

# 第 5 章

## 弯曲应力

### 5.1 弯曲应力概述

在上一章讨论梁内力计算的基础上,我们可以确定其危险截面。但要解决梁的强度计算问题,还需确定危险截面上危险点的位置。因此,本章将进一步研究梁横截面上内力的分布情况,即横截面上各点应力的分布规律,并推导出应力计算公式,从而解决梁的强度计算问题。

一般情况下,梁受外力而弯曲时,梁的横截面上同时存在弯矩和剪力两种内力。因此,在梁的横截面上,将同时存在正应力和切应力,如图 5-1(a)所示。由上一章讨论可知,梁的弯矩和剪力是横截面上分布内力系的合力和合力偶矩,即弯矩  $M$  是由分布于横截面上的法向内力元素  $\sigma dA$  组成的,而剪力  $F_s$  则只能由切向内力元素  $\tau dA$  组成,如图 5-1(b)所示。因此正应力  $\sigma$  只与弯矩  $M$  有关,而切应力  $\tau$  只与剪力  $F_s$  有关。

如图 5-2(a)所示,简支梁上作用有对称于梁中点的集中力  $F$ ,梁的剪力图和弯矩图分别如图 5-2(b)、图 5-2(c)所示。在图 5-2(a)中,简支梁靠近两端支座的  $AC$ 、 $DB$  两段,其截面上同时存在弯矩和剪力,在弯矩  $M$  作用下发生弯曲变形,在剪力  $F_s$  的作用下发生剪切变形,故这种形式的弯曲称为**横力弯曲**。图 5-2(a)所示梁的中间  $CD$  段,其截面上只有弯矩而没有剪力,这种形式的弯曲称为**纯弯曲**。

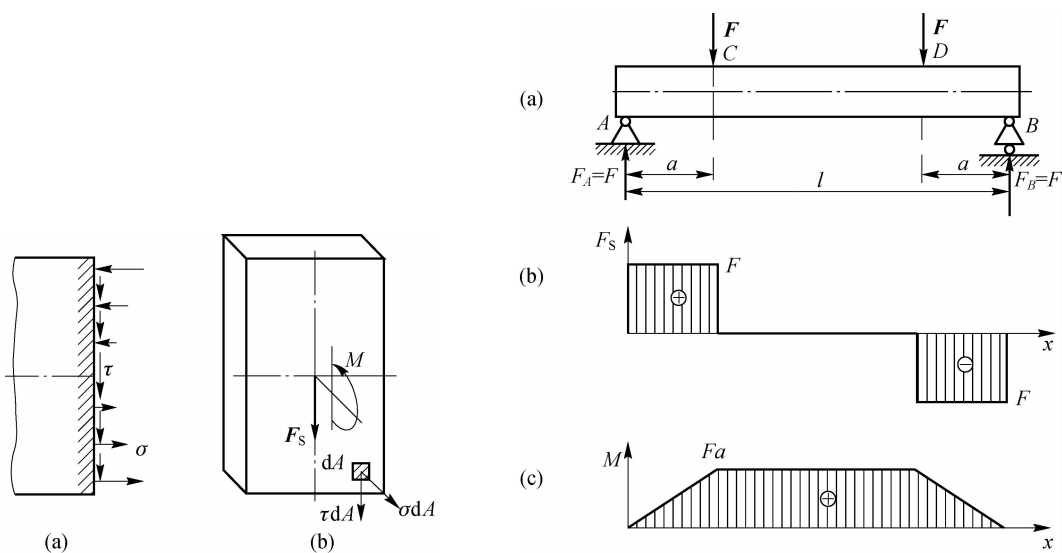


图 5-1

图 5-2

本章首先研究平面弯曲时梁横截面上的正应力。为了简便起见,先研究梁在纯弯曲时横截面上正应力 $\sigma$ 的分布规律。

## 5.2 纯弯曲时梁横截面上的正应力

设在梁的纵向对称面内作用有大小相等、方向相反的弯矩,梁发生纯弯曲变形。这时梁的横截面上只有弯矩,因而正应力只与弯矩相关。由于正应力在截面上的分布状况尚不清楚,与研究圆轴扭转时的切应力相似,因此,研究梁纯弯曲时横截面上的正应力也是一个超静定问题,仍需综合考虑几何、物理和静力平衡三个方面的因素。

### 5.2.1 试验观察及假设

分析纯弯曲时梁的变形规律应从试验开始。纯弯曲的受力状态易于在材料试验机上实现,并用以观察变形规律。

取一段矩形截面纯弯曲梁进行研究。加载前,在梁表面画上纵、横直线,如图 5-3 所示。梁受弯变形后,可观察到如下现象:

(1) 横向直线变形后仍为直线,只是各横向线间做相对转动,但仍与变形后的纵向线正交。

(2) 纵向直线都变为弧线,位于中间位置的纵向线长度不变,靠底面的纵向线伸长了,靠顶面的纵向线却缩短了。

根据上述现象,可做出如下假设:

(1) 平面假设:梁变形后的横截面仍保持为平面,且与变形后的梁轴线正交。

(2) 纵向纤维无挤压假设:纵向纤维的变形只是简单拉伸或压缩变形,相互之间无挤压。

根据这两个假设得出的理论结果得到了工程实践的检验。且在纯弯曲情况下,与弹性力学的结果也是一致的。

根据平面假设,纯弯曲梁段变形后各横截面仍与各纵向线正交,即梁的纵向、横向截面上无切应变,故也无切应力。梁弯曲后,存在纵向纤维的伸长区和缩短区,由于变形的连续性,从伸长区到缩短区,中间必有一层纤维既不伸长也不缩短,这层纤维称为**中性层**。中性层与横截面的交线称为**中性轴**,如图 5-4(a)所示。

总之,梁在纯弯曲时各横截面仍保持为平面并绕中性轴做相对转动,各纵向纤维处于单向拉(压)状态。

### 5.2.2 变形几何关系

在图 5-3 所示的梁上取出两个横截面  $m-m$  和  $n-n$  之间的微梁段,设其弯曲前长度为  $dx$ ,弯曲后的状态如图 5-4(a)所示。以截面对称轴为  $y$  轴,以中性轴为  $z$  轴。

现在先求距中性轴高度为  $y$  处的纵向线应变。

如图 5-4(b)所示设该微梁段中性层纤维弯曲后的曲率半径为  $\rho$ ,微梁段两端截面相对转角为  $d\theta$ ,则纵向纤维弯曲后的长度为

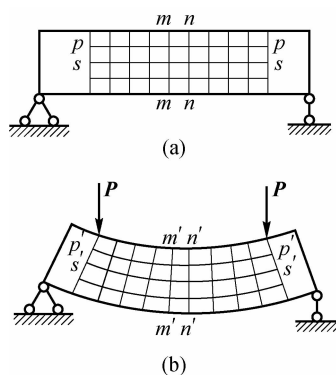


图 5-3

$$\widehat{b'b'} = (\rho + y) d\theta$$

变形前的长度为  $dx$ , 由于中性层上的纤维  $O'O'$  弯曲变形前后无变化, 因此

$$dx = \widehat{O'O'} = \rho d\theta$$

$$\epsilon = \frac{\widehat{b'b'} - dx}{dx} = \frac{(\rho + y) d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho} \quad (5-1)$$

由式(5-1)可知, 对给定的横截面,  $\rho$  为常数, 纵向纤维的纵向线应变  $\epsilon$  与该点到中性层的距离  $y$  成正比。

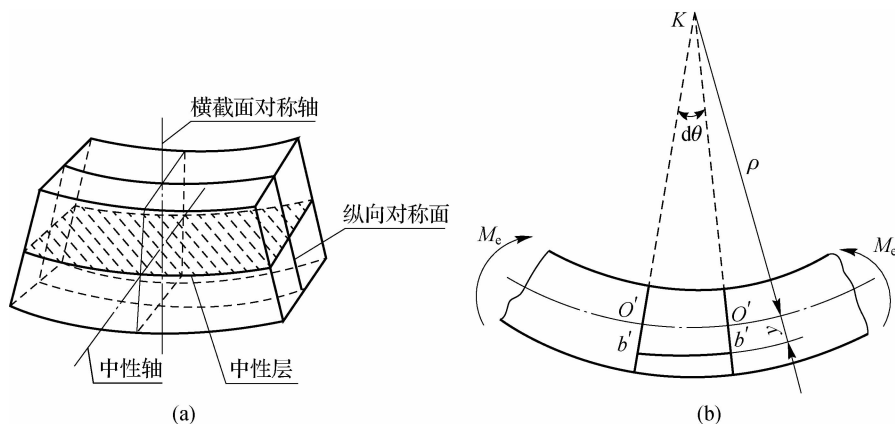


图 5-4

### 5.2.3 物理关系

因纵向纤维之间不存在相互挤压, 每一纤维都是单向拉伸或单向压缩, 故当应力不超过比例极限时, 由胡克定律知

$$\sigma = E\epsilon \quad (5-2)$$

将式(5-1)代入式(5-2), 得

$$\sigma = E \frac{y}{\rho} \quad (5-3)$$

式(5-3)说明, 任意纵向纤维的正应力  $\sigma$  与它到中性层的距离成正比。以横截面的纵向对称轴为  $y$  轴, 中性轴为  $z$  轴。在横截面上, 任意点处的正应力与该点至中性轴的距离成正比, 即横截面上的正应力沿截面高度按线性规律变化, 如图 5-5 所示。在中性轴上各点的正应力等于零, 在中性轴的上下两侧, 一侧受拉, 另一侧受压。

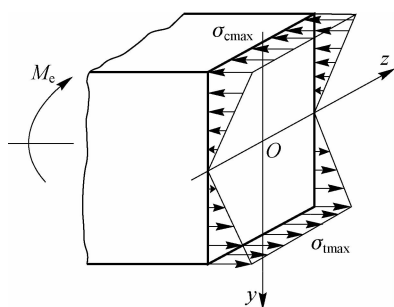


图 5-5

由于中性轴  $z$  的位置和中性层的曲率半径  $\rho$  均未确定, 因此式(5-3)不能用于正应力计算。显然, 中性层的曲率与弯矩  $M$  的大小有关, 其关系可通过静力学关系确定。

## 5.2.4 静力平衡关系

横截面上的微内力系  $\sigma dA$  组成了一个与横截面垂直的空间平行力系,如图 5-6 所示。它可合成三个内力,即平行于  $x$  轴的轴力  $F_N$ ,对  $y$  轴和  $z$  轴的力偶矩  $M_y$  和  $M_z$ 。由于此时梁横截面上的内力仅有一个位于  $xOy$  平面内的弯矩  $M$ ,即仅有力偶矩  $M_z$ ,而轴力  $F_N$  和力偶矩  $M_y$  皆为零。因此,横截面上的应力应满足下列三个静力学关系:

$$F_N = \int_A \sigma dA = 0 \quad (5-4)$$

$$M_y = \int_A z\sigma dA = 0 \quad (5-5)$$

$$M_z = \int_A y\sigma dA = M \quad (5-6)$$

下面讨论由此三式而得出的结论。

(1)将式(5-3)代入式(5-4)得

$$\int_A E \frac{y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0$$

式中,  $\int_A y dA = S_z = y_c A$  为横截面对中性轴  $z$  的静矩(一次矩),也称为面积矩。

由于  $E/\rho \neq 0$ ,故  $S_z = 0$  或  $y_c = 0$ ,这表明中性轴  $z$  必然通过横截面的形心,这样便确定了中性轴的位置。

(2)将式(5-3)代入式(5-5)得

$$\int_A z \left( E \frac{y}{\rho} \right) dA = \frac{E}{\rho} \int_A yz dA = 0$$

式中,积分  $\int_A yz dA$  称为横截面对  $y, z$  轴的惯性积  $I_{yz}$ 。只要截面图形对称于  $y, z$  中的任一轴,惯性积  $I_{yz}$  的值必为零,如图 5-7 所示。由于前面已设定横截面的对称轴为  $y$  轴,故式(5-5)自然成立。

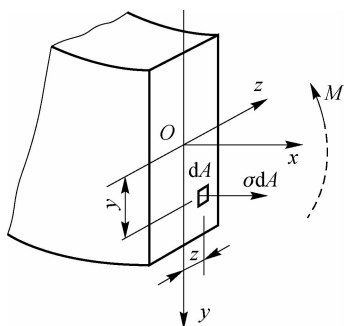


图 5-6

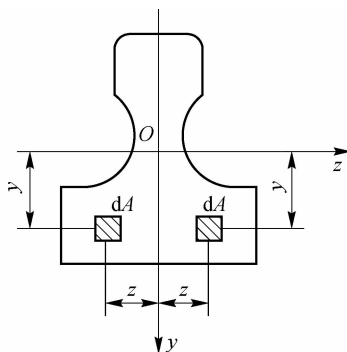


图 5-7

(3)将式(5-3)代入式(5-6)得

$$\int_A y \left( E \frac{y}{\rho} \right) dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M_z \quad (5-7)$$

## ■ 材料力学

式中,积分  $\int_A y^2 dA$  是横截面对  $z$  轴(中性轴)的轴惯性矩  $I_z$ ,它是一个仅与横截面的形状及尺寸有关的几何量。于是式(5-7)可写成

$$\frac{EI_z}{\rho} = M_z$$

由此得

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} \quad (5-8)$$

式中,  $1/\rho$  为梁弯曲时中性层的曲率。

式(5-8)表明,在指定的横截面处,  $EI_z$  越大,则曲率  $1/\rho$  越小,即梁越不易变形,故  $EI_z$  称为梁的**抗弯刚度**,它表示梁抵抗弯曲变形的能力。

将式(5-8)代入式(5-3),可得梁纯弯曲时的正应力计算公式,即

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z} \quad (5-9)$$

式中,  $\sigma$  为横截面上任一点处的正应力;  $M_z$  为横截面上的弯矩;  $y$  为横截面上任一点处的纵坐标;  $I_z$  为横截面对中性轴  $z$  的惯性矩。

在应用式(5-9)时,要考虑  $M_z$ 、 $y$  的正负号,即应以代数值代入,并以所得结果的正负来判别应力是拉应力还是压应力。但在实际计算中,可以只用  $M_z$  和  $y$  的绝对值来计算正应力  $\sigma$  的数值,再根据梁的变形情况来判断  $\sigma$  的正负号,即以中性层为界,梁变形后凸出一侧为拉应力区,凹入一侧为压应力区。也可根据弯矩的正负来判断:当弯矩为正时,中性轴以下部分受拉,以上部分受压;弯矩为负时,则反之。

导出式(5-8)和式(5-9)时,为了方便,把梁截面画成矩形,但在推导过程中,并未用过矩形的几何特性。因此,只要梁有纵向对称面,且载荷作用于这个平面内,此二式就适用。

由前面讨论可知,对于某一确定截面来说,弯矩  $M_z$  与惯性矩  $I_z$  都是定值,正应力  $\sigma$  沿  $y$  向按线性规律变化,最大正应力  $\sigma_{\max}$  发生在距中性轴的最远处( $y=y_{\max}$ 时),即

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z y_{\max}}{I_z} \quad (5-10)$$

式中,  $I_z$  与  $y_{\max}$  是与截面尺寸有关的两个量,为便于计算,可把它们合并为一个量,令

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} \quad (5-11)$$

$W_z$  称为**抗弯截面系数**,它只与截面的几何形状有关。这样式(5-10)可改写为

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \quad (5-12)$$

(1)若截面是高为  $h$ 、宽为  $b$  的矩形,则对  $z$  轴的轴惯性矩为

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

对  $z$  轴的抗弯截面系数为

$$W_z = \frac{I_z}{h/2} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6} \quad (5-13)$$

(2)若截面是直径为  $d$  的圆形,则对  $z$  轴的轴惯性矩为

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64}$$

对  $z$  轴的抗弯截面系数为

$$W_z = \frac{I_z}{d/2} = \frac{\pi d^4/64}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32} \quad (5-14)$$

(3)若截面是外径为  $D$ 、内径为  $d$  的空心圆截面,则对  $z$  轴的轴惯性矩为

$$I_z = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4)$$

对  $z$  轴的抗弯截面系数为

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{I_z}{D/2} = \frac{\frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4)}{D/2} = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4)$$

式中,  $\alpha = d/D$ 。

各种型钢截面的抗弯截面系数,可从型钢表中查到。

### 5.3 横力弯曲时梁的正应力及正应力强度条件

式(5-8)与式(5-9)是在纯弯曲情况下导出的,但工程上常见的弯曲杆件一般多为横力弯曲,即横截面上既有正应力,又有切应力。由于切应力的存在,横截面发生翘曲,平面假设不再成立。此外,在平行于中性层的各层纵向纤维之间还存在挤压应力。较精确的分析指出,对于跨度与截面高之比  $l/h > 5$  的梁,虽有上述因素的影响,但按式(5-9)计算的弯曲正应力误差较小,能满足工程所需要的精度要求,故式(5-9)可近似计算横力弯曲梁的正应力。

横力弯曲时,弯矩不是常量,随截面位置而变化,故应先作梁的弯矩图。一般情况下,最大弯曲正应力  $\sigma_{\max}$  发生在最大弯矩  $M_{z\max}$  所在截面,且离中性轴最远处,这就是危险点。于是由式(5-12)得

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z\max}}{W_z}$$

在梁截面边缘的这些点上,切应力等于零,故可作为单向拉伸(压缩)看待。梁弯曲正应力的强度条件为

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z\max}}{W_z} \leq [\sigma] \quad (5-15)$$

对于抗拉压性能相当的材料(如低碳钢),只要使全梁中绝对值最大的工作应力  $|\sigma|_{\max}$  不超过许用应力  $[\sigma]$  即可。对抗拉性能远小于抗压性能的材料(如铸铁),则其最大的拉(压)应力都应不超过各自的许用应力,即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{t\max} &= \frac{M_{z\max} y_{t\max}}{I_z} \leq [\sigma_t] \\ \sigma_{c\max} &= \frac{M_{z\max} y_{c\max}}{I_z} \leq [\sigma_c] \end{aligned} \right\} \quad (5-16)$$

根据抗弯强度条件,可对梁进行强度校核、截面设计或确定许用载荷。

**例 5-1** 如图 5-8(a)所示,某矩形截面简支木梁上作用有均布载荷  $q$ , 现已知  $l = 4 \text{ m}$ ,  $b = 150 \text{ mm}$ ,  $h = 200 \text{ mm}$ ,  $q = 2 \text{ kN/m}$ ; 弯曲时木材的许用拉应力  $[\sigma] = 6.4 \text{ MPa}$ , 试校核该梁的正应力强度。

**解:** (1)计算支座反力并绘制弯曲内力图,如图 5-8(b)所示。支座反力为

$$F_A = F_B = \frac{ql}{2}$$

## 材料力学

由弯矩图可知,最大弯矩出现在梁的跨中,且

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{2 \text{ kN/m} \times (4 \text{ m})^2}{8} = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(2)校核弯曲正应力。

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{150 \text{ mm} \times (200 \text{ mm})^2}{6} = 1.0 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z\max}}{W_z} = \frac{4 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}{1.0 \times 10^6 \text{ mm}^3} = 4 \text{ MPa} < [\sigma]$$

故满足弯曲正应力强度条件。

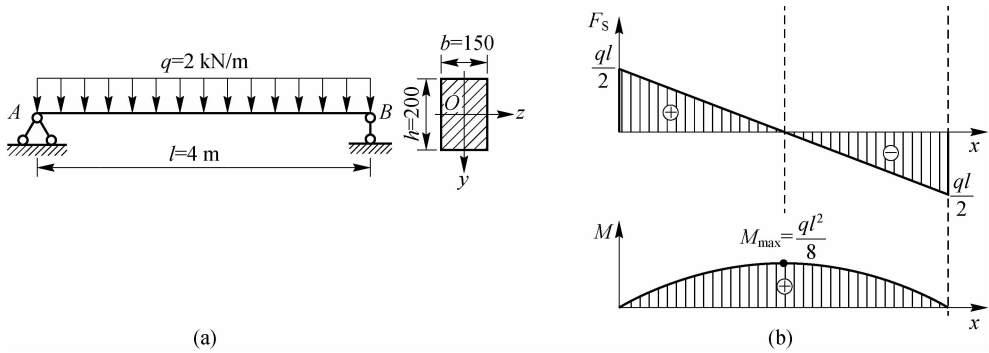


图 5-8

**例 5-2** 图 5-9(a)所示为轧板机的圆截面辊轴,BC 段受均布载荷作用。已知载荷集度  $q=1 \text{ kN/mm}$ ,许用应力  $[\sigma]=140 \text{ MPa}$ ,试确定辊轴的直径。

**解:** 辊轴的计算简图和弯矩图分别如图 5-9(b)、图 5-9(c)所示。

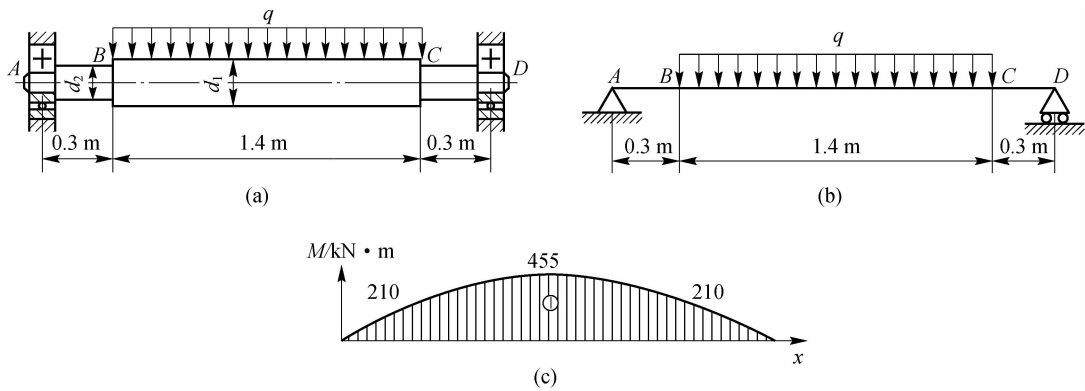


图 5-9

由弯矩图可知

$$M_{\max} = 455 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_B = M_C = 210 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

根据梁的正应力强度条件

$$\sigma = \frac{M_{z\max}}{W_z} = \frac{M_{z\max}}{\pi d^3/32} \leq [\sigma]$$

可得 
$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{z\max}}{\pi[\sigma]}}$$

则辊轴 BC 段和 AB(CD) 段的截面直径分别为

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{32 \times 455 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}{\pi \times 140 \text{ MPa}}} \approx 321 \text{ mm}$$

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{32 \times 210 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}{\pi \times 140 \text{ MPa}}} \approx 248 \text{ mm}$$

取  $d_1 = 320 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 250 \text{ mm}$ 。

**例 5-3** 如图 5-10 所示, 木制简支梁的横截面尺寸为  $b \times h = 120 \text{ mm} \times 180 \text{ mm}$  的矩形, 跨度  $l = 5 \text{ m}$ , 在中间截面上作用有集中力  $F$ , 材料的许用应力  $[\sigma] = 10 \text{ MPa}$ , 试求集中力  $F$  的许可值。

**解:** (1) 作弯矩图。由弯矩图可知, 梁的最大弯矩发生在跨中, 且

$$M_{\max} = \frac{Fl}{4}$$

(2) 确定许可载荷。根据强度条件有

$$M_{\max} \leq [\sigma]W_z$$

即

$$\frac{Fl}{4} \leq [\sigma] \frac{bh^2}{6}$$

$$F \leq \frac{4[\sigma]bh^2}{6l} = \frac{4 \times 10^4 \text{ kPa} \times 120 \times 10^{-3} \text{ m} \times (180 \times 10^{-3} \text{ m})^2}{6 \times 5 \text{ m}} = 5.184 \text{ kN}$$

许可载荷取  $F = 5.184 \text{ kN}$ 。

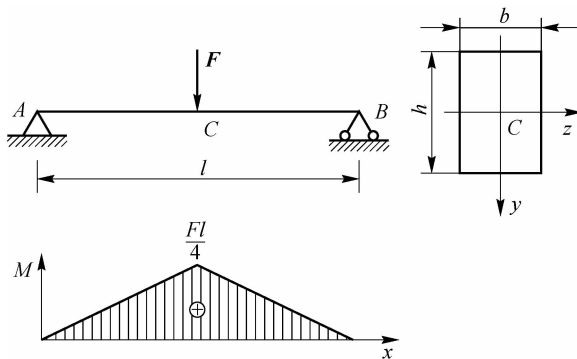


图 5-10

**例 5-4** 某 T 形截面铸铁外伸梁的载荷与截面尺寸如图 5-11(a) 所示。其许用拉应力  $[\sigma_t] = 30 \text{ MPa}$ , 许用压应力  $[\sigma_c] = 60 \text{ MPa}$ 。截面对形心轴  $z$  的轴惯性矩  $I_z = 763 \text{ cm}^4$ , 且  $|y_1| = 52 \text{ mm}$ 。试校核该梁的强度。

**解:** (1) 求支座约束力并作梁的弯矩图, 如图 5-11(b) 所示。

由静力平衡方程得

$$F_A = 2.5 \text{ kN}, \quad F_B = 10.5 \text{ kN}$$

由弯矩图可知, 最大正弯矩出现在 C 截面处, 即  $M_C = 2.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ; 最大负弯矩出现在 B



## 材料力学

截面处,即 $|M_B|=4\text{ kN}\cdot\text{m}$ 。

因为 T 形截面不对称于中性轴  $z$ ,且材料的许用应力 $[\sigma_t]\neq[\sigma_c]$ ,所以要对两个危险截面 C 和 B 上的最大正应力分别校核。

(2)强度校核。

$$C \text{ 截面: } \sigma_{t\max} = \frac{M_C y_2}{I_z} = \frac{2.5 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm} \times 88 \text{ mm}}{763 \times 10^4 \text{ mm}^4} \approx 28.83 \text{ MPa} < [\sigma_t]$$

$$\sigma_{c\max} = \frac{M_C y_1}{I_z} = \frac{2.5 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm} \times 52 \text{ mm}}{763 \times 10^4 \text{ mm}^4} \approx 17.04 \text{ MPa} < [\sigma_c]$$

$$B \text{ 截面: } \sigma_{t\max} = \frac{M_B y_1}{I_z} = \frac{4 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm} \times 52 \text{ mm}}{763 \times 10^4 \text{ mm}^4} \approx 27.26 \text{ MPa} < [\sigma_t]$$

$$\sigma_{c\max} = \frac{M_B y_2}{I_z} = \frac{4 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm} \times 88 \text{ mm}}{763 \times 10^4 \text{ mm}^4} \approx 46.13 \text{ MPa} < [\sigma_c]$$

因此,铸铁梁的强度满足要求。

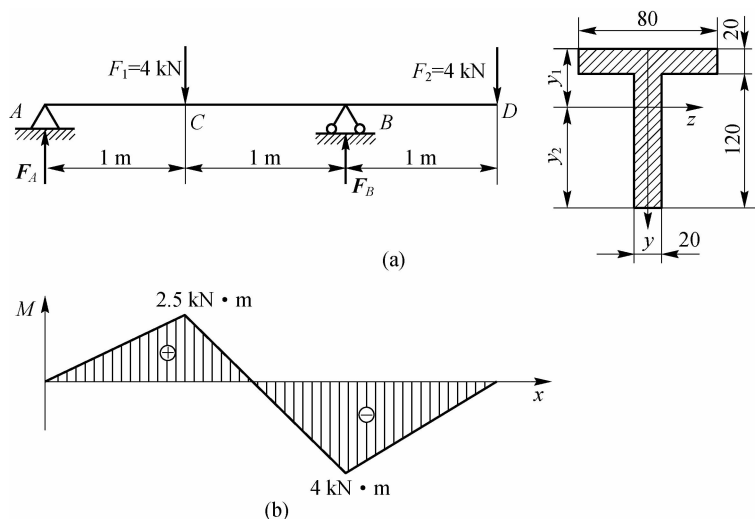


图 5-11

(3)分析。由计算可知,最大拉应力出现在截面 C 的下边缘各点处,最大压应力出现在截面 B 的下边缘各点处,且均满足强度要求。这说明此梁按现状放置是合理的。但若将此 T 形截面倒置,外力作用情况不变,截面上的正应力分布将发生变化,会使梁的强度不满足要求,读者不妨自己分析或讨论一下。

(4)讨论。由抗拉和抗压性能不同的材料制成的梁( $[\sigma_c]>[\sigma_t]$ ),一般做成上下不对称的截面,如 T 形截面。对于这类梁的强度校核,一般是找出正、负最大弯矩所在截面,分别进行拉、压强度校核。

## 5.4 弯曲切应力的计算

横力弯曲时,梁横截面上既有弯矩又有剪力,因而横截面上相应既有正应力又有切应力。在弯曲问题中,一般来说正应力是强度计算的主要因素。但在某些工程结构中(如跨度短而截面高的梁、腹板较薄的工字梁等),梁内的弯曲切应力可能达到相当高的数值,故有时

仍须计算弯曲切应力。本节首先以矩形截面梁为例,说明研究切应力的方法,然后介绍几种常见截面的切应力的计算。

### 5.4.1 矩形截面梁

在图 5-12(a)所示矩形截面梁的任意一个横截面上,剪力  $F_S$  均与截面对称轴  $y$  重合,如图 5-12(b)所示。关于切应力在横截面上的分布规律,可做以下两个假设:

- (1)横截面上各点切应力的方向都平行于剪力  $F_S$ 。
- (2)切应力沿截面宽度均匀分布,即离中性轴等距的各点的切应力相等。

在截面高度  $h$  大于宽度  $b$  的情况下,根据上述假设所推导出的矩形截面的切应力计算公式,与精确解相比有足够的准确度。按照上述两个假设,在距中性轴为  $y$  的横线  $pq$  上,各点的切应力  $\tau$  都相等,且都平行于剪力  $F_S$ 。

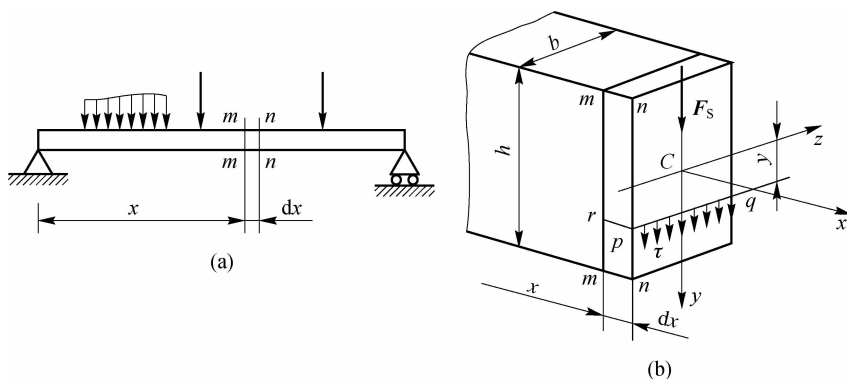


图 5-12

从图 5-12(a)所示的梁中以横截面  $m-m$  与  $n-n$  取出长为  $dx$  的微段,如图 5-13(a)所示。设截面  $m-m$  和  $n-n$  上的弯矩分别为  $M_z$  和  $M_z + dM_z$ ,剪力均为  $F_S$ 。再以平行于中性层且距中性层为  $y$  的  $pr$  平面从这一微段中截取  $prmn$  部分,这一截出部分的左侧面  $rm$  上作用着由弯矩  $M_z$  引起的正应力  $\sigma_1$ ,而在右侧面  $pn$  上作用着由弯矩  $M_z + dM_z$  引起的正应力  $\sigma_2$ 。由微内力  $\sigma dA$  组成的内力系的合力在左右侧面上分别为  $F_{N1}$  和  $F_{N2}$  [见图 5-13(b)], 于是

$$F_{N1} = \int_{A^*} \sigma_1 dA = \int_{A^*} \frac{M_z y_1}{I_z} dA = \frac{M_z}{I_z} \int_{A^*} y_1 dA = \frac{M_z}{I_z} S_z^* \quad (5-17)$$

$$F_{N2} = \int_{A^*} \sigma_2 dA = \int_{A^*} \frac{(M_z + dM_z) y_1}{I_z} dA = \frac{M_z + dM_z}{I_z} \int_{A^*} y_1 dA = \frac{M_z + dM_z}{I_z} S_z^* \quad (5-18)$$

式中,  $A^*$  为横截面上距中性轴为  $y$  的横线  $pq$  以外的面积;  $\int_{A^*} y_1 dA = S_z^*$  为面积  $A^*$  对中性轴的静矩。

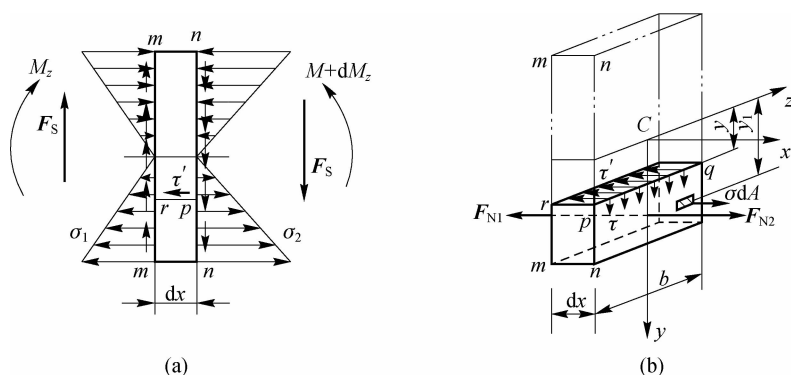


图 5-13

此外,根据切应力互等定理和前述的两个假设,在切出部分的顶面  $pr$  上作用着切应力  $\tau'$ ,且沿宽度  $b$  均匀分布,其合力为纵向剪力  $dF'_s$ ,即

$$dF'_s = \tau' b dx \quad (5-19)$$

$F_{N1}$ 、 $F_{N2}$  和  $dF'_s$  的方向都平行于  $x$  轴,根据静力平衡条件  $\sum F_x = 0$  得

$$F_{N2} - F_{N1} - dF'_s = 0 \quad (5-20)$$

将式(5-17)、式(5-18)、式(5-19)代入式(5-20)得

$$\frac{M_z + dM_z}{I_z} S_z^* - \frac{M_z}{I_z} S_z^* - \tau' b dx = 0$$

简化并整理得

$$\tau' = \frac{dM_z}{dx} \frac{S_z^*}{I_z b}$$

由式(4-4)得,  $\frac{dM}{dx} = F_s$ , 根据切应力互等定理,梁横截面(横线  $pq$ )上的切应力为

$$\tau = \tau' = \frac{F_s S_z^*}{I_z b} \quad (5-21)$$

式中,  $F_s$  为横截面上的剪力;  $b$  为横截面的宽度;  $I_z$  为整个矩形截面对中性轴的轴惯性矩;  $S_z^*$  为横截面上距中性轴为  $y$  的横线以外部分面积对中性轴的静矩。

式(5-21)即为矩形截面梁弯曲切应力计算公式。

对于图 5-14(a) 所示的矩形截面,根据静矩的定义,有

$$S_z^* = b \left( \frac{h}{2} - y \right) \left[ y + \frac{\frac{h}{2} - y}{2} \right] = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

将其代入式(5-21)可得

$$\tau = \frac{F_s}{2I_z} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (5-22)$$

可见,矩形截面梁的弯曲切应力  $\tau$  沿截面高度按二次抛物线规律变化,如图 5-14(b) 所示。

当  $y = \pm \frac{h}{2}$  时,  $\tau = 0$ , 即在横截面上下两边缘的各点处,切应力等于零。随着至中性轴距

离  $y$  的减小,  $\tau$  逐渐增大, 当  $y=0$  时, 即在中性轴上, 切应力最大, 其值为

$$\tau_{\max} = \frac{F_s h^2}{2I_z \cdot 4} = \frac{F_s h^2}{8 \times \frac{bh^3}{12}} = \frac{3}{2} \frac{F_s}{bh} \text{ 或 } \tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{F_s}{A} \quad (5-23)$$

式中,  $A=bh$  为矩形截面的面积,  $F_s/A$  是截面上的平均切应力。

由式(5-23)可知, 矩形截面梁横截面上的最大切应力是平均切应力值的 1.5 倍。

以上所述对矩形截面梁的分析方法, 也适用于其他截面形式的梁, 同样可导出类似的公式。因此, 可对照式(5-21)中各字符的含义, 结合不同的截面加以引用。

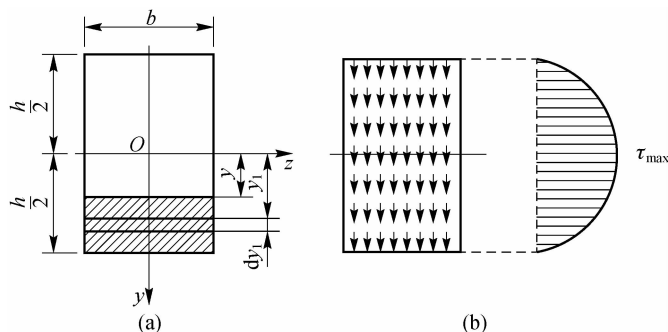


图 5-14

### 5.4.2 工字形截面的切应力计算

工字形截面由中间腹板和上下两翼缘组成, 如图 5-15(a) 所示。梁横截面上的切应力主要作用于腹板上。

腹板截面是一个狭长矩形, 关于矩形截面上切应力分布的两个假设仍适用。工字形截面的尺寸:  $h$  为截面的高度,  $h_1$  为上下两翼缘内侧的间距;  $b$  为翼板的宽度,  $d$  为腹板的宽度。在距中性轴为  $y$  处, 取一水平线, 用与分析矩形截面梁相同的方法, 可求出横截面在该水平线处的切应力, 得到形式与前相同的切应力公式, 即

$$\tau = \frac{F_s S_z^*}{I_z d} \quad (5-24)$$

式中,  $d$  为腹板的宽度;  $I_z$  为整个工字形截面对中性轴的惯性矩;  $S_z^*$  为距中性轴为  $y$  的横线以下部分的面积, 即图 5-15(b) 中的阴影面积对中性轴的静矩。

根据截面尺寸, 可计算静矩  $S_z^*$ , 即

$$S_z^* = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{d}{2} \left( \frac{h_1^2}{4} - y^2 \right)$$

代入式(5-24)得

$$\tau = \frac{F_s}{2I_z d} \left[ b \left( \frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + d \left( \frac{h_1^2}{4} - y^2 \right) \right] \quad (5-25)$$

由式(5-25)可见, 腹板上的切应力  $\tau$  沿腹板高度也呈抛物线规律变化, 如图 5-15(c) 所示。

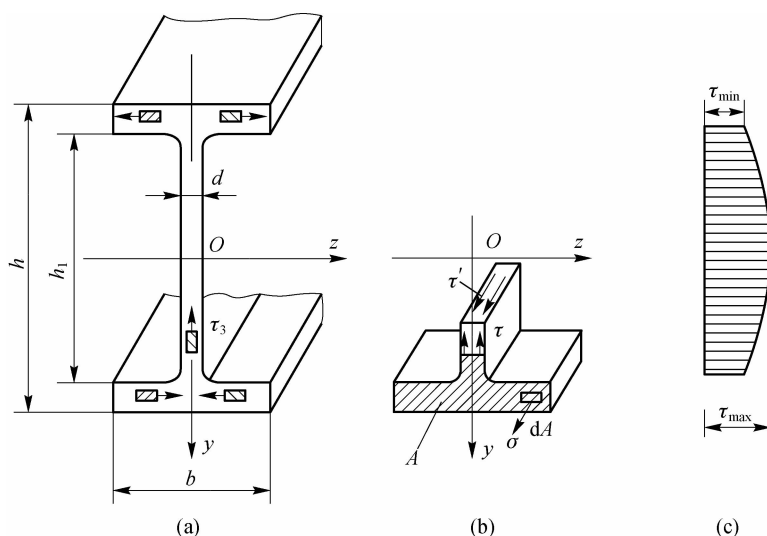


图 5-15

当  $y=0$  及  $y=\pm\frac{h_1}{2}$  时,由式(5-25)可求得腹板上的最大和最小切应力,其值分别为

$$\tau_{\max} = \frac{F_s}{8I_z d} [bh^2 - h_1^2(b-d)] \quad (5-26)$$

$$\tau_{\min} = \frac{F_s b}{8I_z d} (h^2 - h_1^2) \quad (5-27)$$

计算表明,工字形截面的上、下翼缘主要承担弯矩,而腹板承担了横截面上几乎全部的剪力  $F_s$ ,又因为腹板的宽度  $d$  远小于翼缘的宽度  $b$ ,从式(5-26)和式(5-27)可以看出,  $\tau_{\max}$  与  $\tau_{\min}$  实际上相差不大,因而可认为腹板上的切应力接近均匀分布。因此可近似地按式(5-28)计算腹板上的最大切应力。

$$\tau_{\max} \approx \frac{F_s}{dh_1} \quad (5-28)$$

由于腹板与翼缘交接处的截面宽度由  $d$  突增至  $b$ ,连接处的转角上发生应力集中现象,因此这里的切应力分布较复杂。为了缓和应力集中,工字钢的腹板与翼板常用圆弧相连接,使这里实际发生的切应力值接近由式(5-28)所计算出的数值。对于各类工字钢,计算  $\tau_{\max}$  时有关  $I_z : S_z^*$  的值可查型钢表。

翼缘上的切应力情况比较复杂,由于截面周边的切应力必与周边相切,故翼缘上还有水平方向的切应力,因其值较小,这里不再论述。

### \* 5.4.3 圆形截面的切应力计算

对于圆形截面梁,不能假设截面上各点的切应力都平行于剪力  $F_s$ ,但可证明截面边缘上各点的切应力必与圆周相切。可作如下推证:如果圆周边缘上某点  $A$  的切应力不与圆周相切,而在某一方向为  $\tau_A$ ,将  $\tau_A$  分解为与边缘相切的切向分量  $\tau_{At}$  和法向分量  $\tau_{Ar}$ 。根据切应力互等定理,对  $\tau_{At}$  来说应与梁自由表面上的  $\tau'_{Ar}$  相等,如图 5-16(a)所示。但在自由表面上不可能有切应力  $\tau'_{Ar}$ ,即  $\tau_{At} = \tau_{Ar} = 0$ ,故在圆截面边缘各点上只有与圆周相切的切应力  $\tau_t$ 。

这样,在圆截面某一水平弦  $AB$  的两端,切应力  $\tau_A$  与  $\tau_B$  和圆周相切,延长其作用线,和  $y$  轴相交于  $P$  点,如图 5-16(b) 所示。由于对称,  $AB$  弦中点  $C$  的切应力必然是铅垂向的,也通过  $P$  点,由此可假设水平弦  $AB$  上任意一点的切应力均通过  $P$  点;再假设  $AB$  弦上各点切应力的垂直分量  $\tau$  是相等的,即假设  $\tau$  沿  $AB$  弦均匀分布。这样对  $\tau$  来说就与关于矩形截面所做的假设相同,因而也可应用式(5-21)来计算,即

$$\tau = \frac{F_s S_z^*}{I_z b}$$

式中,  $b$  为水平弦  $AB$  的长度,其值  $b = 2R \cos \varphi$ ;  $S_z^*$  为  $AB$  弦以下到边缘圆弧内的部分面积对中性轴的静矩[见图 5-16(c)]。

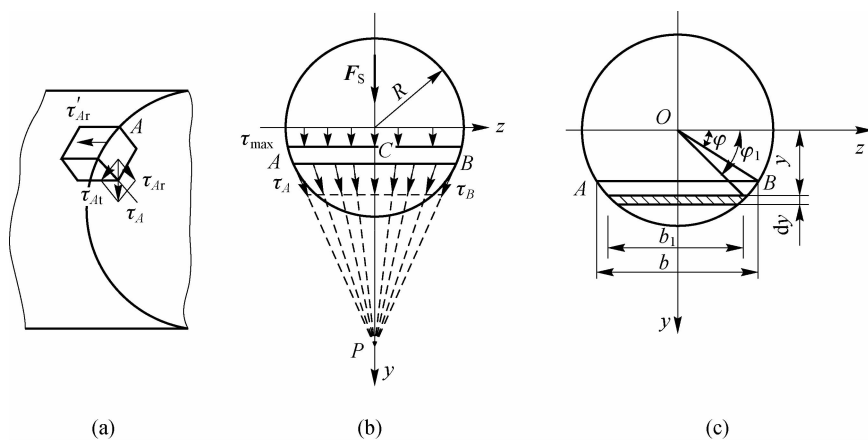


图 5-16

即

$$S_z^* = \int_{A_1} y dA$$

其中,  $y = R \sin \varphi_1$ ,  $dy = R \cos \varphi_1 d\varphi_1$ ,  $b_1 = 2R \cos \varphi_1$ ,  $dA = b_1 dy = 2R^2 \cos^2 \varphi_1 d\varphi_1$

则

$$S_z^* = \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} R \sin \varphi_1 2R^2 \cos^2 \varphi_1 d\varphi_1 = \frac{2}{3} R^3 \cos^3 \varphi$$

将以上  $b$ 、 $S_z^*$  与  $I_z$  表达式代入式(5-21)得

$$\tau = \frac{4F_s \cos^2 \varphi}{3\pi R^2} = \frac{4}{3} \frac{F_s}{A} \cos^2 \varphi$$

这是在水平弦  $AB$  上各点沿铅垂向的分切应力,切应力值在  $A$  点或  $B$  点达最大值,即

$$\tau_A = \tau / \cos \varphi = \frac{4}{3} \frac{F_s}{A} \cos \varphi \quad (5-29)$$

从式(5-29)可知,整个截面上的最大切应力发生在  $\varphi = 0^\circ$  时,即在中性轴上,其值为

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{F_s}{A} \quad (5-30)$$

可见,在圆截面梁上的最大切应力为截面平均切应力的  $4/3$  倍。

## 5.5 弯曲切应力的强度校核

上节讨论了各种截面形状的梁的切应力的计算。对等截面梁而言,最大弯曲切应力  $\tau_{\max}$

## 材料力学

在最大剪力  $F_{S_{\max}}$  所在的截面内,且一般位于截面的中性轴上,即

$$\tau_{\max} = \frac{F_{S_{\max}} S_{z_{\max}}^*}{I_z b}$$

式中,  $S_{z_{\max}}^*$  为中性轴一侧的截面面积对中性轴的静矩。

因在中性轴上各点的正应力  $\sigma=0$ ,所以各点均处于纯剪切状态。故弯曲切应力的强度条件应为  $\tau_{\max}$  不超过材料的许用切应力  $[\tau]$ ,即

$$\tau_{\max} = \frac{F_{S_{\max}} S_{z_{\max}}^*}{I_z b} \leq [\tau] \quad (5-31)$$

在梁的强度设计中,必须同时满足正应力和切应力两个强度条件。一般情况下,弯曲正应力是支配梁强度计算的主要因素,由此确定的截面,一般均能满足切应力的强度条件,特别是金属梁,不需要再进行切应力的强度校核。但对下述一些情况,要注意切应力校核:

(1) 梁的跨度较短或在支座附近作用有较大载荷。在这种情况下梁的弯矩较小,而剪力却相对较大,如果根据  $M_{\max}$  来选择截面尺寸,就不一定能满足切应力强度条件。

(2) 铆接或焊接的工字形截面梁,腹板的厚度很薄而高度较大,厚度与高度的比值往往小于型钢的相应比值,这时对腹板应进行切应力校核。

(3) 对于木梁(它在顺纹方向的抗剪能力较差)以及经焊接、铆接或胶合而成的梁,对焊缝、铆钉或胶合面等,一般要进行剪切计算。

**例 5-5** 简支梁  $AB$  如图 5-17(a) 所示。其中,  $l=2\text{ m}$ ,  $a=0.2\text{ m}$ 。梁上的载荷为  $q=10\text{ kN/m}$ ,  $F=200\text{ kN}$ 。材料的许用正应力  $[\sigma]=160\text{ MPa}$ ,许用切应力  $[\tau]=100\text{ MPa}$ 。试选择工字钢的型号。

**解:** 先计算梁的约束力,然后作剪力图和弯矩图,如图 5-17(b)、图 5-17(c) 所示。

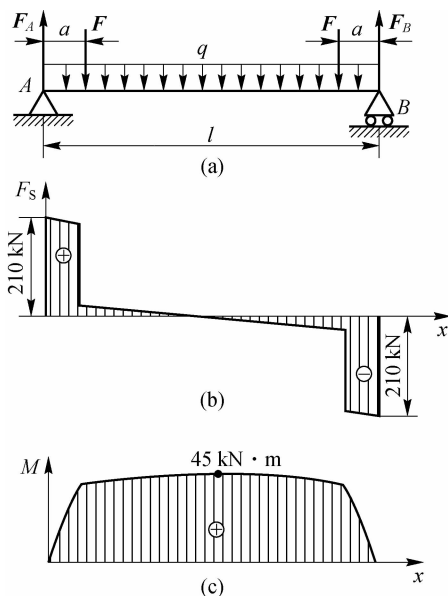


图 5-17

根据最大弯矩选择工字钢的型号。  $M_{\max}=45\text{ kN}\cdot\text{m}$ 。由弯曲正应力强度条件,有

$$W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{45 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}{160 \text{ MPa}} = 281\,250 \text{ mm}^3 = 281.25 \text{ cm}^3$$

查型钢表, 选用 No. 22a 号工字钢, 其  $W_z = 309 \text{ cm}^3$ 。

现在校核梁的切应力。由表中查得,  $I_z/S_z^* = 18.9 \text{ cm}$ , 腹板厚度  $d = 0.75 \text{ cm}$ 。由剪力图可知,  $F_{S\max} = 210 \text{ kN}$ 。将其代入切应力强度条件公式得

$$\tau_{\max} = \frac{F_{S\max} S_z^*}{I_z b} = \frac{210 \times 10^3 \text{ N}}{18.9 \times 10 \text{ mm} \times 0.75 \times 10 \text{ mm}} \approx 148.15 \text{ MPa} > [\tau]$$

$\tau_{\max}$  超过  $[\tau]$  很多, 应重新选择更大的截面。现以 No. 25b 号工字钢进行试算。由附录查得,  $I_z/S_z^* = 21.3 \text{ cm}$ ,  $d = 1 \text{ cm}$ 。再次进行切应力强度校核, 得

$$\tau_{\max} = \frac{210 \times 10^3 \text{ N}}{21.3 \times 10 \text{ mm} \times 1 \times 10 \text{ mm}} \approx 98.59 \text{ MPa} < [\tau]$$

因此, 要同时满足正应力和切应力强度条件, 应选用型号为 No. 25b 的工字钢。

**例 5-6** 某矩形截面梁受力如图 5-18(a) 所示, 已知截面高宽比为  $h : b = 2 : 1$ , 其许用正应力  $[\sigma] = 100 \text{ MPa}$ , 许用切应力  $[\tau] = 60 \text{ MPa}$ , 试设计梁的横截面尺寸。

**解:** (1) 求支座反力。A、B 两端的支座反力分别为

$$F_A = 5 \text{ kN} (\uparrow), \quad F_B = 10 \text{ kN} (\uparrow)$$

(2) 绘制梁的剪力图和弯矩图, 如图 5-18(b) 所示。最大剪力和最大弯矩分别为

$$F_{S\max} = 10 \text{ kN}, \quad M_{\max} = 10 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

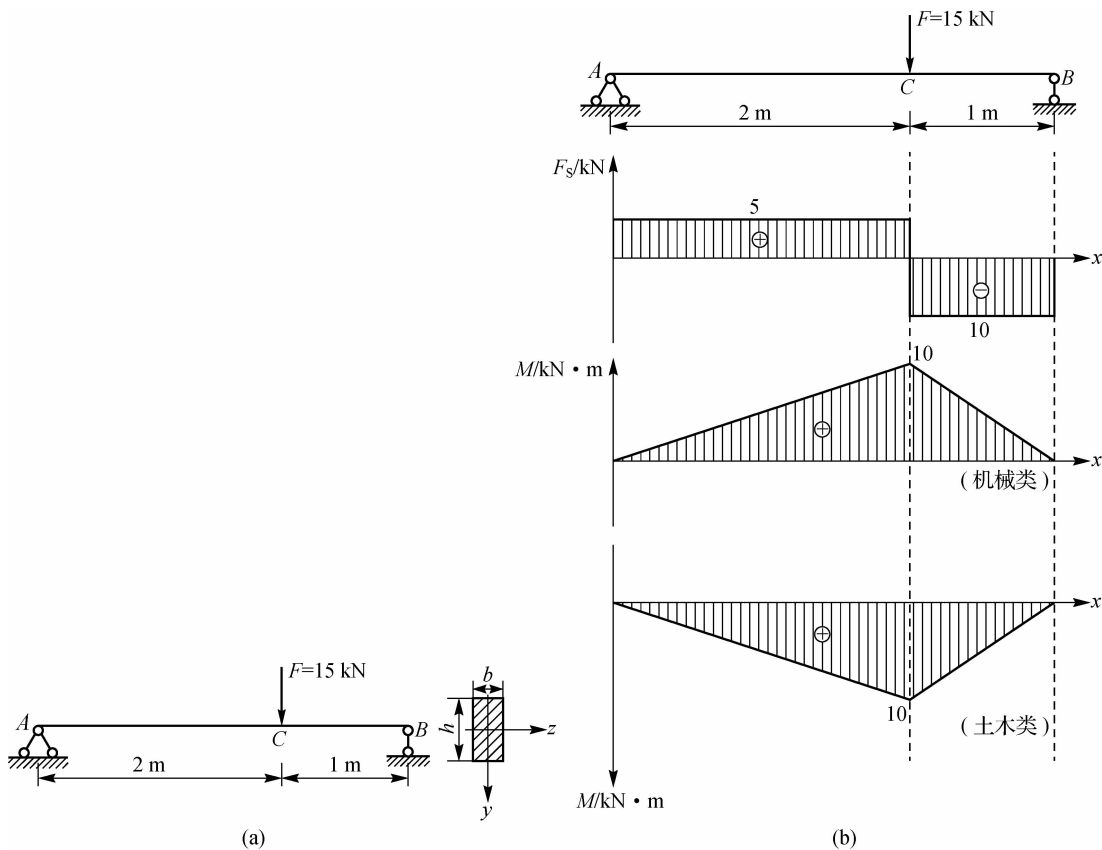


图 5-18



(3) 根据弯曲正应力强度条件, 有

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

则

$$W_z = \frac{bh^2}{6} \geq \frac{M_{z\max}}{[\sigma]}$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6M_{z\max}}{4[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{6 \times 10 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}{4 \times 100 \text{ MPa}}} \approx 53.13 \text{ mm}$$

取  $b = 54 \text{ mm}$ ,  $h = 2b = 108 \text{ mm}$ 。

(4) 根据弯曲切应力强度条件校核。

$$\tau_{\max} = \frac{F_{S\max} S_{z\max}^*}{I_z b} = \frac{3}{2} \frac{F_{S\max}}{A} = \frac{3}{2} \times \frac{10 \text{ kN}}{54 \text{ mm} \times 108 \text{ mm}} \approx 2.57 \text{ MPa} \leq [\tau]$$

故梁的横截面尺寸为  $b = 54 \text{ mm}$ ,  $h = 2b = 108 \text{ mm}$ 。

## 5.6 提高梁弯曲强度的主要措施

控制梁弯曲强度的主要因素是弯曲正应力, 一般以弯曲正应力的强度条件作为设计的主要依据。由式(5-15)可知, 要提高梁的弯曲强度, 应从两个方面考虑: 一是提高  $W_z$  的数值, 二是降低  $M_{z\max}$  的数值。

### 5.6.1 合理设计截面

使用材料的多少及其自重均与截面面积  $A$  的大小成正比,  $A$  越小越经济。因而, 合理的截面设计应当是其抗弯截面系数  $W_z$  较大, 而截面面积  $A$  较小。例如, 一个矩形截面梁, 它的高度  $h$  大于宽度  $b$ , 为更好抵抗竖直平面内的弯曲变形, 应将梁竖直放置[见图 5-19(a)], 则  $W_{z1} = \frac{1}{6}bh^2$ ; 若将梁水平放置[见图 5-19(b)], 则  $W_{z2} = \frac{1}{6}hb^2$ 。两者之比为

$$\frac{W_{z1}}{W_{z2}} = \frac{h}{b} > 1$$

故竖直放置比水平放置能提高梁的抗弯强度, 更为合理。因此, 房屋及桥梁等结构物中所用的梁均为竖直放置的矩形截面梁。

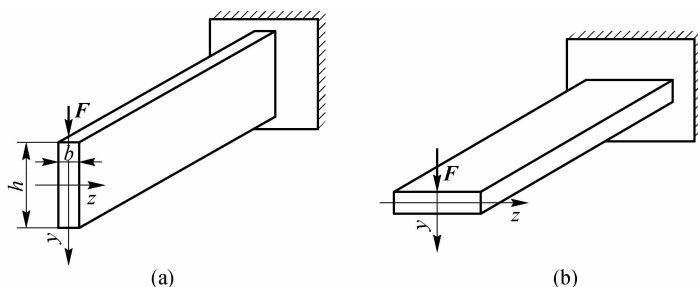


图 5-19

根据弯曲正应力的线性分布规律, 离中性轴越远, 正应力越大; 而靠近中性轴, 正应力甚小, 故该处材料未充分发挥作用, 应将尽可能多的材料配置在远离中性轴的部位。如将矩形截面靠近中性轴的这部分面积移到离中性轴较远的上下边缘处形成翼缘, 图 5-20 中把阴影

部分面积移至虚线部分,形成工字形截面,使材料得到充分利用,既经济又安全。其他槽形、箱形等截面也是同样的道理。

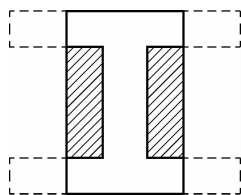


图 5-20

为了便于比较各种截面的经济性,可用抗弯截面系数  $W_z$  与截面面积  $A$  的比值  $W_z/A$  来衡量。 $W_z/A$  的值越大,则此截面越经济。

对于矩形截面比值的大小为

$$\frac{W_z}{A} = \frac{bh^2/6}{bh} = \frac{h}{6} \approx 0.167h$$

其他常用几何形状的截面  $W_z/A$  的值列于表 5-1 中。

表 5-1 几种常用几何形状的截面  $W_z/A$  的值

| 截面形状    | 矩形       | 圆形       | 槽钢                  | 工字钢                 |
|---------|----------|----------|---------------------|---------------------|
| $W_z/A$ | $0.167h$ | $0.125d$ | $(0.27 \sim 0.31)h$ | $(0.27 \sim 0.31)h$ |

在讨论截面的合理设计时,还应考虑材料的特性。对于抗拉强度与抗压强度相等的塑性材料,一般采用对称于中性轴的截面,截面形心位于高度  $h$  的中点,因此截面上下边缘的最大拉应力与最大压应力数值相等,可同时接近材料的许用应力值,如矩形截面、工字形截面、圆形截面等均属此类截面;对于抗拉强度与抗压强度不等的脆性材料,在选择截面时,最好使中性轴偏于强度较弱的一边。例如,铸铁的抗拉强度小于抗压强度,受弯构件多采用图 5-21 所示的截面。设计时应使应满足的条件为

$$\frac{\sigma_{cmax}}{\sigma_{tmax}} = \frac{M_z y_1}{I_z} / \frac{M_z y_2}{I_z} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{[\sigma_c]}{[\sigma_t]}$$

即

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{[\sigma_c]}{[\sigma_t]} \quad (5-32)$$

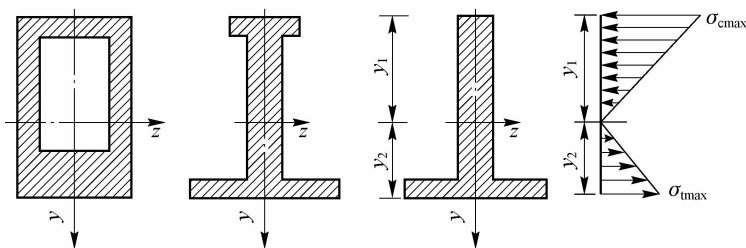


图 5-21

这样能利用材料的特性,使梁内最大拉应力和最大压应力同时接近材料的抗拉和抗压许用应力值。

### 5.6.2 合理设置支座、布置载荷

应合理布置梁的载荷及支座的位置,并尽量降低梁内最大工作弯矩  $M_{z_{max}}$  的数值,也就是提高梁的弯曲强度。

(1)首先,合理布置梁的支座。图 5-22(a)所示为某简支梁,由例 4-3 知  $M_{z_{max}} = \frac{ql^2}{8}$ ,若将两端支座各向里移动  $0.2l$ ,成为外伸梁[见图 5-22(b)],最大弯矩减小为

$$M_{z_{max}} = \frac{ql}{2} \times 0.3l - \frac{q}{2} \times \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ql^2}{40}$$

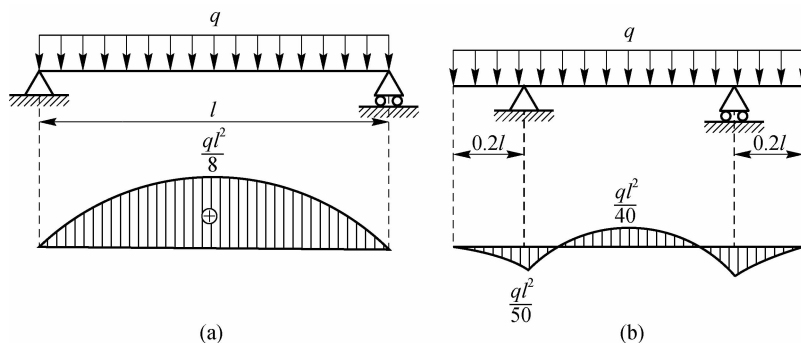


图 5-22

其值为前者的 1/5,也就是说按图 5-22(b)的支座条件,承载能力可提高 4 倍。例如,图 5-23 所示的龙门式起重机的大梁,其支承不在两端,而略向中间移动,即可达到降低  $M_{z_{max}}$  的效果。

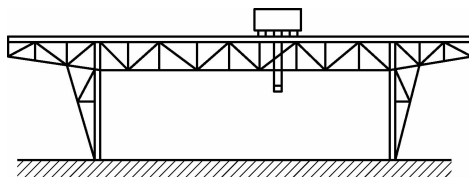


图 5-23

(2)其次,合理布置载荷。图 5-24(a)所示为某型铣床的齿轮轴,把齿轮安置得紧靠轴承,这就使轴上的集中力作用点  $C$  紧靠支座,  $AC = \frac{l}{6}$ ,则图 5-24(b)所示轴的最大弯矩为

$$M_{max} = \frac{Fab}{l} = \frac{5}{36}Fl$$

由此作其弯矩图,如图 5-24(c)所示。

若把齿轮放在轴的中央( $F$  作用于跨中),则  $M_{z_{max}} = Fl/4$ 。相比之下前者的最大弯矩就减小许多。此外,在条件允许的情况下,应尽可能将较大的集中力分散成较小的力,或者改变成分布载荷。如图 5-25(a)所示,简支梁  $AB$  在跨中承受集中力  $F$ ,其最大弯矩为  $M_{z_{max}} = Fl/4$ 。若在该梁中部安置一段长  $l/2$  的辅助梁  $CD$ ,则  $AB$  梁的最大弯矩降低至  $Fl/8$ ,如图 5-25(b)所示。

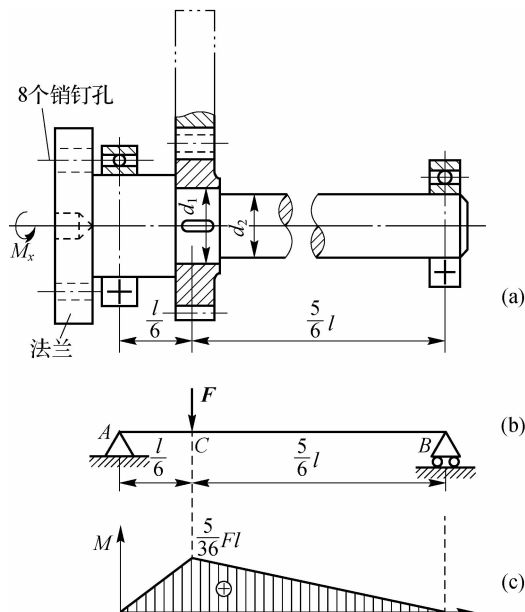


图 5-24

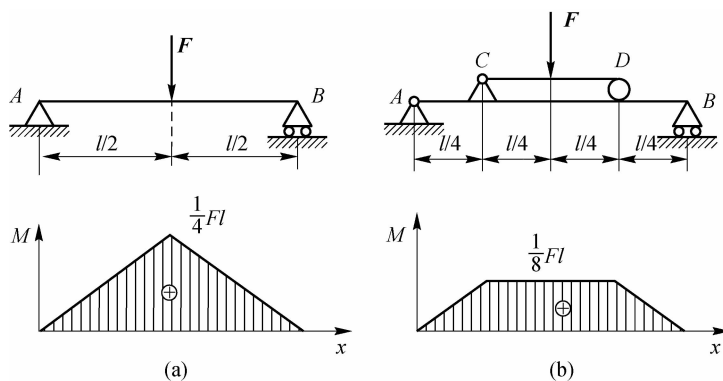


图 5-25

### 5.6.3 采用变截面梁或等强度梁

通常,工程中的梁多为横力弯曲,弯矩沿梁长是变化的。根据式(5-8)或式(5-9)设计的等截面梁,只有危险截面边缘的最大正应力达到材料的许用应力,其余截面上的最大正应力都比许用应力小,材料的力学性能未得到充分利用。为了节省材料,减轻重量,从强度条件考虑,可在弯矩较大处采用较大截面,弯矩较小处采用较小截面。这种横截面沿着轴线变化的梁称变截面梁,常见的桥式起重机横梁两端截面高度较小(见图 5-26),就是根据其弯矩在两端较小中间较大的规律而设计的。若将变截面梁设计为每个横截面上的最大正应力均等于许用应力值 $[\sigma]$ ,则这种梁就称为等强度梁。设梁在任一截面上的弯矩为 $M(x)$ ,截面的抗弯截面系数为 $W(x)$ 。根据等强度梁的要求,应有

$$\sigma_{\max} = \frac{M(x)}{W(x)} = [\sigma] \quad (5-33)$$

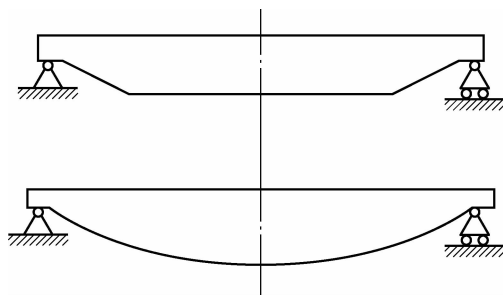


图 5-26

需要指出的是,使用式(5-33)设计梁的截面时,对于  $M(x)=0$  的截面,如简支梁的两端支座处或悬臂梁的自由端等,由于有剪力  $F_s$ ,因此该处的梁截面仍需有一定的尺寸,以承受剪力的作用。

可根据弯矩变化由式(5-33)确定等强度梁的截面变化规律,它可改写为

$$W(x) = \frac{M(x)}{[\sigma]} \quad (5-34)$$

这是等强度梁的抗弯截面系数  $W(x)$  沿梁轴线的变化规律。

现以某悬臂梁一端承受集中力  $F$  为例来说明。任一截面的弯矩  $M = Fx$ ,要使梁等强度,抗弯截面系数  $W(x)$  也应与  $x$  成正比。这个条件可由多方面来满足,如取截面为矩形,设截面宽度为  $b$ 、高度为  $h$ 。

(1)若宽度  $b$  为常量,高度  $h(x)$  为变量(见图 5-27),则

$$W(x) = \frac{bh^2(x)}{6} = \frac{Fx}{[\sigma]}$$

可得

$$h^2(x) = \frac{6Fx}{b[\sigma]} \quad (0 \leq x \leq l) \quad (5-35)$$

可见,梁的高度  $h$  按抛物线规律而变化,在固定端,梁的高度为

$$h_0 = \sqrt{\frac{6Fl}{b[\sigma]}}$$

在梁的自由端,  $x=0, h=0$ , 截面面积为零,显然不能满足抗剪强度要求。因而要按剪切强度条件确定自由端截面的高度。

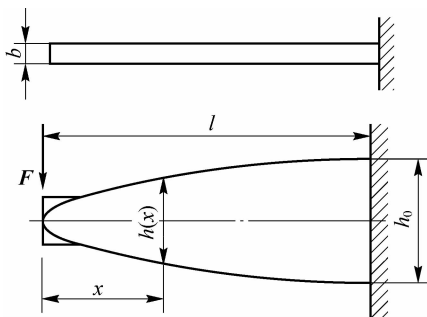


图 5-27

(2)若高度  $h$  为常量,而宽度  $b(x)$  沿  $x$  变化[见图 5-28(a)],则

$$W(x) = \frac{h^2 b(x)}{6} = \frac{M(x)}{[\sigma]} = \frac{Fx}{[\sigma]}$$

$$b(x) = \frac{6Fx}{h^2[\sigma]} \quad (5-36)$$

由式(5-36)可知,梁的宽度  $b(x)$  按直线规律变化,梁为一块等厚度的三角形板。对于这种等强度梁,可把它分成狭条再重叠起来制成板簧,如图 5-28(b)所示。若不计接触面之间的摩擦,各板条将独立抵抗弯矩。在任一截面上,各板条抗弯截面系数之和等于此三角板在该截面的抗弯截面系数。这样组成的板簧可近似地看作是等强度的。

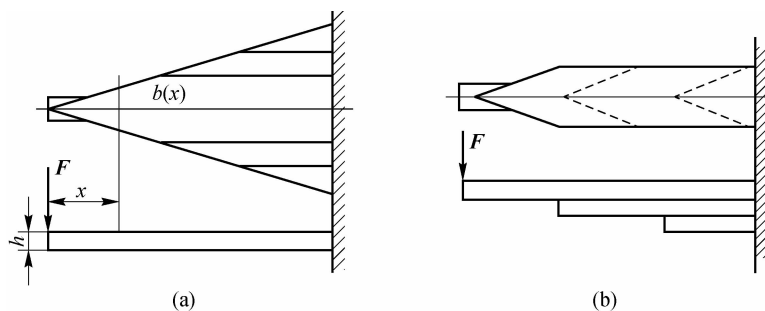


图 5-28

若设想把这一等强度梁分成若干狭条,然后叠置起来,并使其略微拱起,这就成为汽车上通常使用的叠板弹簧,如图 5-29 所示。

按式(5-34)也可求得圆截面等强度梁截面直径沿轴线的变化规律。考虑到加工的方便与结构装配上的要求,常用阶梯形的变截面梁(阶梯轴)来代替理论上的等强度梁,如图 5-30 所示。

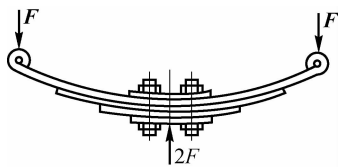


图 5-29

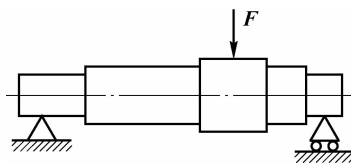


图 5-30

**例 5-7** 长为 1 m 的悬臂梁,在自由端受集中力  $F = 20$  kN 的作用,材料的许用应力  $[\sigma] = 140$  MPa。试在下列三种截面形状情况下,比较所耗材料用量:(1)工字形;(2)高宽比  $h/b=2$  的矩形;(3)圆形。

**解:**易知此悬臂梁的最大弯矩发生在固定端,其值为

$$|M|_{\max} = Fl = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

由弯曲正应力强度条件可得

$$W_z \geq \frac{|M|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{20 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}{140 \text{ MPa}} = 142\,857 \text{ mm}^3 \approx 143 \text{ cm}^3$$

(1)工字形截面。查型钢表取 No. 16 号工字钢,其  $W_z = 141 \text{ cm}^3$ ,  $A = 26.1 \text{ cm}^2$ ,其工作

## 材料力学

应力稍超过 $[\sigma]$ ,但不超过5%,在工程误差允许范围内。

(2)矩形截面。

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2b^3}{3} \approx 143 \text{ cm}^3$$

所以  $b=6 \text{ cm}$ ,  $h=2b=12 \text{ cm}$ , 则  $A=bh=6 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}=72 \text{ cm}^2$ 。

(3)圆形截面。

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} \approx 143 \text{ cm}^3$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{143 \text{ cm}^3 \times 32}{\pi}} \approx 11.3 \text{ cm}$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times (11.3 \text{ cm})^2}{4} \approx 100 \text{ cm}^2$$

由上可见,工字形截面面积  $A_{\text{工}}$ 、矩形截面面积  $A_{\text{矩}}$  与圆形截面面积  $A_{\text{圆}}$  之比为

$$A_{\text{工}} : A_{\text{矩}} : A_{\text{圆}} = 26.1 : 72 : 100 = 1 : 2.76 : 3.83$$

这说明圆形截面最费料,而工字形截面最省料。

## 科学家简介

### 钱学森



钱学森(1911—2009),浙江杭州人,享誉海内外的杰出科学家和中国航天事业的奠基人,中国两弹一星功勋奖章获得者之一,中国科学院、中国工程院资深院士;1934年毕业于交通大学机械工程系;1935年留学美国,入麻省理工学院航空系学习,翌年获硕士学位,后转入加州理工学院航空系学习;1939年获美国加州理工学院航空、数学博士学位,曾任加州理工学院副教授,麻省理工学院教授,加州理工学院喷气推进中心主任、教授;1955年冲破重重阻力返回祖国,历任中国科学院力学研究所研究员、所长,国防部第五研究院副院长,中国科技大学近代力学系主任等职;在应用力学、喷气推进与航天技术、工程控制论、物理力学、系统科学

与工程等领域做出了重要贡献,被誉为“中国航天之父”“中国导弹之父”“火箭之王”“中国自动化控制之父”。

## 习题(一)

### 一、选择题

1. 关于弯曲问题中,根据  $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$  进行强度计算时,对于危险点的判断,下列论述正确的是\_\_\_\_\_。

- A. 画弯矩图确定  $M_{\max}$  的作用面
- B. 综合考虑弯矩的大小与截面形状

- C. 综合考虑弯矩的大小、截面形状和尺寸,以及材料的性能  
 D. 综合考虑梁长、载荷、截面尺寸等
2. 下列论述正确的是\_\_\_\_\_。
- A. 纯弯曲时,变形后横截面保持为平面,且其形状、大小均保持不变  
 B. 平面弯曲时,中性轴垂直于载荷作用面  
 C. T形截面的铸铁梁,其最大拉应力总是发生在最大正弯矩的横截面上  
 D. 纯弯曲时,梁变形后的轴线为一段圆弧线
3. 悬臂梁受力如图 5-31 所示,则下列判断正确的是\_\_\_\_\_。
- A. 梁 AB 段是纯弯曲  
 B. 梁 BC 段是纯弯曲  
 C. 全梁都是纯弯曲  
 D. 全梁都不是纯弯曲

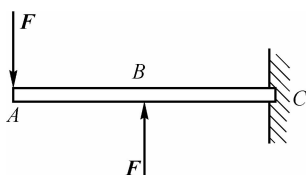


图 5-31

## 二、基本计算题

1. 某矩形截面梁的尺寸如图 5-32 所示,许用应力 $[\sigma]=160$  MPa。试按下列两种情况校核此梁。

- (1) 使此梁的 120 mm 边竖直放置。  
 (2) 使 120 mm 边水平放置。

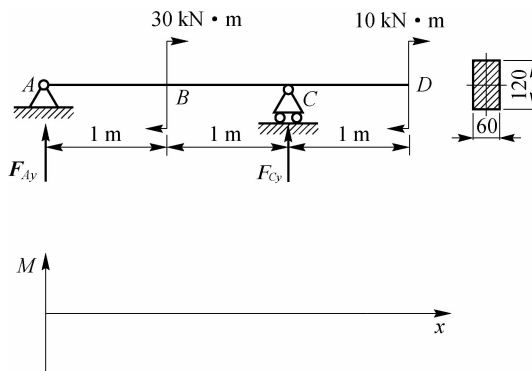


图 5-32

**解:** 求约束反力,画弯矩图。

$$F_{Ay} =$$

$$F_{Cy} =$$

\_\_\_\_\_ 截面为危险截面,危险点在 \_\_\_\_\_, 计算危险点应力(两种情况)。

(1) 此梁竖直放置。

$$W_{z1} =$$



## 材料力学

用正应力强度条件校核。

$$\sigma_{\max} = \quad [\sigma], \quad \text{强度条件。}$$

(2) 此梁水平放置。

$$W_{z2} =$$

用正应力强度条件校核。

$$\sigma_{\max} = \quad [\sigma], \quad \text{强度条件。}$$

2. 图 5-33 所示悬臂梁的横截面为矩形, 承受载荷  $F_1$  与  $F_2$  的作用, 且  $F_1 = 2F_2 = 5 \text{ kN}$ 。试计算梁内的最大弯曲正应力及该应力所在截面上  $K$  点处的弯曲正应力。

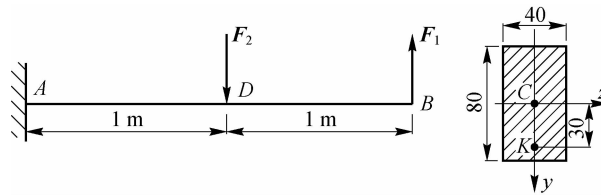


图 5-33

3. 对称截面尺寸如图 5-34 所示,  $z$  轴与  $y$  轴分别为水平及铅垂对称轴,  $C$  为截面形心。试计算截面的抗弯截面系数  $W_z$ 。

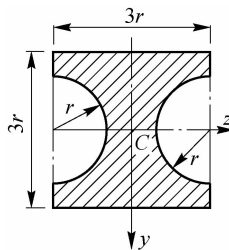


图 5-34

## 习题(二)

### 一、判断题

1. 对于等截面梁, 判断下列结论的正确性。

( ) A. 最大正应力  $|\sigma|_{\max}$  必出现在弯矩值  $|M|$  为最大的截面上。

( ) B. 最大切应力  $|\tau|_{\max}$  必出现在剪力值  $|F_s|$  为最大的截面上。

( ) C. 最大拉应力与最大压应力在数值上必定相等。



■ 材料力学

2. 图 5-38 所示为槽形截面铸铁梁,  $F = 10 \text{ kN}$ ,  $M_e = 70 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , 许用拉应力  $[\sigma_t] = 35 \text{ MPa}$ , 许用压应力  $[\sigma_c] = 120 \text{ MPa}$ 。试校核该梁的强度。

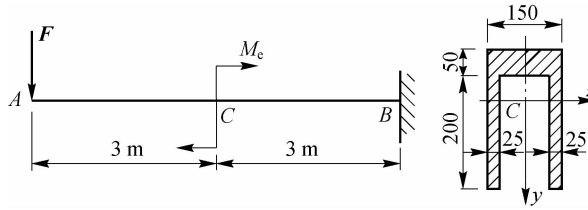


图 5-38

3. 图 5-39 所示的外伸梁承受载荷  $F$  作用。已知载荷  $F = 20 \text{ kN}$ , 许用应力  $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$ , 许用切应力  $[\tau] = 90 \text{ MPa}$ 。试选择工字钢型号。

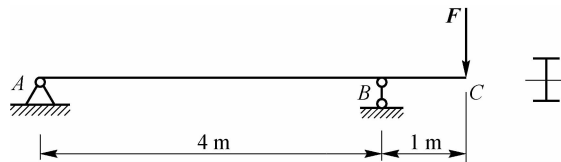


图 5-39

4. 截面为 No. 10 工字钢的梁  $AB$ , 在  $D$  点由圆钢杆  $DC$  支承, 如图 5-40 所示。已知梁及杆的  $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$ , 试求允许均布载荷  $q$  及圆杆的直径  $d$ 。

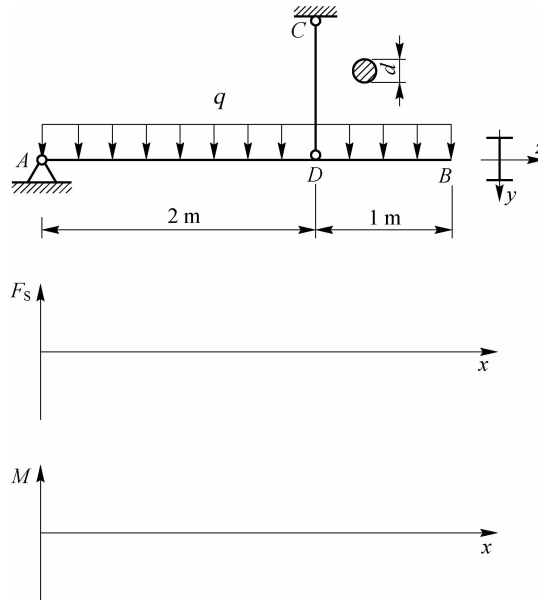


图 5-40