观测条件不同的各次观测称为不等精度观测。

3. 误差的种类

在观测过程中，可能会出现粗差，粗差也称为过失误差或错误。例如，瞄错了目标、读错了数等都是与事实不符、与观测量毫不相干的特殊事件。粗差多由于作业人员疏忽大意所致，不允许存在于观测结果中，也不属于测量误差讨论的范畴。因此，作业人员在工作时应仔细、认真，并采取必要的检校措施进行多余观测，以发现和避免错误。

根据误差的性质可将测量误差分为系统误差和偶然误差两类。

（1）系统误差。在相同的观测条件下对某物理量进行一系列观测，若观测误差的正、负符号及数值大小表现出一致的倾向或保持一定的函数关系，则这种误差称为系统误差。例如，钢尺的尺长误差使丈量误差与距离成正比，地球曲率和大气折光引起的读数误差与距离构成函数关系等。

符号的一致性使系统误差具有累积性，因而其对观测结果的影响较大。在找到系统误差的规律之后，可采用各种方法将其消除或者削弱。例如，加改正数以消除系统误差的影响，采取一定的观测措施（如采用盘左盘右测角、前后视线等长测高差等方法）削弱或消除系统误差的影响，检校仪器使仪器误差的残差减小到最低程度等。

（2）偶然误差。偶然误差也称为随机误差。在相同的观测条件下对某物理量进行一系列观测，观测误差的符号和大小没有表现出一致的倾向，但就大量观测误差来讲具有偶然事件的统计规律，这种误差称为偶然误差，如水准测量时毫米数的估读误差、望远镜的照准误差等。

偶然误差是由某些不可预知的因素导致的，对观测结果的影响也较大，且很难完全消除。为了削弱偶然误差的影响，可采用各种方法，如采用多余观测（使观测次数多于必要的次数），采用一定的计算方法求最或是值，要求所使用仪器的精度与观测值的精度相适应等。

5.1.2 多余观测与测量平差

在测量成果中存在不可避免的误差，还有可能存在错误，为了提高观测成果的质量、及时发现错误，必须进行多余观测。多余观测是指观测值的个数要多于确定未知量所必需的观测值个数的观测。例如，观测一个三角形的三个内角时，有一个角是多余观测；丈量某一段距离进行往返测量，有一次测量是多余观测。多余观测使观测结果之间产生了矛盾，即产生不符值。正确处理这些带有误差的观测值的工作称为测量平差。它的目的与任务是对一系列带有偶然误差的观测值运用最小二乘法原理和概率统计方法，消除不符值，求得最接近未知量真值的值（最或是值），评定观测值和最或是值的精度，同时研究最合理的观测方案。

5.2 偶然误差的特性

在相同的观测条件下，对真值为 X 的某量进行 n 次观测，观测值分别为 $l_1, l_2, \cdots, l_n$，每次观测的真误差分别为 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$，则按定义可写成

$$\Delta_i = l_i - X \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{5-1}$$

例如，在相同的观测条件下，独立地观测了 168 个三角形的全部内角，由于观测结果中存在偶然误差，三角形的内角和不等于 180°，因此可按式（5-1）求得每个三角形内角和的真误差，这个误差也称为三角形闭合差。

现将 168 个真误差按每 2″划分为一个区间，根据误差值的大小及正负号分别统计出每个区间内误差的个数 n_i 及相对个数$\frac{n_i}{168}$(频率)，统计结果见表 5-1。

表 5-1　三角形内角和观测误差统计结果

误差区间 dΔ/(″)	Δ 为正			Δ 为负		
	个数 n_i	频率 n_i/n	$(\frac{n_i}{n})/\mathrm{d}\Delta$	个数 n_i	频率 n_i/n	$(\frac{n_i}{n})/\mathrm{d}\Delta$
0～2	22	0.131	0.066	21	0.125	0.062
＞2～4	19	0.113	0.056	20	0.119	0.060
＞4～6	15	0.089	0.045	13	0.077	0.039
＞6～8	10	0.060	0.030	11	0.065	0.033
＞8～10	9	0.054	0.027	9	0.054	0.027
＞10～12	5	0.030	0.015	6	0.036	0.018
＞12～14	2	0.012	0.006	3	0.018	0.009
＞14～16	1	0.006	0.003	2	0.012	0.006
＞16	0	0		0	0	
$\sum$	83	0.494		85	0.506	

根据表 5-1 及大量观测实践的统计结果，经理论分析，可归纳出偶然误差具有如下特性：

(1) 有界性。在一定的观测条件下，偶然误差的绝对值不会超过一定的限值，即偶然误差超过一定限值的概率为零。

(2) 小误差密集性。绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的概率大。

(3) 对称性。绝对值相等的正误差和负误差出现的概率相等。

(4) 抵偿性。当观测次数无限增加时，偶然误差的算术平均值趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=0 \tag{5-2}$$

式中，[ ]表示求和，$[\Delta]=\Delta_1+\Delta_2+\cdots+\Delta_n$。

为了使观测结果更加直观，将表 5-1 的统计结果绘制成图 5-1 所示的直方图。以横坐标表示误差的大小，纵坐标表示各误差区间中误差出现的频率与区间间隔的比值，即$\left(\frac{n_i}{n}\right)/\mathrm{d}\Delta$。此时，图中每一误差区间上长方形的面积就代表该区间内误差出现的频率，即

$$\frac{n_i}{n\,\mathrm{d}\Delta}\mathrm{d}\Delta=\frac{n_i}{n}$$

例如，图 5-1 中画有斜线的长方形的面积代表误差出现在 0″～2″区间内的频率，其数值为 $n_i/n=22\div168=0.131$。

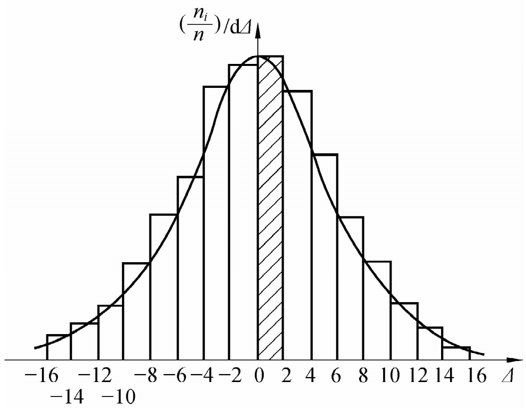


图 5-1　偶然误差分布直方图

因为横坐标表示偶然误差值,因此各长方形上部包围的阶梯状折线比较形象地表示了偶然误差的分布规律。当观测次数趋近于无限多、误差区间趋近于无限小时,上部折线的图形将趋近于一条以纵坐标轴为对称轴的连续的光滑曲线,这条曲线称为误差分布曲线或正态分布曲线。根据偶然误差的特性,应用概率理论可推导出该曲线的函数形式,此函数称为误差曲线方程,即

$$y=f(\Delta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \tag{5-3}$$

式中,σ 为观测误差的标准差,是与观测条件有关的参数;e 为自然对数的底。

从式(5-3)中可以看出正态分布曲线具有前面已经说明的偶然误差的特性:

(1) Δ 越小,$f(\Delta)$越大,当 $\Delta=0$ 时,$f(\Delta)$有最大值 $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$。当 $\Delta\to\pm\infty$时,$f(\Delta)\to 0$。由此可见,横坐标轴是曲线的渐近线,由于 $f(\Delta)$随着 Δ 的增大而较快地减小,因此,当 Δ 达到某值时,$f(\Delta)$已较小,实际上可看作零,这时的 Δ 可作为误差的限值。这正体现了偶然误差的有界性和小误差密集性。

(2) $f(\Delta)$是偶函数,即以绝对值相等的正误差与负误差求得的 $f(\Delta)$相等,所以曲线对称于纵坐标轴,这正体现了偶然误差的对称性。而偶然误差的抵偿,是由其对称性导出的。

由图 5-2(a)可知,误差曲线在纵轴两侧各有一个拐点,将式(5-3)求二阶导数并令其为零,求得曲线拐点的横坐标值为

$$\Delta_{拐}=\pm\sigma$$

由图 5-2(b)可知,由于误差出现在$-\sigma\sim+\sigma$ 的相对次数是某一定值,因此 σ 越小,曲线越陡,即误差分布越密集;σ 越大,曲线越平缓,即误差分布越分散。

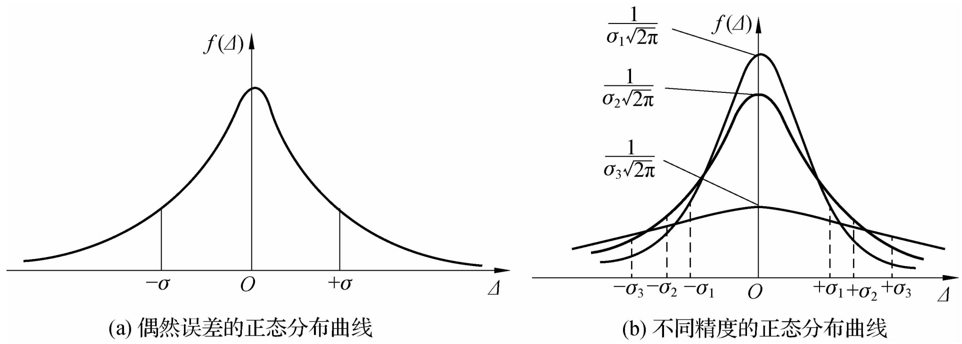


图 5-2　正态分布曲线

5.3　评定精度的标准

既然存在观测误差，就必须了解这些误差对测量成果的影响，考核测量成果是否满足工程建设工作的要求，判断观测误差是否超过允许的限度。由于误差具有偶然性，因此不能根据个别误差的大小来评定精度，而是需要运用合理的方式建立统一的评定精度的标准。

5.3.1　标准差与中误差

在一定的观测条件下进行一组观测，对应着一定的误差分布。一组观测误差所对应的标准差的大小反映了该组观测结果的精度。这样在评定观测精度时，只要设法求得该组误差所对应的标准差值 σ 即可。

标准差的平方 σ^2 称为方差，方差为偶然误差平方的理论平均值，即

$$\sigma^2=\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\cdots+\Delta_n^2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta^2]}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta\Delta]}{n}$$

则标准差 σ 为

$$\sigma=\pm\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{5-4}$$

从式(5-4)可知，求 σ 值要求观测值的次数 $n\to\infty$，而在实际工作中，观测的次数总是有限的，因此为了评定精度，我们定义按有限次观测的偶然误差求得的标准差为中误差 m，即

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{5-5}$$

例如，设对 10 个三角形进行了两组不同精度的观测，经计算分别求得真误差为

第一组：$-3''$、$+4''$、$+3''$、$0''$、$+1''$、$-1''$、$+2''$、$-6''$、$+4''$、$-5''$

第二组：$+9''$、$-2''$、$+3''$、$+5''$、$-8''$、$0''$、$+4''$、$-6''$、$+1''$、$-5''$

这两组观测值的中误差分别为

$$m_1=\pm\sqrt{\frac{(-3)^2+4^2+3^2+0^2+1^2+(-1)^2+2^2+(-6)^2+4^2+(-5)^2}{10}}=\pm3.4''$$

$$m_2=\pm\sqrt{\frac{9^2+(-2)^2+3^2+5^2+(-8)^2+0^2+4^2+(-6)^2+1^2+(-5)^2}{10}}=\pm5.1''$$

比较 m_1 和 m_2 的值可知,第一组的观测精度高于第二组。

值得说明的是,一组观测值的中误差 m 是各个观测值误差的函数,它的大小表示这一组观测值的精度。在等精度观测条件下,其也说明这一组中任何一次观测值所具有的精度,故观测值中误差也称为一次观测中误差。中误差并不等于每个观测值的真误差,而是一个反映一组真误差离散大小的指标。

5.3.2 平均误差

对某量进行多次观测,其结果分别为 $l_1, l_2, \cdots, l_n$,各次观测结果相应的真误差为 Δ_1,$\Delta_2, \cdots, \Delta_n$。用真误差绝对值的算术平均值(平均误差)$\theta$ 来评定观测精度,即

$$\theta = \pm \frac{|\Delta_1| + |\Delta_2| + \cdots + |\Delta_n|}{n} = \pm \frac{[|\Delta|]}{n} \tag{5-6}$$

在上述对10个三角形进行两组不同精度观测的例子中,其平均误差分别为±2.9″和±4.3″。两组观测值的中误差比平均误差大,这说明用中误差来评定精度要求是比较高的,大误差在计算中误差时反应比较灵敏。因此,目前多采用中误差作为评定测量精度的标准。

5.3.3 相对误差

在量距中,误差的大小和距离的长短有关。设丈量两段距离,其中误差均为±0.1 m,但两段距离分别为200 m和1 000 m,如果单纯因为中误差相等就认为两者的精度一样显然是不正确的,此时应该用相对误差来说明两者的精度。

观测误差的绝对值与观测值之比化为 $1/M$ 的形式后称为相对误差。观测值中误差 m 的绝对值与观测值 D 之比化为 $1/M$ 的形式后称为相对中误差 K,即

$$K = \frac{|m|}{D} = \frac{1}{M} \tag{5-7}$$

上述丈量200 m、1 000 m的中误差均为±0.1 m,则相对中误差分别为

$$K_1 = \frac{|m|}{D} = \frac{0.1}{200} = \frac{1}{2\ 000}$$

$$K_2 = \frac{|m|}{D} = \frac{0.1}{1\ 000} = \frac{1}{10\ 000}$$

从计算结果可以看出,前者的精度比后者低。

在一般钢尺量距中进行往返丈量时,常采用两次结果的较差与往返丈量距离的平均值之比化为 $1/M$ 的形式来衡量丈量精度,此形式称为往返丈量相对误差。这是相对误差的另一种形式,不同于上述的相对中误差,因为它没有求得观测值的中误差,其计算公式见式(4-2)。它反映了往返测量结果的符合程度,M 值越大,观测精度越高。

相对误差常用于距离丈量的精度评定,不能用于角度测量和水准测量的精度评定,因为后两者的误差大小与其观测量(角度、高差)大小无关。

5.3.4 允许误差

从偶然误差的有界性可知,在一定的观测条件下,偶然误差的绝对值不会超出一定的限度,这个限度就是允许误差,也称为极限误差或限差。

由图 5-1 可知，各矩形的面积代表误差出现在该区间中的频率，直方图的顶边即形成正态分布曲线，因此根据正态分布曲线就可以求得出现在小区间 $d\Delta$ 中的概率 $P(\Delta)$，即

$$P(\Delta)=f(\Delta)d\Delta \tag{5-8}$$

在实际测量中观测次数是有限的，故设 $\sigma\approx m$，则式(5-3)可写成

$$y=f(\Delta)=\frac{1}{m\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\Delta^2}{2m^2}}$$

代入式(5-8)得

$$P(\Delta)=f(\Delta)d\Delta=\frac{1}{m\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\Delta^2}{2m^2}}d\Delta \tag{5-9}$$

对式(5-9)积分可以得到偶然误差在任意区间出现的概率。设以 k 倍中误差作为区间，则在此区间内中误差出现的概率为

$$P(\Delta)=\int_{-km}^{+km}\frac{1}{m\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\Delta^2}{2m^2}}d\Delta \tag{5-10}$$

令 $k=1,2,3$，即分别取区间为 $(-m,+m)$、$(-2m,+2m)$ 和 $(-3m,+3m)$，此时误差落到各自区间内的概率分别为

$$\left.\begin{aligned}P(|\Delta|)&<(|m|)=0.683=68.3\%\\P(|\Delta|)&<(2|m|)=0.954=95.4\%\\P(|\Delta|)&<(3|m|)=0.997=99.7\%\end{aligned}\right\} \tag{5-11}$$

概率分布曲线所包含的面积如图 5-3 所示。由式(5-11)可以看出：绝对值超过一倍中误差的偶然误差出现的概率为 31.7%；绝对值超过两倍中误差的偶然误差出现的概率为 4.6%；绝对值超过三倍中误差的偶然误差出现的概率只有 0.3%，这已经是概率接近于零的事件，或者说这是实际上不可能发生的事件。为保证测量成果的质量，常取三倍中误差作为允许误差，即

$$\Delta_{允}=3m \tag{5-12}$$

在测量规范中往往提出较高的要求，取两倍中误差作为允许误差，即

$$\Delta_{允}=2m \tag{5-13}$$

在观测值中，若出现了超过允许误差的偶然误差（也称为超限），则认为此观测值不可靠，应舍去或重新观测。

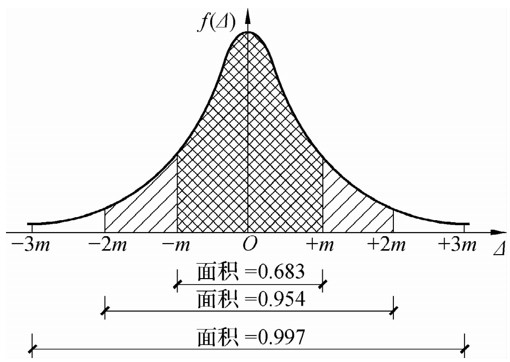


图 5-3　概率分布曲线所包含的面积

5.4 误差传播定律及其应用示例

1. 误差传播定律

有些观测量不是直接观测得来的，而是用直接观测量组成的函数式计算得出的，这样的观测量称为间接观测量。例如，用水准仪测定两点间的高差 h 时要通过直接观测后视读数 a 和前视读数 b，由函数关系 $h=a-b$ 计算得到。直接观测量的中误差必然以一定的方式传播，从而产生间接观测量的中误差。误差传播的一般法则就称为误差传播定律。

设有一般函数为

$$z=F(x_1,x_2,\cdots,x_k) \tag{5-14}$$

式中，$x_1,x_2,\cdots,x_k$ 为直接观测量。

对式(5-14)取全微分，得

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial F}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial F}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial F}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k \tag{5-15}$$

令

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=f_i \quad (i=1,2,\cdots,k)$$

当函数式与观测值确定后，各 f 值均为常数。

考虑到真误差是在观测过程中和无法察觉的情况下出现的微量变化，是一个无穷小增量，因而可以用这种增量近似地代替式(5-15)中的微分量，即用 Δx_i 和 Δz 分别取代 $\mathrm{d}x_i$ 和 $\mathrm{d}z$，它们的差别是高阶无穷小量，可忽略不计，故

$$\Delta z=f_1\Delta x_1+f_2\Delta x_2+\cdots+f_k\Delta x_k \tag{5-16}$$

为了从式(5-16)的真误差关系式中导出中误差关系式，这里设对 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_k$ 各量进行了 n 次观测，这样就可得到 n 个式(5-16)形式的关系式，即

$$\left.\begin{aligned}
\Delta z^{(1)}&=f_1\Delta x_1^{(1)}+f_2\Delta x_2^{(1)}+\cdots+f_k\Delta x_k^{(1)}\\
\Delta z^{(2)}&=f_1\Delta x_1^{(2)}+f_2\Delta x_2^{(2)}+\cdots+f_k\Delta x_k^{(2)}\\
&\cdots\\
\Delta z^{(n)}&=f_1\Delta x_1^{(n)}+f_2\Delta x_2^{(n)}+\cdots+f_k\Delta x_k^{(n)}
\end{aligned}\right\} \tag{5-17}$$

将式(5-17)的两端各自平方后求和，再除以 n，得

$$\frac{[\Delta z^2]}{n}=\frac{f_1^2[\Delta x_1^2]}{n}+\frac{f_2^2[\Delta x_2^2]}{n}+\cdots+\frac{f_k^2[\Delta x_k^2]}{n}+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}2f_if_j\frac{[\Delta x_i\Delta x_j]}{n} \tag{5-18}$$

Δx_i、Δx_j 是偶然误差，当 $i\neq j$ 时，$\Delta x_i\Delta x_j$ 也具有偶然误差的特性。由于偶然误差具有抵偿性，当 n 很大时，式(5-18)中的末项比其他项更接近于零，可忽略不计。当 $n\to\infty$ 时，式(5-18)可改写成

$$\sigma_z^2=f_1^2\sigma_1^2+f_2^2\sigma_2^2+\cdots+f_k^2\sigma_k^2 \tag{5-19}$$

在实际测量工作中，n 总是有限次的，设 $\sigma_i\approx m_i$，则式(5-19)可用中误差的形式表示为

$$m_z^2=f_1^2m_1^2+f_2^2m_2^2+\cdots+f_k^2m_k^2 \tag{5-20}$$

式(5-20)又可写为

$$m_z=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2m_1^2+\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2m_2^2+\cdots+\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right)^2m_k^2} \tag{5-21}$$

即一般函数的中误差等于各观测量偏导数的平方与相应观测值中误差平方的乘积的总和的平方根。

式(5-20)、式(5-21)表达了误差传播定律,应用时一般采用如下三个步骤:

(1) 列出独立的直接观测量与所求的间接观测量之间的函数关系式。

(2) 求函数对各个观测量的偏导数。

(3) 用式(5-21)求得函数的中误差。

根据误差传播定律求倍函数、和差函数、线性函数的误差传播公式如下:

对倍函数 $z=kx$,其误差传播公式为

$$m_z=\pm km \tag{5-22}$$

对和差函数 $z=x_1+x_2+\cdots+x_n$,其误差传播公式为

$$m_z=\pm\sqrt{m_1^2+m_2^2+\cdots+m_n^2} \tag{5-23}$$

对线性函数 $z=k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n$,其误差传播公式为

$$m_z=\pm\sqrt{k_1^2m_1^2+k_2^2m_2^2+\cdots+k_n^2m_n^2} \tag{5-24}$$

2. 误差传播定律的应用示例

(1) 测回法测水平角的精度。一个角值 β 等于两个方向对应读数 a 与 b 之差,即 $\beta=b-a$,则根据和差函数的中误差公式,得

$$m_\beta=\pm\sqrt{m_a^2+m_b^2}$$

现已知 DJ_2 型光学经纬仪的设计指标是野外一测回的方向中误差为 $\pm2''$,则一测回角的中误差为

$$m_{\beta\text{一测回角}}=\pm\sqrt{(2'')^2+(2'')^2}=\pm2.8''$$

则每两个测回之间角值之差的中误差为

$$m_{\beta\text{较差}}=\pm2.8''\sqrt{2}=\pm4''$$

取 2 倍中误差作为允许误差,则各测回角较差的允许误差为

$$\Delta_{\text{允}}=2\times(\pm4'')=\pm8''$$

现在讨论测回角的中误差。由于一测回角值是盘左、盘右两个半测回角值的平均值,即

$$\beta_{\text{一测回角}}=\frac{1}{2}(\beta_{\text{前半}}+\beta_{\text{后半}})$$

半测回角的中误差为 m,则

$$m_{\beta\text{一测回角}}=\pm\frac{m}{\sqrt{2}}$$

同样可得到两测回角中误差与一测回角中误差的关系为

$$m_{\text{两测回}}=\pm\frac{m_{\beta\text{一测回角}}}{\sqrt{2}}$$

可见,角度测量可通过多测回测量来提高角值的精度。

(2) 水准测量的精度。一条水准路线长为 S,由 n 个测站组成,则两点间的高差为

$$h=h_1+h_2+\cdots+h_n$$

设各测站的高差为等精度的独立观测值,各测站的中误差均为 $m_{\text{站}}$,则高差中误差 m_h 为

$$m_h=\pm\sqrt{m_{站}^2+m_{站}^2+\cdots+m_{站}^2}=\pm\sqrt{n}\,m_{站} \tag{5-25}$$

这就是说水准测量高差平均值的中误差与测站数 n 的平方根成正比。

从式(5-25)可知,在不同的水准路线上,即使两点间的路线长度相同,但是因地形起伏,测站数不同,两点间高差平均值的中误差也不同。

在较平坦地区,各测站的视线长度大概相同,每千米测站数接近,因而每千米的水准路线高差中误差可以认为是相同的,设为 $m_{1\ \mathrm{km}}$,当某两点间的水准路线长为 S 时,其高差中误差应为

$$m_h^2=m_{1\ \mathrm{km}}^2+m_{1\ \mathrm{km}}^2+\cdots+m_{1\ \mathrm{km}}^2=Sm_{1\ \mathrm{km}}^2$$

$$m_h=\pm\sqrt{S}\,m_{1\ \mathrm{km}} \tag{5-26}$$

式(5-26)说明水准路线高差的中误差与距离 S 的平方根成正比。

对于支导线的往返测量高差平均值 $\bar{h}$,有

$$\bar{h}=\frac{1}{2}(h_{往}+h_{返})$$

则水准路线往返测高差平均值的中误差 $m_{\bar{h}}$ 为

$$m_{\bar{h}}=\frac{m_h}{\sqrt{2}}=\pm\sqrt{S}\,\frac{m_{1\ \mathrm{km}}}{\sqrt{2}}$$

令 $\dfrac{m_{1\ \mathrm{km}}}{\sqrt{2}}=m_{1\ \mathrm{km}\bar{h}}$(此值称为 1 km 往返测高差平均值的中误差),则

$$m_{\bar{h}}=\pm\sqrt{S}\,m_{1\ \mathrm{km}\bar{h}} \tag{5-27}$$

在水准测量作业中,对于地势起伏大、设立测站多的山区,用式(5-25)计算高差平均值的中误差;对于地势起伏不大或平坦的地区,用式(5-26)计算高差平均值的中误差;若是往返观测,则用式(5-27)计算高差平均值的中误差。

5.5 等精度观测

在测量过程中,一个被测量的物理量(如一段距离、一个角度、两点间的高差)的真值是无法知道的,只有进行多次重复测量,才能得到最或是值。

5.5.1 算术平均值

在相同的观测条件下,对某个量进行了 n 次观测,观测值分别为 $l_1,l_2,\cdots,l_n$,设真值为 X,真误差分别为 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n$,将 $i=1,2,\cdots,n$ 分别代入式(5-1)中,并将各式两端求和可得

$$[\Delta]=[l]-nX$$

即

$$X=\frac{[l]}{n}-\frac{[\Delta]}{n}$$

由于偶然误差具有抵偿性,当 $n\to\infty$ 时,$\dfrac{[\Delta]}{n}\to 0$,则

$$X=\lim_{n\to\infty}\frac{[l]}{n} \tag{5-28}$$

当观测次数 n 无限增大时,可以用算术平均值代替真值,但在实际的测量作业中,观测次数总是有限次,可以认为算术平均值是根据观测数据所能求得的最接近真值的值。因此,

在等精度观测中，通常取多次观测值的算术平均值作为最后的结果，即

$$x=\frac{[l]}{n}\approx X \tag{5-29}$$

观测值用 l_i 表示，最或是误差用 υ_i 表示，则有

$$\upsilon_i=l_i-x \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{5-30}$$

将 $i=1,2,3,\cdots,n$ 分别代入式(5-30)，并将各式两端求和后可得

$$[\upsilon]=[l]-nx$$

所以得

$$[\upsilon]=0 \tag{5-31}$$

式(5-31)说明最或是误差总和为零，该式可以用于计算中的检校。

当观测次数为无穷大，即 $n\to\infty$ 时，最或是误差 υ_i 与真误差 Δ_i 相等，最或是值 x 与真值 X 相等。

5.5.2 观测值中误差

设对某未知量进行 n 次等精度观测，其观测值分别为 $l_1,l_2,\cdots,l_n$，则真误差 Δ_i 和最或是误差 υ_i 分别为

$$\left.\begin{aligned}\Delta_i&=l_i-X\\ \upsilon_i&=l_i-x\end{aligned}\right\}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

两式相减得

$$\Delta_i-\upsilon_i=x-X$$

令 $x-X=\delta$，得

$$\Delta_i=\upsilon_i+\delta \tag{5-32}$$

将 $i=1,2,\cdots,n$ 代入式(5-32)后将得到一组式子，各式两端取平方后再相加得

$$[\Delta\Delta]=[\upsilon\upsilon]+n\delta^2+2\delta[\upsilon] \tag{5-33}$$

又因为 $x-X=\delta$，故

$$\delta^2=(x-X)^2=\left(\frac{[l]}{n}-X\right)^2 \tag{5-34}$$

将 $X=l_i-\Delta_i(i=1,2,3,\cdots,n)$ 代入式(5-34)，经整理后得

$$\delta^2=\frac{[\Delta\Delta]}{n^2}+\frac{2(\Delta_1\Delta_2+\Delta_1\Delta_3+\cdots)}{n^2} \tag{5-35}$$

因为 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n$ 是偶然误差，故 $\Delta_1\Delta_2,\Delta_1\Delta_3,\cdots$ 也具有偶然误差的特性，即当 $n\to\infty$ 时，式(5-35)等号右边第二项趋近于零，则

$$\delta^2=\frac{[\Delta\Delta]}{n^2} \tag{5-36}$$

将式(5-36)代入式(5-33)，两端同除以 n 并考虑 $[\upsilon]=0$，经整理后得

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\upsilon\upsilon]}{n-1}} \tag{5-37}$$

式(5-37)是用最或是误差计算观测值中误差的公式，也称为白塞尔公式。

5.5.3 算术平均值的中误差

设对某量进行 n 次等精度观测，其值分别为 $l_1,l_2,\cdots,l_n$，则其算术平均值为

$$x=\frac{[l]}{n}=\frac{l_1}{n}+\frac{l_2}{n}+\frac{l_3}{n}+\cdots+\frac{l_n}{n}$$

根据误差传播定律得

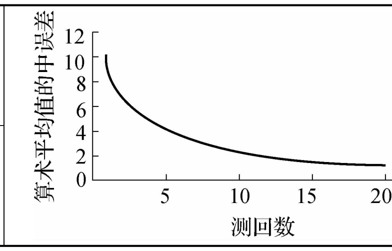
$$f_i=\frac{\partial x}{\partial l_i}=\frac{1}{n}\quad(i=1,2,3,\cdots,n)$$

因为采用等精度观测，所以可认为各观测值的中误差为 $m_1=m_2=\cdots=m_n=m$，则算术平均值的中误差为

$$M=\pm\sqrt{n\left(\frac{1}{n}\right)^2 m^2}=\pm\frac{m}{\sqrt{n}}\tag{5-38}$$

即算术平均值的中误差等于观测值中误差的 $1/\sqrt{n}$ 倍。由此可知，通过增加观测次数可以提高算术平均值的精度，但两者并非成正比关系。例如，设一测回观测中误差 $m=\pm10''$，算术平均值的中误差与测回数的关系见表 5-2。当测回数达到一定的程度（如 8 测回）时，测回数再增加，精度提高效果将不很明显。所以，对一般精度测量，要求角度观测 1～4 测回；对中等精度测量，要求角度观测 4～6 测回。因此，为提高测量成果的精度，除增加观测次数外，还应设法提高观测值本身的精度，为此应该选择更精密的仪器，提高观测技能，在良好的外界条件下进行观测。

表 5-2　算术平均值的中误差与测回数的关系

测 回 数	1	2	4	8	10	15	20	
算术平均值的中误差/(″)	10.0	7.1	5.0	3.5	3.2	2.6	2.2	

5.6　不等精度观测

5.6.1　权的概念及其与中误差的关系

1. 权的概念

不等精度观测是在不同条件下对同一量进行观测的。由于各观测值具有不同的可靠程度，即各观测值的质量不同，因此对最后测量结果的影响也不同。例如，一个角度在同样的条件下进行了两组观测，则每测回角的观测精度相同，但如果进行了两组观测，第一组观测了两个测回，其结果为 β_1，第二组观测了四个测回，其结果为 β_2，β_1 和 β_2 是不等精度观测值，如果根据 β_1 和 β_2 计算该角的最后结果，就不能简单地取其算术平均值，因为两者的观测精度不同，在求最后结果时必须考虑到各观测值的精度，取平均值时精度高的观测值所占比重应大些，而精度低的所占比重应小些。这个比重也就表示了观测值的可靠程度，它可以用一个数值来表示，这个数值称为观测值的权，常以 p 表示。权越大表示观测值越可靠，一组观测值的权可以用同一个数乘或除，而不改变其性质。

2. 权与中误差的关系

权与中误差都对应于一定的观测条件,都能表示最后结果的可靠程度,因而权与中误差有着密切的关系,用中误差的值来确定权的值是适当的。

用 p_i 表示具有中误差 m_i 的观测值的权,则权的定义为

$$p_i=\frac{c^2}{m_i^2} \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{5-39}$$

式中,c 为可选择的任意正常数,但在一组观测中为一个定数。

由式(5-39)可知,观测值的权与中误差的平方成反比。当观测值很多时,观测值的权和中误差的关系可写成

$$p_1:p_2:\cdots:p_n=\frac{1}{m_1^2}:\frac{1}{m_2^2}:\cdots:\frac{1}{m_n^2} \tag{5-40}$$

由此可见,各观测值的权是一种比例关系,当选定其中的某一个权为 1 时,即可确定相应的其他各权。若把选定的等于 1 的权称为单位权,则对应于权为 1 的观测值称为单位权观测值,对应于权为 1 的中误差称为单位权中误差,常用 μ 表示。

5.6.2 权的确定方法

1. 角度测量时权的确定方法

设每测回的观测精度相同,一测回角度中误差为 m。k 个小组对同一角度观测的测回数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$,则各小组观测值的算术平均值中误差为

$$M_i=\frac{m}{\sqrt{n_i}} \quad (i=1,2,\cdots,k)$$

设各小组观测值的权为 p_i,则得

$$\begin{aligned}p_1:p_2:\cdots:p_k&=\frac{1}{M_1^2}:\frac{1}{M_2^2}:\cdots:\frac{1}{M_k^2}\\&=\frac{1}{\left[\frac{m}{\sqrt{n_1}}\right]^2}:\frac{1}{\left[\frac{m}{\sqrt{n_2}}\right]^2}:\cdots:\frac{1}{\left[\frac{m}{\sqrt{n_k}}\right]^2}\end{aligned}$$

故

$$p_1:p_2:\cdots:p_k=n_1:n_2:\cdots:n_k \tag{5-41}$$

可见,每组角度观测结果的权与各组观测的测回数成正比。

2. 水准测量时权的确定方法

由 k 个高级水准点出发测定 Q 点的高程时,设 Q 点高程的观测值分别为 $H_1,H_2,\cdots,H_k$;k 条路线的测站数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$;若每一测站的高差精度相同,中误差为 $m_{站}$,则由误差传播定律得到各条路线的高差中误差为

$$m_i=\sqrt{n_i}\,m_{站} \quad (i=1,2,\cdots,k)$$

设各条路线高差的权为 p_i,则得

$$\begin{aligned}p_1:p_2:\cdots:p_k&=\frac{1}{m_1^2}:\frac{1}{m_2^2}:\cdots:\frac{1}{m_k^2}\\&=\frac{1}{(\sqrt{n_1}\,m_{站})^2}:\frac{1}{(\sqrt{n_2}\,m_{站})^2}:\cdots:\frac{1}{(\sqrt{n_k}\,m_{站})^2}\end{aligned}$$

故

$$p_1 : p_2 : \cdots : p_k = \frac{1}{n_1} : \frac{1}{n_2} : \cdots : \frac{1}{n_k} \tag{5-42}$$

由此可见,各条水准路线高差的权与其测站数成反比。同理可以推导出类似的结论:各条路线高差的权与其路线长度成反比。

设水准路线的长度为 $S_i(i=1,2,\cdots,k)$,则有

$$p_1 : p_2 : \cdots : p_k = \frac{1}{S_1} : \frac{1}{S_2} : \cdots : \frac{1}{S_k} \tag{5-43}$$

3.距离丈量时权的确定方法

丈量距离时,用每千米边长中误差为 $m_{1\,\mathrm{km}}$ 的精度丈量 k 条边长,每条边的边长为 D_i $(i=1,2,\cdots,k)$,则由误差传播定律可推导出每条边丈量结果的中误差为

$$m_i = \sqrt{D_i}\, m_{1\,\mathrm{km}}$$

设每条边的权为 p_i,得

$$p_1 : p_2 : \cdots : p_k = \frac{1}{D_1} : \frac{1}{D_2} : \cdots : \frac{1}{D_k} \tag{5-44}$$

由此可见,每条边丈量结果的权与边长成反比。

5.6.3 加权平均值及其中误差

1.加权平均值

对某量进行 k 组观测,各组中每个观测值的精度相同,其中误差为 m。若每组有 n_i 个观测值,则每个观测值为 $l_j^{(i)}(i=1,2,\cdots,k;j=1,2,\cdots,n_i)$,每组观测值的算术平均值 L_i 为

$$L_1 = \frac{l_1^{(1)} + l_2^{(1)} + \cdots l_{n1}^{(1)}}{n_1} \text{或} \ l_1^{(1)} + l_2^{(1)} + \cdots l_{n1}^{(1)} = n_1 L_1$$

$$L_2 = \frac{l_1^{(2)} + l_2^{(2)} + \cdots l_{n2}^{(2)}}{n_2} \text{或} \ l_1^{(2)} + l_2^{(2)} + \cdots l_{n2}^{(2)} = n_2 L_2$$

$$\cdots$$

$$L_k = \frac{l_1^{(k)} + l_2^{(k)} + \cdots l_{nk}^{(k)}}{n_k} \text{或} \ l_1^{(k)} + l_2^{(k)} + \cdots l_{nk}^{(k)} = n_k L_k$$

若把 k 组的所有等精度观测值统一到一个观测列中,则该观测列的算术平均值 x 为

$$\begin{aligned} x &= \frac{l_1^{(1)} + l_2^{(1)} + \cdots + l_{n1}^{(1)} + l_1^{(2)} + l_2^{(2)} + \cdots + l_{n2}^{(2)} + \cdots + l_1^{(k)} + l_2^{(k)} + \cdots + l_{nk}^{(k)}}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} \\ &= \frac{n_1 L_1 + n_2 L_2 + \cdots + n_k L_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} \end{aligned} \tag{5-45}$$

在 k 组观测中,令各组中每一个观测值的权为1,则每组观测结果的权等于观测次数,即 $p_i = n_i$,将其代入式(5-45),得到不同精度的几组观测结果的加权平均值为

$$x = \frac{p_1 L_1 + p_2 L_2 + \cdots + p_k L_k}{p_1 + p_2 + \cdots + p_k} \tag{5-46}$$

或写为

$$x = \frac{[pL]}{[p]} = \frac{p_1 L_1}{[p]} + \frac{p_2 L_2}{[p]} + \cdots + \frac{p_k L_k}{[p]}$$

2.加权平均值的中误差

设 k 组各自观测结果 L_i 的中误差为 m_i,加权平均值的中误差为 M。根据误差传播定

律，并考虑 $m_i^2=\mu^2/p_i$，可得加权平均值的中误差 M 为

$$M=\pm\frac{\mu}{\sqrt{[p]}} \tag{5-47}$$

由式(5-47)可知，加权平均值的中误差等于单位权中误差除以观测值权的总和的平方根。加权平均值的权为观测值的权的总和。

5.6.4 单位权观测值的中误差

1. 用观测值的真误差计算单位权观测值的中误差

设有一组不等精度观测值 $L_i(i=1,2,\cdots,n)$，其各自的权为 p_i，对应的中误差为 m_i。L_i 乘以 $\sqrt{p_i}$ 可得到一组虚拟的观测值，即

$$L_i'=\sqrt{p_i}\,L_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{5-48}$$

对其求偏导数得

$$f_{L_i}=\frac{\partial L_i'}{\partial L_i}=\sqrt{p_i}$$

虚拟观测值的中误差可以写成

$$m_{L_i'}^2=(\sqrt{p_i})^2 m_i^2 \tag{5-49}$$

令 L_i' 的权为 p_i'，由权的定义公式可得

$$m_{L_i'}^2=\frac{\mu^2}{p_i'}$$

$$m_i^2=\frac{\mu^2}{p_i}$$

将两者代入式(5-49)并整理后得 $p_i'=1$。由此可见，任何一个观测值乘以其权的平方根所得虚拟观测值的权都为 1，所以 L_i' 的权即为单位权。

将式(5-48)两端权微分得

$$\mathrm{d}L_i'=\sqrt{p_i}\,\mathrm{d}L_i \tag{5-50}$$

再以真误差近似代替式(5-50)中对应的微分量，即可得到虚拟观测值的真误差，即

$$\Delta_i'=\sqrt{p_i}\Delta_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

式中，Δ_i' 是权为 1 的等精度观测值的真误差；Δ_i 为不同精度观测值 L_i 的真误差。

则单位权的中误差 μ 为

$$\mu=m_{p=1}=\pm\sqrt{\frac{(\sqrt{p_1}\Delta_1)^2+(\sqrt{p_2}\Delta_2)^2+\cdots+(\sqrt{p_n}\Delta_n)^2}{n}}$$

即

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[p\Delta\Delta]}{n}} \tag{5-51}$$

式(5-51)即为用观测值真误差计算单位权观测值中误差的公式。

2. 用观测值的最或是误差计算单位权观测值的中误差

在多数情况下无法确切知道真误差值，因而要采用观测值的最或是误差 v 计算单位权的中误差。将式(5-32)的两端平方并乘以 p_i，并将 $i=1,2,\cdots,n$ 代入后再求和得

$$[p\Delta\Delta]=[p]\delta^2+2\delta[pv]+[pvv] \tag{5-52}$$

将 $v_i=l_i-x$ 两端乘以 p_i，并分别将 $i=1,2,\cdots,n$ 代入，左右两端求和，并考虑 $x=\frac{[pl]}{[p]}$，整理后得

$$[pv]=[pl]-[p]\frac{[pl]}{[p]}=0 \tag{5-53}$$

即观测值的最或是误差与其权的乘积的总和为零，式(5-53)可用于计算校核。

当观测次数趋近于无穷大时，δ^2 可用加权平均值中误差的平方来代替，即

$$\delta^2=M^2 \tag{5-54}$$

将式(5-53)和式(5-54)代入式(5-52)，考虑式(5-47)并除以 n，经整理后得

$$\frac{[p\Delta\Delta]}{n}=\frac{\mu^2}{n}+\frac{[pvv]}{n} \tag{5-55}$$

将 $\mu^2=\frac{[p\Delta\Delta]}{n}$ 代入式(5-55)的左端，经整理后得到用最或是误差计算单位权观测值的中误差公式为

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} \tag{5-56}$$

5.7 水准网多边形平差法

水准网多边形平差法是逐渐趋近法的一种。水准网多边形平差法的步骤如下：

(1) 绘制水准网略图。在图上各相应路线上注明各路线的长度，常以 km 为单位，用箭头表示观测方向，然后对各路线(环)进行编号。环的编号方法一般是以闭合差最大者为第Ⅰ环，其他环只要按一定的规律(如顺时针或逆时针)依次编号即可，如图 5-4 所示。

(2) 按一定的旋转方向(如顺时针或逆时针)计算出每个闭合环的闭合差，如第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ环的闭合差分别为 ω_{I}、ω_{II}、ω_{III}，将其标注在各自环中的双线长方形框内，在环号的顶上用箭头表示路线的转向。

(3) 在各环边(路线)的外侧画一个单线长方形框；在框内注明环号和线路，如Ⅲ-5 表示此框属于第Ⅲ环的第五条线路；在每框顶上写出边长的比值 S_i/N_j(其中，N_j 为此环的路线总长度，S_i 为该条线路的长度)。

(4) 由第Ⅰ环(闭合差最大的那一环)开始，将闭合差 ω_{I} 按与环内每条线路的长度成正比、以相同的符号分配到每条线路上，即用框顶上的数字乘以闭合差，将这些数字填写在各路线外侧的单线长方形框内，如第Ⅰ环中，填写在图 5-4 的(Ⅰ-1)、(Ⅰ-2)和(Ⅰ-6)单线长方形框内。

(5) 在第Ⅱ环中，分配于公共路线 S_2 的闭合差加上它原来的闭合差 ω_{II} 就得到第Ⅱ环的新闭合差 ω'_{II}，将其填写在 ω_{II} 的下面，并按上述(3) 的方法分配在第Ⅱ环的(Ⅱ-2)、(Ⅱ-3)和(Ⅱ-4)三个单线框内。

(6) 在第Ⅲ环中，将第Ⅰ环和第Ⅱ环分配来的闭合差及(Ⅰ-6)和(Ⅱ-4)框内的第一个数值加上第Ⅲ环原来的闭合差 ω_{III}，就得到第Ⅲ环的新闭合差 ω'_{III}，将其填写在 ω_{III} 的下面，并按上述(4)的方法分配并填写在(Ⅲ-4)、(Ⅲ-5)和(Ⅲ-6)三个单线框内。

(7) 回到第Ⅰ环，由于原来的闭合差 ω_{I} 已经被分配完了，所以只要将(Ⅱ-2)和(Ⅲ-6)两框内分配来的闭合差相加就可得到第Ⅰ环的新闭合差 ω'_{I}，填写在 ω_{I} 的下面。

(8) 将 ω'_{I} 按上述(4)的方法进行分配，填写在路线外侧的三个单线框内。

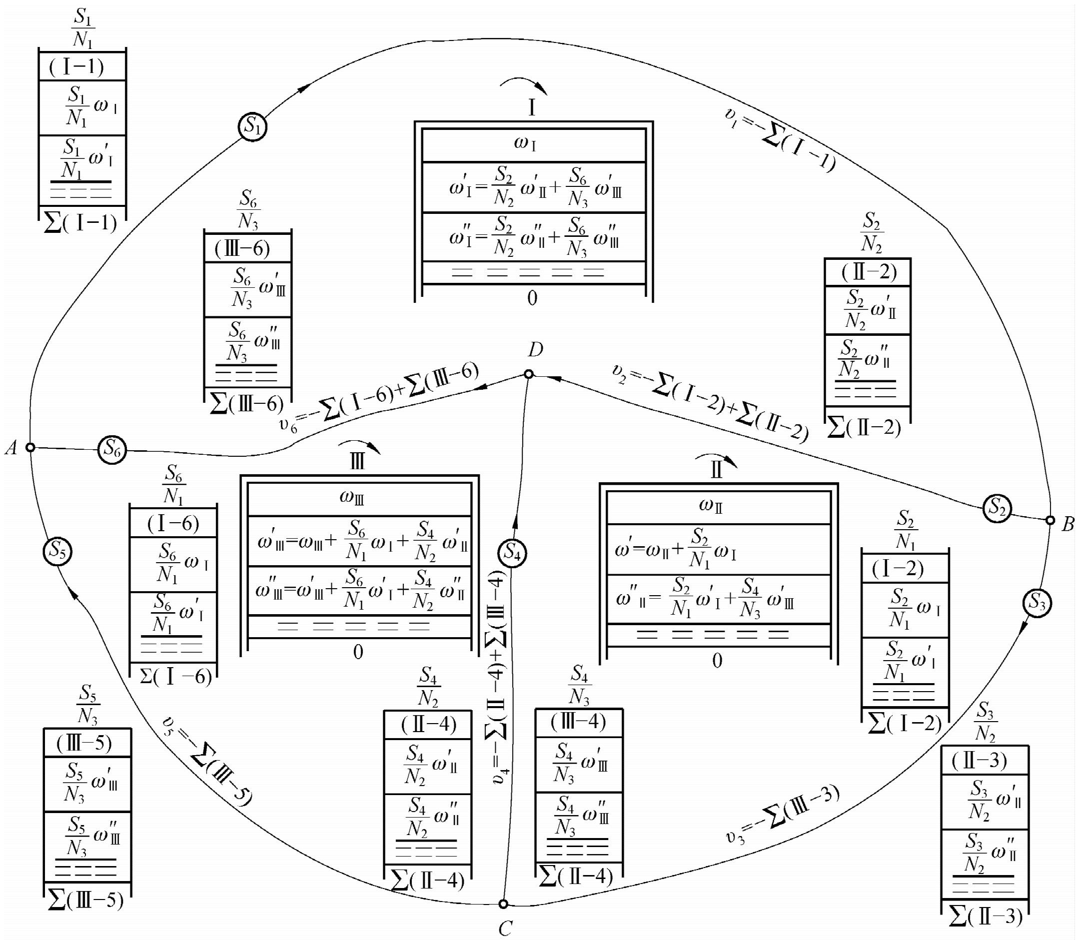


图 5-4 水准网多边形平差法原理图

(9) 用同样的方法继续组成各环的新闭合差，并进行分配，直到各环的新闭合差均为 0 为止。

(10) 将各单线框内的值求和，填写在方框的下面，即以 $\sum$ 表示。

(11) 对各路线的改正数 υ 进行计算与检验，各路线的改正数应按式(5-57)进行计算。

$$\left.\begin{aligned}
\upsilon_1&=-\left(\frac{S_1}{N_1}\omega_{\mathrm{I}}+\frac{S_1}{N_1}\omega'_{\mathrm{I}}+\cdots\right)\\
\upsilon_2&=-\left(\frac{S_2}{N_1}\omega_{\mathrm{I}}+\frac{S_2}{N_1}\omega'_{\mathrm{I}}+\cdots\right)+\left(\frac{S_2}{N_2}\omega'_{\mathrm{II}}+\frac{S_2}{N_2}\omega''_{\mathrm{II}}+\cdots\right)\\
\upsilon_3&=-\left(\frac{S_3}{N_2}\omega'_{\mathrm{II}}+\frac{S_3}{N_2}\omega''_{\mathrm{II}}+\cdots\right)\\
\upsilon_4&=-\left(\frac{S_4}{N_2}\omega'_{\mathrm{II}}+\frac{S_4}{N_2}\omega''_{\mathrm{II}}+\cdots\right)+\left(\frac{S_4}{N_3}\omega'_{\mathrm{III}}+\frac{S_4}{N_3}\omega''_{\mathrm{III}}+\cdots\right)\\
\upsilon_5&=-\left(\frac{S_5}{N_3}\omega'_{\mathrm{III}}+\frac{S_5}{N_3}\omega''_{\mathrm{III}}+\cdots\right)\\
\upsilon_6&=-\left(\frac{S_6}{N_1}\omega_{\mathrm{I}}+\frac{S_6}{N_1}\omega'_{\mathrm{I}}+\cdots\right)+\left(\frac{S_6}{N_3}\omega'_{\mathrm{III}}+\frac{S_6}{N_3}\omega''_{\mathrm{III}}+\cdots\right)
\end{aligned}\right\}\tag{5-57}$$

由式(5-57)可知，观测值改正数 υ 与各环路线闭合差 ω 有如下关系：

① 对于单独的路线(如 S_1、S_3、S_5),v 只与该环的闭合差有关,即改正数等于逐次分配到的该路线的闭合差之和,然后再反号。

② 对于公共的路线(如 S_2、S_4、S_6),v 由两部分组成,一部分是逐次分配到该路线所在的一个环的闭合差,另一部分则是逐次分配到该路线所在的另一环的闭合差。至于分配值是取同号还是反号,要看该路线箭头与环的箭头指向相同还是相反,指向相同时取反号,指向相反时则取同号。

改正数 v 的计算与检核可按每个环的转向将每条路线的改正数相加,并与闭合差进行比较以做检核,即每环改正数之和与闭合差相等且符号相反。

采用多边形平差法计算水准网举例如下:

如图 5-5 所示,已知点 A 的高程 $H_A=43.714$ m,水准网的观测数据见表 5-3,多边形平差法计算结果见表 5-4。

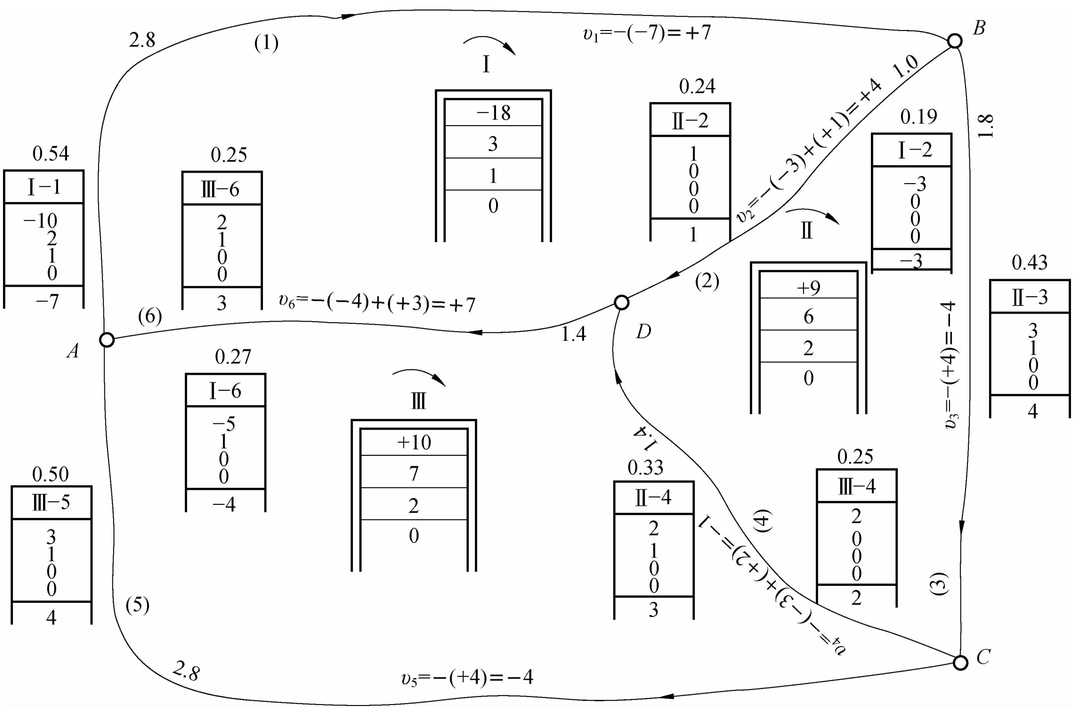


图 5-5 多边形平差实例图

表 5-3 水准网的观测数据

路线编号	起终点号	观测高差/m	路线长度/km
1	$A\sim B$	+1.431	2.8
2	$B\sim D$	+3.438	1.0
3	$B\sim C$	+3.402	1.8
4	$C\sim D$	+0.045	1.4

续表

路线编号	起终点号	观测高差/m	路线长度/km
5	$C\sim A$	-4.832	2.8
6	$D\sim A$	-4.887	1.4

表 5-4　多边形平差法计算结果

路线编号	起终点号	观测高差/m	改正数/m	平差后高差/m	最或是高程/m
1	$A\sim B$	$+1.431$	$+0.007$	$+1.438$	$H_A=43.714$(已知) $A\to B\to C\to D\to A$ $H_B=45.152$ $H_C=48.550$ $H_D=48.594$ $H_A=43.714$
2	$B\sim D$	$+3.438$	$+0.004$	$+3.442$	
3	$B\sim C$	$+3.402$	-0.004	$+3.398$	
4	$C\sim D$	$+0.045$	-0.001	$+0.044$	
5	$C\sim A$	-4.832	-0.004	-4.836	
6	$D\sim A$	-4.887	$+0.007$	-4.880	

5.8　最小二乘法原理

设对某量进行 n 次不等精度观测(n 为有限次),其观测值分别为 $l_1,l_2,\cdots,l_n$,其算术平均值为 x;各观测值的中误差为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$,则最或是误差为 $\upsilon_i=l_i-x(i=1,2,\cdots,n)$。

在图 5-1 所示的直方图中,每一区间上长方形的面积代表该区间内误差出现的概率,则最或是误差的概率为

$$\left.\begin{aligned}P(\upsilon_1)&=\frac{1}{m_1\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\upsilon_1^2}{2m_1^2}}\mathrm{d}\upsilon_1\\P(\upsilon_2)&=\frac{1}{m_2\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\upsilon_2^2}{2m_2^2}}\mathrm{d}\upsilon_2\\&\cdots\\P(\upsilon_n)&=\frac{1}{m_n\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\upsilon_n^2}{2m_n^2}}\mathrm{d}\upsilon_n\end{aligned}\right\}\tag{5-58}$$

由于各次观测是独立事件,所以 $\upsilon_i(i=1,2,\cdots,n)$ 在一组观测中同时出现的概率为各区间概率的乘积,即

$$P=P(\upsilon_1)P(\upsilon_2)\cdots P(\upsilon_n)$$

也可以写成

$$P=\left(\frac{1}{m_1\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\upsilon_1^2}{2m_1^2}}\right)\left(\frac{1}{m_2\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\upsilon_2^2}{2m_2^2}}\right)\cdots\left(\frac{1}{m_n\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\upsilon_n^2}{2m_n^2}}\right)(\mathrm{d}\upsilon_1\cdot\mathrm{d}\upsilon_2\cdot\cdots\cdot\mathrm{d}\upsilon_n)$$

或

$$P=\frac{1}{m_1\cdot m_2\cdot\cdots\cdot m_n(\sqrt{2\pi})^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon_1^2}{m_1^2}+\frac{\upsilon_2^2}{m_2^2}+\cdots+\frac{\upsilon_n^2}{m_n^2}\right)}(\mathrm{d}\upsilon_1\cdot\mathrm{d}\upsilon_2\cdot\cdots\cdot\mathrm{d}\upsilon_n)\tag{5-59}$$

在这一组观测值中,最可靠值应该是当 P 值最大时所求出的。

从式(5-59)可知，要想通过最或是误差 υ 求得最大 P 值，必须满足以下条件：

$$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon_1^2}{m_1^2}+\frac{\upsilon_2^2}{m_2^2}+\cdots+\frac{\upsilon_n^2}{m_n^2}\right)}=\text{最大值}$$

即

$$\frac{\upsilon_1^2}{m_1^2}+\frac{\upsilon_2^2}{m_2^2}+\cdots+\frac{\upsilon_n^2}{m_n^2}=\text{最小值} \tag{5-60}$$

从权的定义中可知，p_i 与 m_i^2 成反比，即 $p_i=\frac{1}{m_i^2}$，所以式(5-60)可写成

$$p\upsilon_1^2+p\upsilon_2^2+\cdots+p\upsilon_n^2=\text{最小值}$$

即

$$[p\upsilon\upsilon]=\text{最小值} \tag{5-61}$$

在等精度观测中，$p_1=p_2=\cdots=p_n=1$，故有

$$\upsilon_1^2+\upsilon_2^2+\cdots+\upsilon_n^2=\text{最小值}$$

也可写成

$$[\upsilon\upsilon]=\text{最小值} \tag{5-62}$$

最或是误差的平方和等于最小值的原理称为最小二乘法原理。

在测量计算中，除了用算术平均值求得最或是值外，还可应用最小二乘法原理求出观测值的最或是改正数(简称改正数)，再求得最或是值。

由 $x=l_i-\upsilon_i(i=1,2,\cdots,n)$ 可得

$$x=l_i+(-\upsilon_i)\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$(-\upsilon_i)$ 即为最或是改正数，在推导式(5-60)时用 υ_i 表示。由于 $(-\upsilon_i)$ 与 υ_i 的绝对值相等而符号相反，因此用 $(-\upsilon_i)$ 也能推导出式(5-60)。

例如，测得一个三角形的内角值分别为 $a=63°30'10''$、$b=57°15'14''$、$c=59°14'15''$，试通过分别对三角形各个内角观测值添加改正数消除闭合差，以求得各个角的最或是值。

三角形闭合差 $f=a+b+c-180°=-21''$，设各观测值的改正数为 υ_a、υ_b、υ_c，则

$$(a+\upsilon_a)+(b+\upsilon_b)+(c+\upsilon_c)-180°=0$$

$$\upsilon_a+\upsilon_b+\upsilon_c=+21'' \tag{5-63}$$

满足式(5-63)的改正数有很多个，但根据最小二乘法原理，选择 $[p\upsilon\upsilon]$(在等精度观测中选择 $[\upsilon\upsilon]$)为最小的一组改正数分别改正三角形内角的观测值才能得到各内角的最或是值，消除闭合差，使三角形三个内角最或是值之和为180°。但是求改正数时，在实际工作中不可能列出很多组改正数来比较试求，而是通过数学关系式求条件极值来计算符合 $[p\upsilon\upsilon]$ 为最小的一组改正数。

在该例中，因采用等精度观测，故有

$$\upsilon_a+\upsilon_b+\upsilon_c+f=0$$

其中，$f=-21''$，按照最小二乘法原理，$[\upsilon\upsilon]$ 为最小，对 $\upsilon_a+\upsilon_b+\upsilon_c+f=0$ 引入拉格朗日系数 $-2K$，则

$$Q=[\upsilon\upsilon]-2K(\upsilon_a+\upsilon_b+\upsilon_c+f)=\text{最小值}$$

展开即得

$$Q=\upsilon_a^2+\upsilon_b^2+\upsilon_c^2-2K\upsilon_a-2K\upsilon_b-2K\upsilon_c-2Kf=\text{最小值}$$

求一阶导数并令其为零,得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial v_a}=2v_a-2K=0\\\frac{\partial Q}{\partial v_b}=2v_b-2K=0\\\frac{\partial Q}{\partial v_c}=2v_c-2K=0\end{aligned}\right\}\tag{5-64}$$

由式(5-64)可得

$$K=v_a=v_b=v_c$$

即可得

$$3K+f=0$$

$$K=-\frac{f}{3}$$

因为 $f=-21''$,所以有

$$K=v_a=v_b=v_c=-\frac{f}{3}=-\frac{-21''}{3}=+7''$$

则三个内角的最或是值分别为

$$a+v_a=63°30'10''+7''=63°30'17''$$

$$b+v_b=57°15'14''+7''=57°15'21''$$

$$c+v_c=59°14'15''+7''=59°14'22''$$

根据最小二乘法原理也可以推导出最或是值就是算术平均值。设一组等精度观测值分别为 $l_1, l_2, \cdots, l_n$,其相应的最或是误差为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$,最或是值为 x,已知 $v_i=l_i-x$ $(i=1,2,\cdots,n)$,将 $i=1,2,\cdots,n$ 分别代入,两端各自平方并求和得

$$[vv]=(l_1-x)^2+(l_2-x)^2+\cdots+(l_n-x)^2=\text{最小值}$$

对其求一阶导数并令其为零,得

$$\frac{\mathrm{d}[vv]}{\mathrm{d}x}=0$$

则

$$-2(l_1-x)-2(l_2-x)-\cdots-2(l_n-x)=0$$

$$2nx=2[l]$$

所以

$$x=\frac{[l]}{n}$$

在不等精度观测中同理可得

$$x=\frac{[pl]}{[p]}$$

思考练习题

1.什么是测量误差？产生测量误差的原因是什么？测量平差的目的和任务是什么？

2.什么是系统误差？什么是偶然误差？它们各有什么特性？

3.写出用真误差和最或是误差求中误差的公式，并指出式中各符号的含义。为什么常用中误差衡量观测值的精度？

4.什么是允许误差？为什么规定允许误差为中误差的2倍或3倍？

5.什么是相对误差？它适用于哪种观测值的精度评定？

6.分析判断表5-5所列误差的性质，并说明消除或削弱其影响的方法。

表5-5　题6用表

测量项目	误差的名称	误差的性质	消除或削弱误差影响的方法
钢尺量距	定线不直		
	尺长不精确		
	地面倾斜		
	尺子弯曲		
	温度变化		
	拉力不匀		
	估读误差		
水准测量	LL 不平行于 CC		
	符合气泡未严格居中		
	前后视线长度不等		
	存在视差		
	仪器下沉		
	尺垫下沉		
	水准尺弯曲		
水平角测量	仪器未严格整平		
	对中误差		
	目标偏心		
	读数误差		
	CC 不严格垂直于 HH		
	LL 不严格垂直于 VV		

7.什么是误差传播定律？使用其公式时有哪几个步骤？

8.距离丈量四次，丈量值分别为176.415 m、176.423 m、176.436 m和176.428 m，试求其丈量中误差、算术平均值及其中误差、最后结果的相对中误差。

9. 对一条闭合水准路线共观测四次，各次的高差闭合差分别为＋28 mm、－19 mm、－25 mm 和＋16 mm，求该水准路线的高差中误差。

10. 对三角形的内角进行观测，甲组观测三次，求得三角形闭合差分别为－6″、－5″和＋11″；乙组观测五次，求得三角形闭合差分别为－6″、－5″、＋3″、－3″和＋11″。则：

(1) 甲、乙两组观测值的中误差 $m_{甲}$、$m_{乙}$ 各为多少？哪一组的观测精度较高？

(2) 两组综合结果的中误差为多少？

11. 观测三角形的两个内角，其中误差分别为±5″和±10″，求第三角的中误差。

12. 观测 n 边形的内角，每个内角的中误差为±18″，求 n 边形内角和的中误差。

13. 对一个角观测 n 测回，每测回的测角中误差为±12″，求 n 测回平均值的中误差。

14. 圆的半径 R＝27.500 m，测量半径的中误差 m_R＝±1 cm，试求圆半径的丈量相对中误差、圆周长的中误差及圆面积的中误差。

15. 某建筑物的基础为矩形，其尺寸为 $a\times b$＝25 m × 60 m，两边丈量相对中误差为 $K_a=K_b=\frac{1}{3\,000}$，试求 a 边及 b 边丈量中误差、矩形面积的中误差。

16. 已知四边形各内角的测角中误差为 m＝±15″，试求四边形内角和的中误差；若取 2 倍中误差作为允许误差，则四边形内角和的允许误差为多少？

17. 在三角形 ABC 中，观测了∠C、∠B 和边长 c，其观测值及中误差为∠C＝99°32′30″±24″、∠B＝34°55′24″±15″、c＝(103.786 ±0.039)m，求边长 b 及其中误差 m_b。

18. 什么是不等精度观测？什么是权？什么是单位权？什么是单位权中误差？

19. 图 5-6 所示为多边形水准网。已知水准点 P_1 的高程为 143.714 m，观测数据见表 5-6，试用多边形平差法计算该水准网中 P_2、P_3、P_4 点的高程。

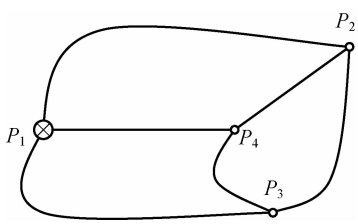


图 5-6　题 19 用图

表 5-6　题 19 用表

路线编号	起终点号	观测高差/m	路线长度/km
1	$P_1\sim P_2$	＋1.124	6.1
2	$P_2\sim P_4$	－2.369	2.0
3	$P_2\sim P_3$	－3.963	3.9
4	$P_3\sim P_4$	＋1.567	3.1
5	$P_3\sim P_1$	＋2.855	5.9
6	$P_4\sim P_1$	＋1.279	3.0