

## 土中应力计算

### 学习目标

- 理解土中自重应力、附加应力及基底压力的概念。
- 掌握自重应力的计算方法。
- 掌握基底应力的分布规律及计算方法。
- 掌握竖向集中荷载、矩形荷载和三角形分布的矩形荷载、圆形荷载作用下的附加应力的计算方法。
- 掌握均布线荷载和均布条形荷载作用下的附加应力的计算方法。
- 理解饱和土有效应力原理。
- 了解非饱和土有效应力原理。

土中应力是指土体在自身重力、构筑物荷载及其他因素(如土中水渗透、地震等)作用下所产生的应力。土中应力主要包括自重应力和附加应力;由土体质量引起的应力称为自重应力,附加应力是外荷载(如构筑物荷载、车辆荷载、渗透力及地震荷载等)作用下土体中所产生的应力增量。

### 3.1 土中应力计算概述

构筑物修建前,地基中存在着土体自身重力作用而产生的自重应力,因其一般随着土的形成而存在,故也称作长驻应力。对于长期形成的天然土层,土体在自重应力的作用下,其沉降早已稳定,不会产生新的变形。对于人工填土(土层的自然状态遭到破坏),土体在自重应力的作用下,有可能产生新的变形或丧失稳定性。

构筑物修建后,其荷载通过基础传递给地基,在土体中产生附加应力,从而引起地基中原有的应力状态发生改变。地基在土体附加应力的作用下,将产生新的变形,当地基变形过大时,往往会危及建筑物的正常使用和安全使用。当土中应力过大时,也会导致土的强度破坏,使土体丧失稳定性。

一般来说,自重应力可以看作地基中的初始应力,自重应力与附加应力之和(总应力)可以看作建筑物竣工后地基中的最终应力。因此,为了保证建筑物的正常使用和安全使用,需

要对地基变形和强度问题进行计算分析;而土中应力计算则是分析土体变形、强度和稳定性等问题的基础。

目前,计算土中应力的方法主要是采用弹性力学解法,把地基土视为连续的、均匀的、各向同性的半无限弹性体,这种假定同实际土体之间是有差距的,其合理性可以通过考虑下述三方面的影响进行评价。

### 1. 土的分散性

连续性是指整个物体所占据的空间都被介质填满而不留任何空隙。土是一种由三相组成的分散体,而不是连续的介质,土中存在孔隙,土中应力是通过土粒间的接触而传递的。但是,由于建筑物的基础尺寸远远大于土粒的粒径,同时我们研究的只是计算平面上的平均应力,而不是土粒间的实际受力状态,因而,研究时可以忽略土的分散性影响,近似地把土体视为连续体。

### 2. 土的非均质性和弹塑性或黏滞性

土是地质历史的产物,其在形成过程中具有各种结构和构造,呈现出不均匀性和各向异性,因此,将天然条件下的土体视为均质各向同性体,会产生一定的误差。同时,土体也不是一种理想的弹性体,而是一种具有弹塑性或黏滞性的介质,它的应力-应变( $\sigma-\epsilon$ )曲线存在明显的非线性,变形后的土体在外力卸除后不能完全恢复原状,存在较大的残余变形;但是,考虑到一般建筑物在荷载作用下,其地基土中某点的应力变化范围(应力增量范围  $\Delta\sigma$ )不是很大,可以用一条割线来近似代替相应的曲线,如图 3-1 所示,因此,当土层间的性质差异不大时,可采用弹性理论计算土中应力。

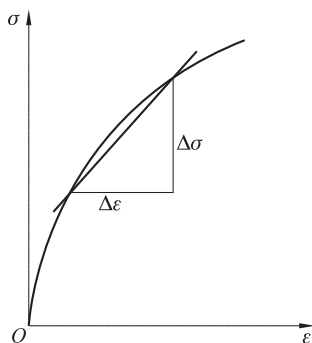


图 3-1 土的应力-应变( $\sigma-\epsilon$ )曲线

### 3. 地基土可视为半无限体

半无限体就是无限空间体的一半。由于可以认为地基土在水平方向和深度方向上相对于建筑物基础的尺寸而言是无限延伸的,因而,可以认为地基土是符合半无限体的假定的。

若对半无限土体建立图 3-2 所示的直角坐标系,则土体中任意一点  $M$  的应力状态可以用一个正六面单元体上的应力来表示。作用在单元体上的三个法向应力分量为  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_z$ , 六个剪应力分量为  $\tau_{xy}$ 、 $\tau_{yx}$ 、 $\tau_{yz}$ 、 $\tau_{zy}$ 、 $\tau_{zx}$ 、 $\tau_{xz}$ 。剪应力下标中的第一个字母表示剪应力作用面的法线方向,第二个字母表示剪应力的作用方向。值得注意的是,在土力学中,法向应力以压应力为正,以拉应力为负,这与材料力学中的符号规定有所不同。在土力学中,剪应力的正

负号规定是:当剪应力作用面的外法线方向与坐标轴的正方向一致时,则剪应力的方向与坐标轴的正方向一致时为负,反之为正;当剪应力作用面的外法线方向与坐标轴的正方向相反时,则剪应力的方向与坐标轴的正方向一致时为正,反之为负。图 3-2 所示的法向应力及剪应力均为正值。

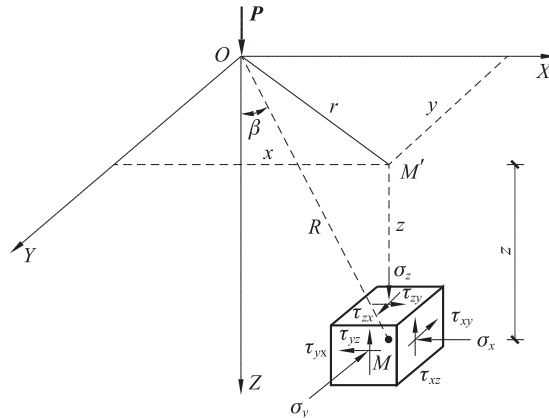


图 3-2 土体中一点的应力状态

## 3.2 自重应力的计算

若把土体简化为连续体,则在应用连续介质力学来研究土中应力的分布时,应注意土中任意截面都包括骨架和孔隙的面积,所以在计算土中应力时只需考虑土中某单位面积上的平均应力。

### 3.2.1 自重应力的基本计算公式

在计算土中竖向自重应力时,一般将地基作为半无限弹性体来考虑。假设天然地面是一个无限大的水平面,此时,土体在自重应力的作用下,其任意一竖直切面都是对称面,对称面上不存在剪应力。因此,深度  $z$  处土的竖向自重应力  $\sigma_{cz}$  (kPa) 等于单位面积  $F=1$  上土体的重力  $W$ ,如图 3-3(a) 所示。

若地基土均匀,天然重度为  $\gamma$ ,则深度  $z$  处土的竖向自重应力为

$$\sigma_{cz}F = W = \gamma zF$$

即

$$\sigma_{cz} = \gamma z \quad (3-1)$$

从式(3-1)可知,土的竖向自重应力在地面  $z=0$  处为零,随深度  $z$  的增加成线性增加,其分布图形为三角形,如图 3-3(b) 所示。

地基中除了有作用于水平面上的竖向自重应力外,还有作用在竖直面上的水平方向的侧向自重应力。由于  $\sigma_{cz}$  沿任意一水平面均匀无限分布,因而地基土在自重作用下只能产生竖向变形,而不能产生侧向变形和剪切变形。根据弹性力学可知,在这种情况下,侧向自重应力  $\sigma_{cx}$  和  $\sigma_{cy}$  应与竖向自重应力  $\sigma_{cz}$  成正比,而剪应力的分量全部为零,即

$$\sigma_{cx} = \sigma_{cy} = K_0 \gamma z \quad (3-2)$$

式中,  $K_0$  为比例系数, 称为土的侧压力系数或静止土压力系数。

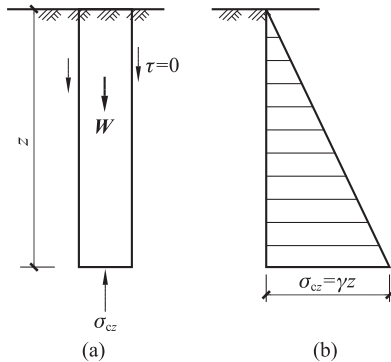


图 3-3 均匀土的自重应力分布

应该指出的是, 只有通过土粒接触点传递的粒间应力才能使土粒彼此挤紧, 从而引起土体的变形, 而且粒间应力又是影响土体强度的控制性因素, 所以粒间应力又称为有效应力。土中的竖向自重应力和侧向自重应力一般均指有效自重应力。以后为了简便起见, 常把竖向有效自重应力简称为自重应力。

### 3.2.2 几种特殊情况下的计算公式

#### 1. 土体成层的情况

地基土往往是成层分布的, 设各土层的厚度及重度分别为  $h_i$  和  $\gamma_i$ , 类似于式(3-1)的推导过程, 此时在第  $n$  层土的底面上, 土的自重应力的计算公式为

$$\sigma_{cz} = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \cdots + \gamma_n h_n = \sum_{i=1}^n \gamma_i h_i \quad (3-3)$$

每层土的重度  $\gamma_i$  不同, 因此在土体分层的情况下, 土的自重应力沿深度的分布呈折线形。

#### 2. 土中有地下水的情况

计算地下水位以下土的自重应力时, 应根据土的性质判断是否需要考虑水的浮力作用; 通常认为砂性土应该考虑浮力作用, 对黏性土则视其物理状态而定。一般认为, 若水下的黏性土的液性指数  $I_L \geq 1$ , 则土体处于流动状态, 土粒间存在大量的自由水, 此时可以认为土体受到水的浮力; 若液性指数  $I_L \leq 0$ , 则土体处于固体状态, 土中的自由水受到土粒间结合水膜的阻碍而不能传递静水压力, 故认为土体不受水的浮力; 当  $0 < I_L < 1$  时, 土体处于可塑状态, 土粒是否受到水的浮力较难确定, 在工程实践中, 通常的做法是两者均考虑, 取其不利者。若地下水位以下的土受到浮力作用, 则水下部分的土重度应取浮重度  $\gamma'$ ; 若土为非透水性的, 则可不考虑水的浮力而采用天然容重  $\gamma$ 。当计算土的自重应力时, 将水面作为一个分层的界面处理即可。

在地下水位以下, 若埋藏有岩层或只含结合水的坚硬黏土层等不透水层, 由于不透水层中不存在连续的透水通道, 不能传递静水压力, 因而其土粒不会受到水的浮力作用, 上覆水土总重只能依靠土粒来承担。所以, 不透水层顶面及顶面之下的土的自重应力应按照上覆土层的水土总重来计算。这样, 上覆土层与不透水层界面处的土的自重应力将产

生突变。

土的自重应力随深度变化的分布情况可用图 3-4 所示的应力分布图来表示。该图的纵坐标表示计算点的深度，横坐标表示自重应力值。从图 3-4 中可以看出，在同一土层中，土的自重应力分布线为直线；在多层地基中，土的自重应力分布线则为折线，转折点在土层分界面上。对于透水性发生改变的界面，土的自重应力分布线在此出现突变，如图 3-4 所示。总之，土的自重应力是随深度的增大而增大的。

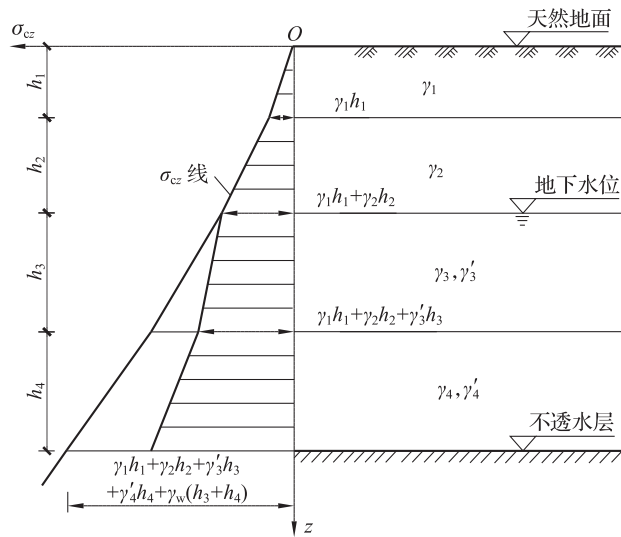


图 3-4 有地下水时的成层土自重应力分布

此外，地下水位的升降会引起土中自重应力的变化，如图 3-5 所示。对于图 3-5(a)所示的水位下降的情况，水位变化前，自重应力分布线为折线 0—1—2；水位下降后，原地下水位与变动后地下水位之间的土体有效自重应力增加，自重应力分布线变为 0—1'—2'。对于图 3-5(b)所示的水位上升的情况，水位变化前，自重应力分布线为折线 0—1—2；水位上升后，原地下水位与变动后水位之间的土体有效自重应力下降，自重应力分布线变为 0—1'—2'。

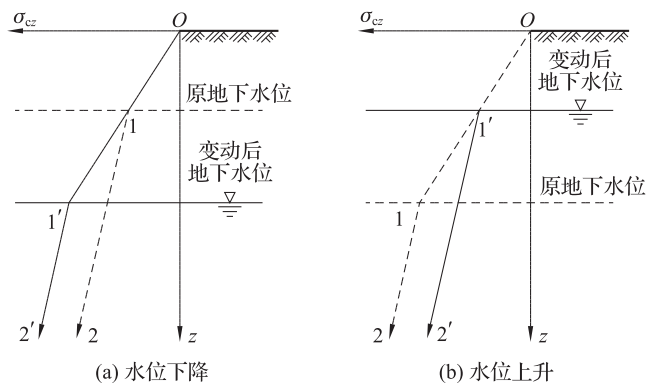


图 3-5 地下水位升降对土中自重应力的影响

上述情况在工程中经常遇到。例如，在软土地区，常因抽取地下水而使地下水位大幅度

下降,使地基中原地下水位以下的有效自重应力增大,从而造成大面积地面沉降的严重后果;又如,在人工抬高蓄水水位地区(如筑坝蓄水)或工业废水渗入地下的地区,水位上升会引起地基承载力的降低或者发生湿陷性土的塌陷现象。

**【例 3-1】** 某土层及其物理性质指标如图 3-6(a)所示,试计算土中自重应力。假设黏土层的含水量为 20%,其余条件不变。试比较这两种情况下土中自重应力的分布规律。

**【解】** (1)对于地下水位以下的细砂,需要考虑水的浮力,其有效重度为

$$\gamma'_1 = \frac{\gamma_1 (G_s - 1)}{G_s (1 + w)} = \frac{19 \times (2.69 - 1)}{2.69 \times (1 + 0.18)} = 10.1 \text{ (kN/m}^3\text{)}$$

黏土层的液性指数  $I_L = \frac{w - w_p}{w_L - w_p} = \frac{0.5 - 0.25}{0.48 - 0.25} = 1.09 > 1$ ,因此黏土层受到水的浮力,其有效重度为

$$\gamma'_2 = \frac{\gamma_2 (G_s - 1)}{G_s (1 + w)} = \frac{16.8 \times (2.74 - 1)}{2.74 \times (1 + 0.5)} = 7.1 \text{ (kN/m}^3\text{)}$$

a 点:  $z = 0, \sigma_{cz} = 0$ 。

b 点:  $z = 2 \text{ m}, \sigma_{cz} = 19 \times 2 = 38 \text{ kPa}$ 。

c 点:  $z = 5 \text{ m}, \sigma_{cz} = 38 + 10 \times 3 = 68 \text{ kPa}$ 。

d 点:  $z = 9 \text{ m}, \sigma_{cz} = 68 + 7.1 \times 4 = 96.4 \text{ kPa}$ 。

此种情况下,土中自重应力的分布如图 3-6(b)所示。

(2)若黏土层的含水量为 20%,则其液性指数  $I_L < 0$ ,故该土层不受水的浮力;但土层面上受到静水压力(砂土层中的水是砂的三相组成之一)的作用,因此,土中各点的自重应力为

①细砂层中。

a 点:  $z = 0, \sigma_{cz} = 0$ 。

b 点:  $z = 2 \text{ m}, \sigma_{cz} = 19 \times 2 = 38 \text{ kPa}$ 。

c 点:  $z = 5 \text{ m}, \sigma_{cz} = 38 + 10 \times 3 = 68 \text{ kPa}$ 。

②黏土层中。

c' 点:  $z = 5 \text{ m}, \sigma_{cz} = 38 + 10 \times 3 + 9.8 \times 3 = 97.4 \text{ kPa}$ 。

d 点:  $z = 9 \text{ m}, \sigma_{cz} = 97.4 + 16.8 \times 4 = 164.6 \text{ kPa}$ 。

此种情况下,土中自重应力的分布如图 3-6(c)所示。

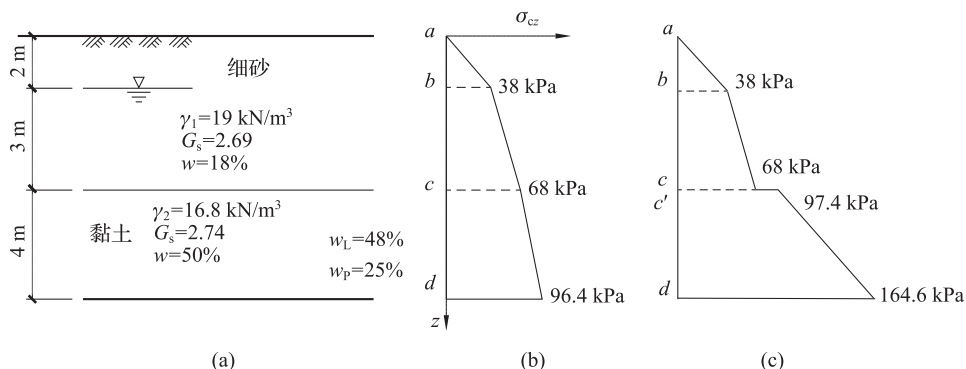


图 3-6 例 3-1 图

### 3.3 基底压力的分布及计算

建筑物的荷载是通过基础传到地基土中的。作用于基础底面并传至地基的单位面积上的压力称为基底压力。由于基底压力作用于基础与地基的接触面上,因而其实际上是一种接触压力,其反作用力即地基对基础底面的作用力,称为基底反力。既然土中的附加应力是由建筑物的荷载作用所引起的应力增量,那么在计算地基的附加应力时,就必须研究基底压力的分布规律和计算方法。

#### 3.3.1 基底压力的分布规律

基底压力的分布规律和大小与多种因素有关,如基础的形状、平面尺寸、刚度、埋置深度、基础上作用荷载的大小及土的性质等。

对于刚度很小的基础或柔性基础(基础的抗弯刚度  $EI \rightarrow 0$ ),由于它能够适应地基土的变形,故基底压力的大小和分布情况与作用在基础上的荷载的大小及分布情况相同;但基础底面的沉降则各处不同,中央大而边缘小。例如,对于由土筑成的路堤,可以近似地认为路堤本身不传递剪力,相当于一种柔性基础,由路堤自重引起的基底压力分布与路堤的断面形状相同,呈梯形,如图 3-7 所示。

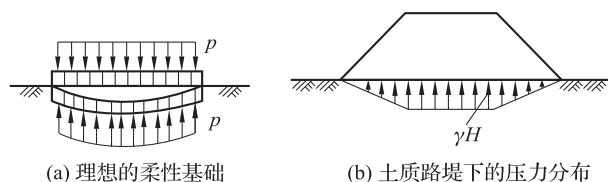


图 3-7 柔性基础的基底压力分布

对于刚性基础(基础的抗弯刚度  $EI \rightarrow \infty$ ),由于其刚度很大,不能适应地基土的变形,因而其基底压力的分布将随上部荷载的大小、基础埋置深度和土的性质而变化。刚性基础不会产生挠曲变形,在中心荷载的作用下,基底各点的沉降相同。对于建造在黏土地基表面上的条形浅基础,当受到的中心荷载较小时,基底压力的分布呈马鞍形,即中央小而边缘大,如图 3-8(a)所示;当受到的中心荷载较大时,基础边缘的应力很大,导致其临近的土体产生塑性变形,边缘处的应力不再增加,而中央部分的应力继续增大,使得基底压力重新分布而呈抛物线形,如图 3-8(b)所示。对于建造在砂土地基表面上的条形浅基础,当受到中心荷载作用时,由于砂土粒间不存在黏聚力,因而基底压力的分布近似呈抛物线形,即中间大而边缘处为零。

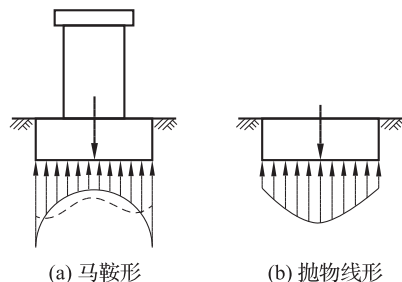


图 3-8 刚性基础的基底压力分布

### 3.3.2 基底压力的简化计算

根据弹性力学中的圣维南原理及土中实际应力的测量结果,当作用在基础上的荷载大小一定时,基底压力的分布形状对土中应力分布的影响仅局限在一定深度范围内。当距离基底的深度超过基础宽度的 1.5~2.0 倍时,基底压力分布形状对土中应力分布的影响已很不显著,此时土中应力分布主要取决于荷载合力的大小和作用点的位置。因此,从工程实用角度出发,基底压力可近似地按直线分布规律计算,即按下述材料力学公式进行简化计算。

#### 1. 中心荷载作用下的基底压力

中心荷载作用下的基础,其所受荷载的合力通过基底形心。假定基底压力均匀分布,则此时基底平均压力  $p$  按式(3-4)计算。

$$p = \frac{F+G}{A} \quad (3-4)$$

式中, $F$  为上部结构传至基础顶面的竖向力; $G$  为基础自重及其上回填土重的总重; $G = \gamma_G A d$ ,其中, $\gamma_G$  为基础及回填土的平均重度,一般取  $20 \text{ kN/m}^3$ ,但地下水位以下的部分应扣除浮力, $d$  为基础埋置深度,必须从设计地面或室内外平均设计地面算起; $A$  为基底面积,对矩形基础, $A = lb$ , $l$ 、 $b$  分别为矩形基底的长度和宽度。

对于荷载沿长度方向均匀分布的条形基础,应沿长度方向截取一单位长度的截条进行基底平均压力  $p$  的计算,应将式(3-4)中的  $A$  改为  $b$ , $F$  和  $G$  为基础截条内的相应值。

#### 2. 偏心荷载作用下的基底压力

##### 1) 单向偏心荷载作用下的基底压力

单向偏心荷载作用下的矩形基础基底压力分布如图 3-9 所示。设计时,通常取基底长边方向与偏心方向一致,此时两短边边缘的最大压力  $p_{\max}$  和最小压力  $p_{\min}$  按材料力学中的短柱的偏心受压公式计算,即

$$\left. \begin{array}{l} p_{\max} \\ p_{\min} \end{array} \right\} = \frac{F+G}{lb} \pm \frac{M}{W} \quad (3-5)$$

式中, $M$  为作用于矩形基底的力矩; $W$  为基础底面的抵抗矩,对于矩形基底, $W = bl^2/6$ ;其他符号含义同前。

把偏心荷载的偏心距  $e = \frac{M}{F+G}$  代入式(3-5),可得

$$\left. \begin{array}{l} p_{\max} \\ p_{\min} \end{array} \right\} = \frac{F+G}{lb} \left( 1 \pm \frac{6e}{l} \right) \quad (3-6)$$

由式(3-6)可知:

(1) 当  $e < l/6$  时,基底压力呈梯形分布。

(2) 当  $e = l/6$  时,基底压力呈三角形分布。

(3) 当  $e > l/6$  时,距偏心荷载较远的基底边缘的反力为负值,即  $p_{\min} < 0$ 。由于基底与地基之间不能承受拉力,此时基底与地基局部脱开,而使基底压力重新分布,因此,根据偏心荷载应与基底反力相平衡的条件,荷载合力  $F+G$  应通过三角形反力分布图的形心,由此可得基底边缘的最大压力  $p_{\max}$  为



$$p_{\max} = \frac{2(F+G)}{3bk} \quad (3-7)$$

式中,  $k$  为单向偏心荷载作用点至具有最大压力的基底边缘的距离,  $k = \frac{l}{2} - e$ 。

对于荷载沿长度方向均匀分布的条形基础, 若荷载  $F$  和  $G$  沿宽度  $b$  方向有偏心距, 则应沿长度方向截取一单位长度的截条进行基底压力的计算, 式(3-6)可转化为

$$\left. \begin{array}{l} p_{\max} \\ p_{\min} \end{array} \right\} = \frac{F+G}{b} \left( 1 \pm \frac{6e}{b} \right)$$

当  $e > b/6$  时, 式(3-7)可转化为

$$p_{\max} = \frac{2(F+G)}{3(b/2 - e)}$$

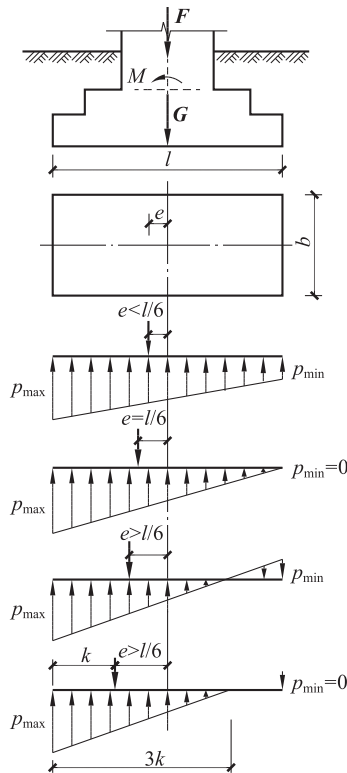


图 3-9 单向偏心荷载作用下的矩形基础基底压力分布

### 2) 双向偏心荷载作用下的基底压力

双向偏心荷载作用下的基底压力分布如图 3-10 所示。矩形基础在双向偏心荷载作用下, 若其基底最小压力  $p_{\min} \geq 0$ , 则矩形基底边缘四个角点处的压力  $p_I$ 、 $p_{II}$ 、 $p_{III}$ 、 $p_{IV}$  可按下列公式计算:

$$\left. \begin{array}{l} p_I \\ p_{III} \end{array} \right\} = \frac{F+G}{lb} \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} \quad (3-8)$$

$$\left. \begin{array}{l} p_{II} \\ p_{IV} \end{array} \right\} = \frac{F+G}{lb} \mp \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} \quad (3-9)$$

式中,  $M_x$ 、 $M_y$  分别为荷载合力对矩形基底  $X$ 、 $Y$  对称轴的力矩;  $W_x$ 、 $W_y$  分别为基础底面对  $X$ 、 $Y$  轴的抵抗矩。

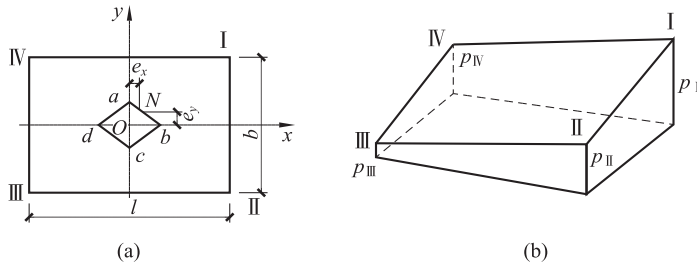


图 3-10 双向偏心荷载作用下的基底压力分布

### 3.3.3 基底附加压力的计算

在建筑物建造前,土中早已存在自重应力。基底附加压力是指导致地基中产生附加应力的那部分基底压力,是引起地基附加应力和变形的主要原因,其在数值上等于基底压力减去基底标高处原有的土中自重应力。

一般浅基础总是埋置在天然地面以下一定深度  $d$  处,该处原有的土中自重应力由于开挖基槽而卸除,因此,从建筑物建造后的基底压力中扣除基底标高处原有的土中自重应力后,才是基底平面处新增加于地基的基底附加压力。一般天然土层在自重作用下的变形早已完成,因此只有基底附加压力才会引起新的地基变形。

如图 3-11 所示,基底平均附加压力  $p_0$  按式(3-10)计算。

$$p_0 = p - \sigma_{cz} = p - \gamma_m d \quad (3-10)$$

式中,  $p$  为基底平均压力;  $\sigma_{cz}$  为基础底面处的土中自重应力,  $\sigma_{cz} = \gamma_m d$ ;  $\gamma_m$  为基础底面标高以上天然土层的加权平均重度,其中,地下水位以下的重度取有效重度,  $\gamma_m = \sum \gamma_i h_i / d$ ;  $d$  为基础埋置深度,必须从天然地面算起,对于新填土地,则应从原来天然地面算起。

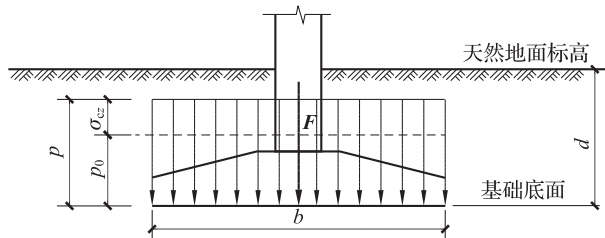


图 3-11 基底附加压力

式(3-10)表明,建筑物荷载、基础及其回填土的自重,在基底所产生的压力并不是全部传递给地基,其中一部分要“补偿”由基槽开挖所卸除的土中自重应力。基底附加压力求出后,可将其视为作用在地基表面的荷载,来计算地基中的附加应力。

有了基底附加压力,即可把它作为作用在弹性半空间表面上的局部荷载,由此计算地基中的附加应力。实际上,基底附加压力一般作用在地表以下一定深度(指浅基础的埋置深度)处,因此,假设它作用在半空间表面上所得到的解答只是近似的。不过,对于一般浅基础

来说,这种假设所造成的误差可以忽略不计。应该指出的是,当基槽或基坑的平面尺寸和深度较大时,坑底回弹是明显的,且基坑中点的回弹大于边缘点的回弹。在沉降计算中,为了适当考虑这种坑底的回弹和再压缩而增加的沉降,可以改取  $p_0 = p - \alpha \sigma_{cz}$ , 其中,  $\alpha$  为 0~1 的系数。

### 3.4 附加应力的计算及分布

地基附加应力是指新增外加荷载在土中产生的附加于原有应力之上的应力增量,它是引起地基变形和破坏的主要因素。计算地基附加应力时,一般假定地基土是各向同性的、均质的线性变形体,而且在深度和水平方向上都是无限延伸的,这样就可以直接采用弹性力学中关于弹性半空间的理论解答。实践表明,当土中压应力不太大时,直接采用弹性力学来计算附加应力已经具有足够的精度。

本节先介绍竖向集中力作用下地基附加应力的基本解,接着介绍矩形面积、圆形面积上各种分布荷载作用下的附加应力及线荷载和条形荷载作用下的附加应力计算,最后简要讨论一下地基附加应力的分布规律。

#### 3.4.1 竖向集中力作用下的附加应力计算

竖向集中力作用下的附加应力的计算方法主要有以下两种。

##### 1. 布辛奈斯克解答

在弹性半空间表面上作用一个竖向集中力时,半空间内任意点处所引起的应力和位移的弹性力学解答是由法国学者布辛奈斯克(Boussinesq)于 1885 年做出的。如图 3-2 所示,在半空间中任意点  $M(x, y, z)$  处的六个应力分量和三个位移分量的解答如下:

$$\sigma_x = \frac{3P}{2\pi} \left\{ \frac{x^2 z}{R^5} + \frac{1-2\mu}{3} \left[ \frac{R^2 - Rz - z^2}{R^3(R+z)} - \frac{x^2(2R+z)}{R^3(R+z)^2} \right] \right\} \quad (3-11)$$

$$\sigma_y = \frac{3P}{2\pi} \left\{ \frac{y^2 z}{R^5} + \frac{1-2\mu}{3} \left[ \frac{R^2 - Rz - z^2}{R^3(R+z)} - \frac{y^2(2R+z)}{R^3(R+z)^2} \right] \right\} \quad (3-12)$$

$$\sigma_z = \frac{3Pz^3}{2\pi R^5} = \frac{3P}{2\pi R^2} \cos^3 \beta \quad (3-13)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{3P}{2\pi} \left[ \frac{xyz}{R^5} - \frac{1-2\mu}{3} \frac{xy(2R+z)}{R^3(R+z)^2} \right] \quad (3-14)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\frac{3Pyz^2}{2\pi R^5} = -\frac{3Py}{2\pi R^3} \cos^2 \beta \quad (3-15)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\frac{3Pxz^2}{2\pi R^5} = -\frac{3Px}{2\pi R^3} \cos^2 \beta \quad (3-16)$$

$$u = \frac{P(1+\mu)}{2\pi E} \left[ \frac{xz}{R^3} - (1-2\mu) \frac{x}{R(R+z)} \right] \quad (3-17)$$

$$v = \frac{P(1+\mu)}{2\pi E} \left[ \frac{yz}{R^3} - (1-2\mu) \frac{y}{R(R+z)} \right] \quad (3-18)$$

$$w = \frac{P(1+\mu)}{2\pi E} \left[ \frac{z^2}{R^3} - 2(1-\mu) \frac{1}{R} \right] \quad (3-19)$$

式中,  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_z$  分别为  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向的正应力;  $\tau_{xy}$ 、 $\tau_{yz}$ 、 $\tau_{zx}$  为剪应力;  $u$ 、 $v$ 、 $w$  分别为  $M$  点沿坐标

轴 X、Y、Z 方向的位移； $P$  为作用于坐标原点  $O$  的竖向集中力； $R$  为  $M$  点至坐标原点  $O$  的距离， $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2} = z / \cos \beta$ ； $\beta$  为  $R$  线与  $Z$  坐标轴的夹角； $r$  为  $M$  点与集中力作用点的水平距离； $E$  为弹性模量（或土力学中专用的地基变形模量，以  $E_0$  代之）； $\mu$  为泊松比。

若用  $R=0$  代入以上各式，所得出的结果均为无限大，因此，所选择的计算点不应过于接近集中力的作用点。

建筑物作用于地基上的荷载总是分布在一定面积上的局部荷载，因此，理论上的集中力实际是没有的。但是，根据弹性力学的叠加原理，利用布辛奈斯克解答，可以通过积分或等代荷载法求得各种局部荷载下地基中的附加应力。

在以上六个应力分量和三个位移分量的公式中，竖向正应力  $\sigma_z$  和竖向位移  $w$  最为常用，以后有关地基附加应力的计算主要是针对  $\sigma_z$  而言的。

## 2. 等代荷载法

如果地基中某点  $M$  与局部荷载的距离比荷载面尺寸大很多，就可以用一个集中力  $P$  代替局部荷载，然后直接应用式 (3-13) 计算该点的  $\sigma_z$ 。为了计算方便，将  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$  代入式 (3-13)，得

$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{(r^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{3}{2\pi} \frac{1}{[(r/z)^2 + 1]^{5/2}} \frac{P}{z^2} \quad (3-20)$$

令  $K = \frac{3}{2\pi} \frac{1}{[(r/z)^2 + 1]^{5/2}}$ ，则式 (3-20) 可改写为

$$\sigma_z = K \frac{P}{z^2} \quad (3-21)$$

式中， $K$  为集中力作用下的地基竖向附加应力系数，简称集中应力系数，根据  $r/z$  值由表 3-1 查用。

表 3-1 集中力作用下的附加应力系数  $K$

$r/z$	$K$	$r/z$	$K$	$r/z$	$K$	$r/z$	$K$	$r/z$	$K$
0.00	0.477 5	0.50	0.273 3	1.00	0.034 4	1.50	0.025 1	2.00	0.008 5
0.05	0.474 5	0.55	0.246 6	1.05	0.074 4	1.55	0.022 4	2.20	0.005 8
0.10	0.465 7	0.60	0.221 4	1.10	0.065 8	1.60	0.020 0	2.40	0.004 0
0.15	0.451 6	0.65	0.197 8	1.15	0.058 1	1.65	0.017 9	2.60	0.002 9
0.20	0.432 9	0.70	0.176 2	1.20	0.051 3	1.70	0.016 0	2.80	0.002 1
0.25	0.410 3	0.75	0.156 5	1.25	0.045 4	1.75	0.014 4	3.00	0.001 5
0.30	0.384 9	0.80	0.138 6	1.30	0.040 2	1.80	0.012 9	3.50	0.000 7
0.35	0.357 7	0.85	0.122 6	1.35	0.035 7	1.85	0.011 6	4.00	0.000 4
0.40	0.329 4	0.90	0.108 3	1.40	0.031 7	1.90	0.010 5	4.50	0.000 2
0.45	0.301 1	0.95	0.095 6	1.45	0.028 2	1.95	0.009 5	5.00	0.000 1

若干个竖向集中力  $P_i (i=1, 2, \dots, n)$  作用在地基表面上，按叠加原理可知，地面下深度  $z$  处某点  $M$  的附加应力  $\sigma_z$  应为各集中力单独作用时在  $M$  点所引起的附加应力的总和，即

$$\sigma_z = \sum_{i=1}^n K_i \frac{P_i}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{i=1}^n K_i P_i \quad (3-22)$$

式中,  $K_i$  为第  $i$  个集中应力系数, 根据  $r_i/z$  值由表 3-1 查得, 其中,  $r_i$  是第  $i$  个集中荷载作用点到  $M$  点的水平距离。

由式(3-21)可以得出在集中荷载作用下附加应力的分布规律, 如图 3-12 所示。

(1) 在集中力  $P$  作用线上的点, 即当  $r=0$  时, 附加应力随着深度  $z$  的增加而迅速减小。

(2) 不在集中力  $P$  作用线上的点, 即当  $r>0$  时, 附加应力由零开始增加, 到一定深度时达到最大值, 之后迅速减小。

(3) 在同一水平面上, 即当  $z>0$  时, 附加应力在集中力  $P$  的作用线上最大, 并随着与集中力  $P$  的作用线的距离  $r$  的增加而减小。

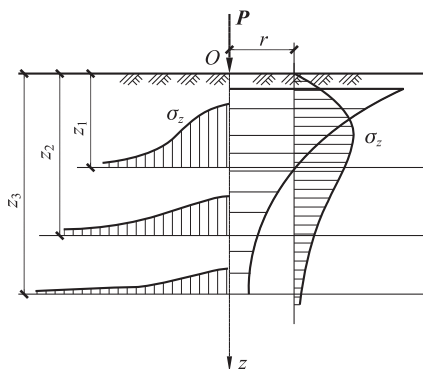


图 3-12 竖向集中荷载作用下的附加应力分布

如果在空间上将附加应力值相同的点连接成曲面, 则可以得到图 3-13 所示的  $\sigma_z$  等值线分布图, 其空间曲面的形状如泡状, 所以也称为应力泡。图 3-13 表明, 集中力  $P$  在地基中引起的附加应力向四周、向下无限扩散, 其数值逐渐减小。

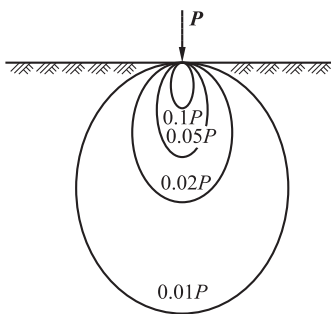


图 3-13  $\sigma_z$  等值线分布图

### 3.4.2 矩形荷载和圆形荷载作用下的附加应力计算

#### 1. 均布矩形荷载作用情况

设矩形荷载面的长度、宽度分别为  $l$  和  $b$ , 作用于地基上的竖向均布荷载(如中心荷载下的基底附加压力)为  $p_0$ 。先以积分法求矩形荷载面角点下的地基附加应力, 然后运用角点法求得矩形面积均布荷载作用下任意点的地基附加应力。

如图 3-14 所示, 以矩形荷载面角点为坐标原点  $O$ , 在荷载面内坐标为  $(x, y)$  处取一微面

积  $dxdy$ , 并将其上的分布荷载以集中力  $p_0 dxdy$  来代替, 则在角点  $O$  下任意深度  $z$  的  $M$  处由该集中力引起的竖向附加应力  $d\sigma_z$ , 按式(3-13)为

$$d\sigma_z = \frac{3}{2\pi} \frac{p_0 z^3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} dxdy \quad (3-23)$$

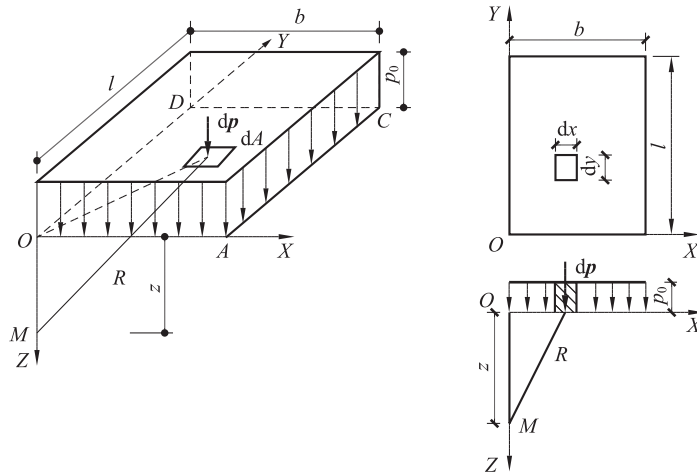


图 3-14 均布矩形荷载角点下的附加应力  $\sigma_z$

将  $d\sigma_z$  对整个矩形荷载面积  $A$  进行积分, 即得角点下的竖向附加应力的表达式为

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \iint_A d\sigma_z = \frac{3p_0 z^3}{2\pi} \iint_0^l \int_0^b \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} dxdy \\ &= \frac{p_0}{2\pi} \left[ \frac{lbz(l^2 + b^2 + 2z^2)}{(l^2 + z^2)(b^2 + z^2)\sqrt{l^2 + b^2 + z^2}} + \arcsin \frac{lb}{\sqrt{(l^2 + b^2)(b^2 + z^2)}} \right] \end{aligned} \quad (3-24)$$

令

$$K_c = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{lbz(l^2 + b^2 + 2z^2)}{(l^2 + z^2)(b^2 + z^2)\sqrt{l^2 + b^2 + z^2}} + \arcsin \frac{lb}{\sqrt{(l^2 + z^2)(b^2 + z^2)}} \right]$$

得

$$\sigma_z = K_c p_0 \quad (3-25)$$

又令  $m=l/b, n=z/b$  ( $b$  为荷载面的短边宽度), 则

$$K_c = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{mn(m^2 + 2n^2 + 1)}{(m^2 + n^2)(1 + n^2)\sqrt{m^2 + n^2 + 1}} + \arcsin \frac{m}{\sqrt{(m^2 + n^2)(1 + n^2)}} \right]$$

式中,  $K_c$  为均布矩形荷载角点下的竖向附加应力系数, 简称角点应力系数, 可根据  $m$  及  $n$  值由表 3-2 查得。

表 3-2 均布的矩形荷载角点下的竖向附加应力系数

$z/b$	$l/b$									
	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	3.0	4.0	5.0	$\geq 10$
0.0	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250
0.2	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249

续表

$z/b$	$l/b$									
	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	3.0	4.0	5.0	$\geq 10$
0.4	0.240	0.242	0.243	0.243	0.244	0.244	0.244	0.244	0.244	0.244
0.6	0.223	0.228	0.230	0.232	0.232	0.233	0.234	0.234	0.234	0.234
0.8	0.200	0.208	0.212	0.215	0.217	0.218	0.220	0.220	0.220	0.220
1.0	0.175	0.185	0.191	0.196	0.198	0.200	0.203	0.204	0.204	0.205
1.2	0.152	0.163	0.171	0.176	0.179	0.182	0.187	0.188	0.189	0.189
1.4	0.131	0.142	0.151	0.157	0.161	0.164	0.171	0.173	0.174	0.174
1.6	0.112	0.124	0.133	0.140	0.145	0.148	0.157	0.159	0.160	0.160
1.8	0.097	0.108	0.117	0.124	0.129	0.133	0.143	0.146	0.147	0.148
2.0	0.084	0.095	0.103	0.110	0.116	0.120	0.131	0.135	0.136	0.137
2.5	0.060	0.069	0.077	0.083	0.089	0.093	0.106	0.111	0.114	0.115
3.0	0.045	0.052	0.058	0.064	0.069	0.073	0.087	0.093	0.096	0.099
4.0	0.027	0.032	0.036	0.040	0.044	0.048	0.060	0.067	0.071	0.076
5.0	0.018	0.021	0.024	0.027	0.030	0.033	0.044	0.050	0.055	0.061
7.0	0.010	0.011	0.013	0.015	0.016	0.018	0.025	0.031	0.035	0.043
9.0	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010	0.011	0.016	0.020	0.024	0.032
10.0	0.005	0.006	0.007	0.007	0.008	0.009	0.013	0.017	0.020	0.028

对于均布矩形荷载附加应力计算点不位于角点下的情况,可利用式(3-25)以角点法求得。图 3-15 中列出了计算点不位于角点的四种情况(在图中  $M'$  点以下任意深度  $z$  处)。计算时,通过  $M'$  点把荷载面分成若干个矩形,这样, $M'$  点就必然是划分出的各个矩形的公共角点,然后再按式(3-25)计算每个矩形角点下同一深度  $z$  处的附加应力  $\sigma_z$ ,并求其代数和。

四种情况的算式分别如下:

(1)  $M'$  点在荷载面内,如图 3-15(a)所示。

$$\sigma_z = (K_{cI} + K_{cII} + K_{cIII} + K_{cIV}) p_0$$

式中, $K_{cI}$ 、 $K_{cII}$ 、 $K_{cIII}$ 、 $K_{cIV}$  分别为相应于面积 I、II、III、IV 的角点应力系数。

(2)  $M'$  点在荷载面边缘,如图 3-15(b)所示。

$$\sigma_z = (K_{cI} + K_{cII}) p_0$$

(3)  $M'$  点在荷载面边缘外侧,如图 3-15(c)所示,此时,荷载面  $abcd$  可看成是由 I ( $fbgM'$ ) 与 II ( $fahM'$ ) 之差和 III ( $M'gce$ ) 与 IV ( $M'hde$ ) 之差合成的,所以

$$\sigma_z = (K_{cI} - K_{cII} + K_{cIII} - K_{cIV}) p_0$$

(4)  $M'$  点在荷载面角点外侧,如图 3-15(d)所示,此时,荷载面  $abcd$  可看成是由 I ( $M'hce$ )、IV ( $M'gaf$ ) 两个面积中扣除 II ( $M'hbf$ ) 和 III ( $M'gde$ ) 而成的,所以

$$\sigma_z = (K_{cI} - K_{cII} - K_{cIII} + K_{cIV}) p_0$$

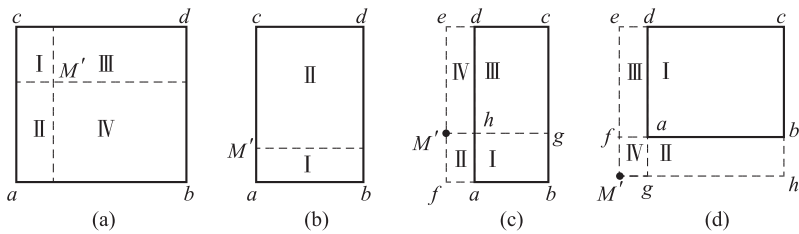


图 3-15 以角点法计算均布矩形荷载下的附加应力  $\sigma_z$

**【例 3-2】** 以角点法计算图 3-16(a) 所示的矩形基础甲的基底中心点垂线下不同深度处的地基附加应力  $\sigma_z$  的分布, 并考虑两相邻基础乙的影响(两相邻柱距为 6 m, 荷载同基础甲)。

**【解】** (1) 计算基础甲对应于荷载标准值时(用于计算地基变形)的基底平均附加压力。基础及其上回填土的总重为

$$G = \gamma_G A d = 20 \times 5 \times 4 \times 1.5 = 600 \text{ (kN)}$$

基底平均压力为

$$p = \frac{F + G}{A} = \frac{1\ 940 + 600}{5 \times 4} = 127 \text{ (kPa)}$$

基底处的土中自重应力为

$$\sigma_z = \gamma_0 d = 18 \times 1.5 = 27 \text{ (kPa)}$$

基底平均附加压力为

$$p_0 = p - \sigma_z = 127 - 27 = 100 \text{ (kPa)}$$

(2) 计算基础甲中心点  $o$  下由本基础荷载引起的  $\sigma_z$ , 如图 3-16(b) 所示, 基底中心点  $o$  可看成是四个相等的小矩形荷载面 I ( $oabc$ ) 的公共角点, 其长宽比  $l/b = 2.5/2 = 1.25$ , 取深度  $z = 0, 1 \text{ m}, 2 \text{ m}, 3 \text{ m}, 4 \text{ m}, 5 \text{ m}, 6 \text{ m}, 7 \text{ m}, 8 \text{ m}, 10 \text{ m}$  各计算点, 利用相应的  $z/b$  可以从表 3-2 中查出附加应力系数  $K_{c1}$  值。 $\sigma_z$  的计算结果列于表 3-3 中, 根据计算资料绘出  $\sigma_z$  的分布图, 如图 3-16(d) 所示。

表 3-3  $\sigma_z$  的计算结果 1

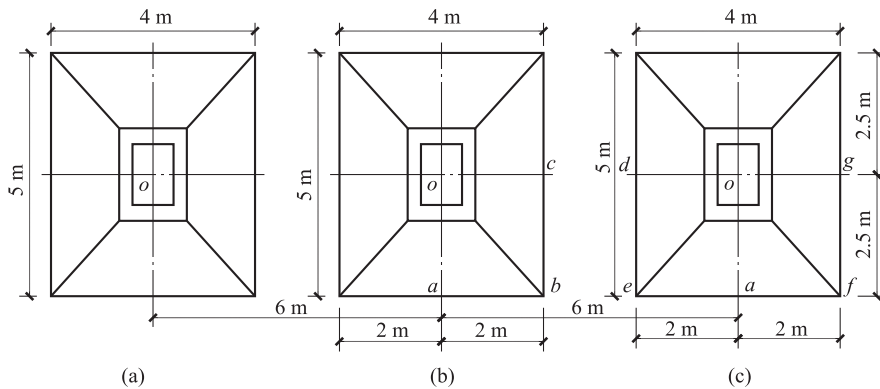
点	$l/b$	$z/\text{m}$	$z/b$	$K_c$	$\sigma_z/\text{kPa}$ ( $\sigma_z = 4K_{c1} p_0$ )
0	1.25	0	0	0.250	$4 \times 0.250 \times 100 = 100$
1	1.25	1	0.5	0.235	$4 \times 0.235 \times 100 = 94$
2	1.25	2	1	0.187	$4 \times 0.187 \times 100 = 75$
3	1.25	3	1.5	0.135	$4 \times 0.135 \times 100 = 54$
4	1.25	4	2	0.097	$4 \times 0.097 \times 100 = 39$
5	1.25	5	2.5	0.071	$4 \times 0.071 \times 100 = 28$
6	1.25	6	3	0.054	$4 \times 0.054 \times 100 = 22$
7	1.25	7	3.5	0.042	$4 \times 0.042 \times 100 = 17$
8	1.25	8	4	0.032	$4 \times 0.032 \times 100 = 13$
9	1.25	10	5	0.022	$4 \times 0.022 \times 100 = 9$



(3) 计算基础甲中心点  $o$  下由两相邻基础乙的荷载所引起的  $\sigma_z$ , 如图 3-16(c) 所示, 此时中心点  $o$  可看成是四个与 I ( $oafg$ ) 相同的矩形和另四个与 II ( $oaed$ ) 相同的矩形的公共角点, 其长宽比  $l/b$  分别为  $8/2.5=3.2$  和  $4/2.5=1.6$ 。同样利用表 3-2 可分别查得  $K_{cI}$  和  $K_{cII}$ ,  $\sigma_z$  的计算结果见表 3-4,  $\sigma_z$  的分布图如图 3-16(d) 所示。

表 3-4  $\sigma_z$  的计算结果 2

点	$l/b$		$z/m$	$z/b$	$K_c$		$\sigma_z/\text{kPa}$ $\sigma_z = (K_{cI} - K_{cII}) p_0$
	I ( $oafg$ )	II ( $oaed$ )			$K_{cI}$	$K_{cII}$	
0	3.2	1.6	0	0	0.250	0.250	$4 \times (0.250 - 0.250) \times 100 = 0$
1	3.2	1.6	1	0.4	0.244	0.243	$4 \times (0.244 - 0.243) \times 100 = 0.4$
2	3.2	1.6	2	0.8	0.220	0.215	$4 \times (0.220 - 0.215) \times 100 = 2.0$
3	3.2	1.6	3	1.2	0.187	0.176	$4 \times (0.187 - 0.176) \times 100 = 4.4$
4	3.2	1.6	4	1.6	0.157	0.140	$4 \times (0.157 - 0.140) \times 100 = 6.8$
5	3.2	1.6	5	2.0	0.132	0.110	$4 \times (0.132 - 0.110) \times 100 = 8.8$
6	3.2	1.6	6	2.4	0.112	0.088	$4 \times (0.112 - 0.088) \times 100 = 9.6$
7	3.2	1.6	7	2.8	0.095	0.071	$4 \times (0.095 - 0.071) \times 100 = 9.6$
8	3.2	1.6	8	3.2	0.082	0.058	$4 \times (0.082 - 0.058) \times 100 = 9.6$
9	3.2	1.6	10	4.0	0.061	0.040	$4 \times (0.061 - 0.040) \times 100 = 8.4$



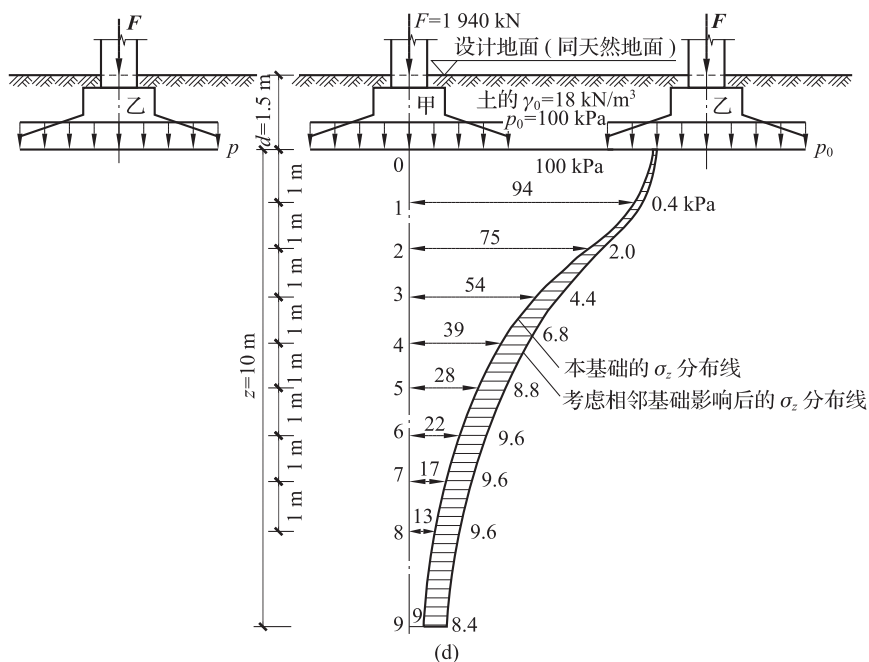


图 3-16 例 3-2 图

## 2. 三角形分布的矩形荷载作用情况

设竖向荷载沿矩形面积一边  $b$  方向上呈三角形分布(沿另一边  $l$  的荷载分布不变), 荷载的最大值为  $p_0$ , 若取荷载零值边的角点 1 为坐标原点  $O$ (见图 3-17), 则可将荷载面内某点  $(x, y)$  处所取微面积  $dx dy$  上的分布荷载以集中力  $\frac{x}{b} p_0 dx dy$  代替。角点 1 下深度  $z$  的  $M$  点由该集中力引起的附加应力  $d\sigma_z$ , 按式(3-13)为

$$d\sigma_z = \frac{3}{2\pi b} \frac{p_0 x z^3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} dx dy$$

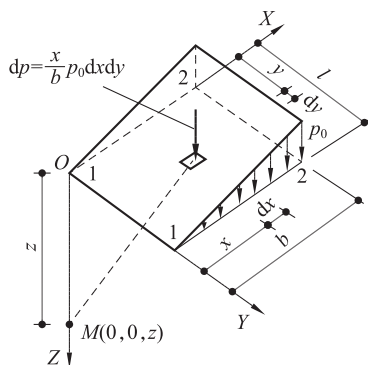


图 3-17 三角形分布矩形荷载角点下的  $\sigma_z$

在对整个矩形荷载面积进行积分后得角点 1 下任意深度  $z$  处的竖向附加应力  $\sigma_z$  为

$$\sigma_z = K_{t1} p_0 \quad (3-26)$$

式中

$$K_{11} = \frac{mn}{2\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}} - \frac{n^2}{(1+n^2)\sqrt{m^2+n^2+1}} \right]$$

同理,还可求得荷载最大值边的角点 2 下任意深度  $z$  处的竖向附加应力  $\sigma_z$  为

$$\sigma_z = K_{12} p_0 = (K_c - K_{11}) p_0 \quad (3-27)$$

$K_{11}$  和  $K_{12}$  均为  $m=l/b$  和  $n=z/b$  的函数,可由表 3-5 查用。必须注意,上述  $b$  不是指基础的宽度,而是沿三角形分布荷载方向的边长。

表 3-5 三角形分布的矩形荷载角点下的竖向附加应力系数  $K_{11}$  和  $K_{12}$

$z/b$	$l/b$									
	0.2		0.4		0.6		0.8		1.0	
	点 1	点 2	点 1	点 2	点 1	点 2	点 1	点 2	点 1	点 2
0.0	0.000 0	0.250 0	0.000 0	0.250 0	0.000 0	0.250 0	0.000 0	0.250 0	0.000 0	0.250 0
0.2	0.022 3	0.182 1	0.028 0	0.211 5	0.029 6	0.216 5	0.030 1	0.217 8	0.030 4	0.218 2
0.4	0.026 9	0.109 4	0.042 0	0.160 4	0.048 7	0.178 1	0.051 7	0.184 4	0.053 1	0.187 0
0.6	0.025 9	0.070 0	0.044 8	0.116 5	0.056 0	0.140 5	0.062 1	0.152 0	0.065 4	0.157 5
0.8	0.023 2	0.048 0	0.042 1	0.085 3	0.055 3	0.109 3	0.063 7	0.123 2	0.068 8	0.131 1
1.0	0.020 1	0.034 6	0.037 5	0.063 8	0.050 8	0.085 2	0.060 2	0.099 6	0.066 6	0.108 6
1.2	0.017 1	0.026 0	0.032 4	0.049 1	0.045 0	0.067 3	0.054 6	0.080 7	0.061 5	0.090 1
1.4	0.014 5	0.020 2	0.027 8	0.038 6	0.039 2	0.054 0	0.048 3	0.066 1	0.055 4	0.075 1
1.6	0.012 3	0.016 0	0.023 8	0.031 0	0.033 9	0.044 0	0.042 4	0.054 7	0.049 2	0.062 8
1.8	0.010 5	0.013 0	0.020 4	0.025 4	0.029 4	0.036 3	0.037 1	0.045 7	0.043 5	0.053 4
2.0	0.009 0	0.010 8	0.017 6	0.021 1	0.025 5	0.030 4	0.032 4	0.038 7	0.038 4	0.045 6
3.0	0.004 6	0.005 1	0.009 2	0.010 0	0.013 5	0.014 8	0.017 6	0.019 2	0.021 4	0.023 3
5.0	0.001 8	0.001 9	0.003 6	0.003 8	0.005 4	0.005 6	0.007 1	0.007 4	0.008 8	0.009 1
7.0	0.000 9	0.001 0	0.001 9	0.001 9	0.002 8	0.002 9	0.003 8	0.003 8	0.004 7	0.004 7
10.0	0.000 5	0.000 4	0.000 9	0.001 0	0.001 4	0.001 4	0.001 9	0.001 9	0.002 3	0.002 4

$z/b$	$l/b$									
	1.2		1.4		1.6		1.8		2.0	
	点 1	点 2	点 1	点 2	点 1	点 2	点 1	点 2	点 1	点 2
0.0	0.000 0	0.250 0	0.000 0	0.250 0	0.000 0	0.250 0	0.000 0	0.250 0	0.000 0	0.250 0
0.2	0.030 5	0.218 4	0.030 5	0.218 5	0.030 6	0.218 5	0.003 6	0.218 5	0.030 6	0.218 5
0.4	0.053 9	0.188 1	0.054 3	0.188 6	0.054 5	0.188 9	0.054 6	0.189 1	0.054 7	0.189 2
0.6	0.067 3	0.160 2	0.068 4	0.161 6	0.069 0	0.162 5	0.069 4	0.163 0	0.069 6	0.163 3
0.8	0.072 0	0.135 5	0.073 9	0.138 1	0.075 1	0.139 6	0.075 9	0.140 5	0.076 4	0.141 2
1.0	0.070 8	0.114 3	0.073 5	0.117 6	0.075 3	0.120 2	0.076 6	0.121 5	0.077 4	0.122 5
1.2	0.066 4	0.096 2	0.069 8	0.100 7	0.072 1	0.103 7	0.073 8	0.105 5	0.074 9	0.106 9