第八章

# 向量代数与空间解析几何

## 习题 8-1

1.化简 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+5\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5}\right)$.

**解** $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+5(-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\frac{5}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{a}-\frac{5}{2}\boldsymbol{b}$.

2.已知 $\boldsymbol{a}=(2,-3,5)$,$\boldsymbol{b}=(-3,1,-4)$,求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,$|\boldsymbol{a}|$,$8\boldsymbol{a}$.

**解** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2-3,\ -3+1,\ 5-4)=(-1,-2,1)$;

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2+3,-3-1,5+4)=(5,-4,9)$;

$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+5^2}=\sqrt{38}$;

$8\boldsymbol{a}=(2\times8,-3\times8,\ 5\times8)=(16,\ -24,\ 40)$.

3.求解以向量为未知元的线性方程组 $\begin{cases}5\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a},\\3\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b},\end{cases}$ 其中 $\boldsymbol{a}=(2,1,2)$,$\boldsymbol{b}=(-1,1,-2)$.

**解** 解方程组得 $\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{y}=5\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}$,即

$\boldsymbol{x}=(4,2,4)-(-3,3,-6)=(7,-1,10)$,

$\boldsymbol{y}=(-5,5,-10)-(6,3,6)=(-11,2,-16)$.

4.在平行四边形 $ABCD$ 中,设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{MA}$,$\overrightarrow{MB}$,$\overrightarrow{MC}$,$\overrightarrow{MD}$,其中 $M$ 是平行四边形对角线的交点.

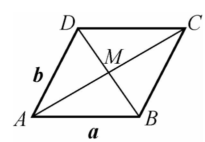

图 8-1

**解** 如图 8-1 所示,$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,

$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,

$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,

$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

5.求点 $A(2,-3,-1)$ 关于 $xOy$ 面,$zOx$ 面及原点 $O$ 的对称点.

**解** 点 $A$ 关于 $xOy$ 面的对称点为 $(2,-3,1)$,

关于 $zOx$ 面的对称点为 $(2,3,-1)$,

关于原点 $O$ 的对称点为 $(-2,3,1)$.

6.求点 $M(4,-3,5)$ 与原点及各坐标轴、坐标面间的距离.

**解** 点 $M$ 与原点的距离为 $\sqrt{4^2+(-3)^2+5^2}=5\sqrt{2}$,

与 $x$ 轴的距离为 $\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$,

与 $y$ 轴的距离为 $\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$,

与 $z$ 轴的距离为 $\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$,

与 $xOy$ 面的距离为 5,

与 $yOz$ 面的距离为 4,

与 $xOz$ 面的距离为 3.

7.设 $P$ 在 $x$ 轴上,它到 $P_1(0,\sqrt{2},3)$ 的距离为到点 $P_2(0,1,-1)$ 的距离的 2 倍,求点 $P$ 的坐标.

**解** 设 $P$ 的坐标为 $(x,0,0)$,则 $P$ 到 $P_1$ 的距离为 $\sqrt{x^2+2+9}$,到 $P_2$ 的距离为 $\sqrt{x^2+1+1}$,故

$$\sqrt{x^2+11}=2\sqrt{x^2+2},$$

则 $x=\pm 1$.

因此 $P$ 的坐标为 $(1,0,0)$ 或 $(-1,0,0)$.

8.在 $z$ 轴上求一点 $M$,使点 $M$ 到点 $A(1,0,2)$ 和到点 $B(1,-3,1)$ 的距离相等.

**解** 设 $M$ 的坐标为 $(0,0,x)$,则

$$\sqrt{1+0+(x-2)^2}=\sqrt{1+9+(x-1)^2},$$

解得 $x=-3$.

因此 $M$ 的坐标为 $(0,0,-3)$.

9.设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$,求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在各轴上的投影及在各轴上的分向量.

**解** 由题意得

$$\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}=12\boldsymbol{i}+20\boldsymbol{j}+32\boldsymbol{k}+6\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{j}-21\boldsymbol{k}-5\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k},$$

所以 $\boldsymbol{a}$ 在 $x$ 轴上的投影为 13,分向量为 $13\boldsymbol{i}$;在 $y$ 轴上的投影为 7,分向量为 $7\boldsymbol{j}$;在 $z$ 轴上的投影为 15,分向量为 $15\boldsymbol{k}$.

10. 设点 $A$ 位于第Ⅴ卦限,向径$\overrightarrow{OA}$与 $x$ 轴、$y$ 轴的夹角依次为$\frac{\pi}{3}$和$\frac{\pi}{4}$,且$|\overrightarrow{OA}|=8$,求点 $A$ 的坐标.

**解** 设 $A$ 的坐标为$(x,y,z)$,$(x>0,\ y>0,\ z<0)$,则

$$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=8.$$

因为$\overrightarrow{OA}$与 $x$ 轴夹角为$\frac{\pi}{3}$,所以

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{8},$$

解得 $x=4$.

因$\overrightarrow{OA}$与 $y$ 轴夹角为$\frac{\pi}{4}$, 所以

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{y}{8},$$

解得 $y=4\sqrt{2}$, 因为点 $A$ 位于第Ⅴ卦限,所以 $z<0$, 故 $z=-\sqrt{64-x^2-y^2}=-4$.

因此点 $A$ 的坐标为$(4,4\sqrt{2},-4)$.

11. 一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$,它在 $x$ 轴、$y$ 轴和 $z$ 轴上的投影依次为 $4,-4$ 和 7. 求这个向量的起点 $A$ 的坐标.

**解** 根据题意,$A$ 的坐标为$(2-4,-1+4,7-7)=(-2,3,0)$.

## 习题 8-2

1. 已知三点 $M(1,2,3)$,$A(2,3,3)$,$B(1,2,4)$,求$\angle AMB$.

**解** 根据题意可得$\overrightarrow{MA}=(1,1,0)$, $\overrightarrow{MB}=(0,0,1)$,则

$$|\overrightarrow{MA}|=\sqrt{2},\ |\overrightarrow{AB}|=1.$$

因此 $\cos\angle AMB=\dfrac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}|\cdot|\overrightarrow{MB}|}=0$,故$\angle AMB=\frac{\pi}{2}$.

2. 求向量 $\boldsymbol{a}=(4,-3,4)$在向量 $\boldsymbol{b}=(2,2,1)$上的投影.

**解** 根据题意可得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4\times2-3\times2+4\times1=6,$$

$$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3,$$

所以 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为$\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=2$.

3.设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为单位向量,且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

**解** 由题意知

$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1,\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0},$$

所以

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0,$$

因此可得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2)=-\frac{3}{2}.$$

4.设 $\boldsymbol{a}=(3,5,-2)$,$\boldsymbol{b}=(2,1,4)$,问 $\lambda$ 与 $\mu$ 有怎样的关系,能使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 $z$ 轴垂直?

**解** 由题意知

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=(3\lambda+2\mu,5\lambda+\mu,-2\lambda+4\mu),$$

要使 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 $z$ 轴垂直,须使 $-2\lambda+4\mu=0$,故 $\lambda=2\mu$.

5.设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

**解** $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$.

6.设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,求:

(1)$(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;　　(2)$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦.

**解** (1)$(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}=-6\times3+2\times6-4\times3=-18$;

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}.$$

(2)$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{14}$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{6}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3-2+2=3$,故 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦为

$$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{3}{2\sqrt{21}}.$$

7.已知四点 $A(1,2,3)$,$B(5,-1,7)$,$C(1,1,1)$,$D(3,3,2)$,求:

(1)$\mathrm{prj}_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$;　　(2)与$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$同时垂直的单位向量.

**解** (1)由题意可得$\overrightarrow{AB}=(4,-3,4)$,$\overrightarrow{CD}=(2,2,1)$,$|\overrightarrow{CD}|=3$,则

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|}=\frac{8-6+4}{3}=2.$$

(2)由题意可得$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(-11,4,14)$.

由向量积的定义知$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}$与$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$同时垂直,则所求向量可取为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\pm(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD})}{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}|}=\frac{\pm(-11,4,14)}{\sqrt{(-11)^2+4^2+14^2}}$$
$$=\pm\left(\frac{-11}{3\sqrt{37}}\boldsymbol{i}+\frac{4}{3\sqrt{37}}\boldsymbol{j}+\frac{14}{3\sqrt{37}}\boldsymbol{k}\right).$$

8. 向量 $\boldsymbol{d}$ 垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(2,3,-1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$,且与 $\boldsymbol{c}=(2,-1,1)$ 的数量积为$-6$,求向量 $\boldsymbol{d}$.

**解** 由题意得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=(7,-7,-7).$$

由向量积的定义知 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 都垂直,因此可以设 $\boldsymbol{d}=(7x, -7x, -7x)$,则

$$\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{c}=14x+7x-7x=14x=-6,$$

解得 $x=-\frac{3}{7}$, 故 $\boldsymbol{d}=(-3,3,3)$.

9. 向量 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 分别垂直于向量 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$,求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

**解** 由题意得

$$(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})=7|\boldsymbol{a}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15|\boldsymbol{b}|^2=0,$$
$$(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})=7|\boldsymbol{a}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8|\boldsymbol{b}|^2=0,$$

可解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2$, 代入上述方程得

$$|\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{b}|^2,$$

则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦 $\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$,故 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

10. 在顶点为 $A(1,-1,2)$,$B(5,-6,2)$和 $C(1,3,-1)$的三角形中,求 $AC$ 边上的高 $BD$.

**解** 由题意得

$$|\overrightarrow{AB}|=(4,-5,0),|\overrightarrow{AC}|=(0,4,-3),$$

则

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}=(15,12,16),$$

于是

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{15^2+12^2+16^2}=\frac{25}{2},$$

故 $BD=\dfrac{2\times S_{\triangle ABC}}{|\overrightarrow{AC}|}=5$.

11. 设$[\boldsymbol{abc}]=2$,试求$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$.

**解** $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$

$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$

$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$

$=2+0+0+0+0+2=4$.

12. 已知 $A(1,2,0)$,$B(2,3,1)$,$C(4,2,2)$,$M(x,y,z)$四点共面,求点 $M$ 的坐标 $x,y,z$ 所满足的坐标关系式.

**解** 由题意得

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AM}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ x-1 & y-2 & z\end{vmatrix},$$

$$=-2y+4+2x-2-3z+3y-6=2x+y-3z-4=0,$$

故所求关系式为 $2x+y-3z=4$.

## 习题 8-3

1. 求过点$(1,0,-1)$且平行于平面 $x+2y-z+8=0$ 的平面方程.

**解** 根据题意设所求平面方程为

$$x+2y-z+a=0.$$

因平面过点$(1,0,-1)$,则

$$1+0+1+a=0,\ a=-2,$$

故平面方程为 $x+2y-z-2=0$.

2. 指出下列平面的特殊性质,并作图:

(1) $3x-2=0$;　　(2) $4y-7z=0$;

(3) $2x+3y-6=0$;　　(4) $x+2y-z=0$.

**解** (1)该平面平行于 $yOz$ 平面,且过点$\left(\dfrac{2}{3},0,0\right)$,图形如图 8-2 所示.

(2)该平面经过 $x$ 轴(过原点且平行于 $x$ 轴),且过点$(0,7,4)$,图形如图 8-3 所示.

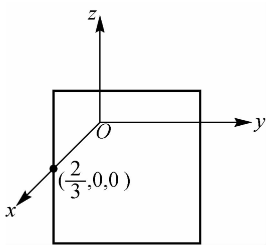


图 8-2

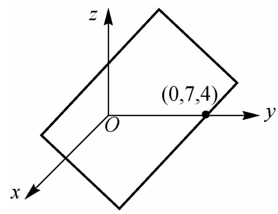


图 8-3

(3)该平面平行于 $z$ 轴,且过点(3,0,0)和(0,2,0),图形如图 8-4 所示.

(4)该平面过原点,平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,-1)$,图形如图 8-5 所示.

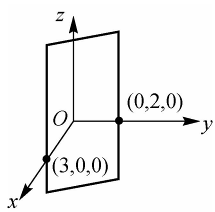


图 8-4

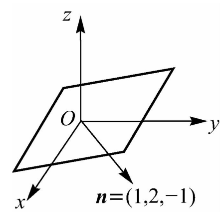


图 8-5

3. 求过三点 $A(1,1,-1)$,$B(-2,-2,2)$,$C(1,-1,2)$的平面方程,并求其在各坐标轴上的截距.

**解** 根据题意,所求平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ x+2 & y+2 & z-2 \\ x-1 & y+1 & z-2 \end{vmatrix}=0,$$

即 $x-3y-2z=0$.

因此平面过原点,故其在各坐标轴上截距均为 0.

4. 求通过 $x$ 轴和点(4,-3,-1)的平面的方程.

**解** 设所求平面方程为 $ay+bz=0$,因平面过点(4,-3,-1),则有

$$-3a-b=0.$$

可令 $a=1$, $b=-3$,则平面方程为 $y-3z=0$.

5. 求平面 $2x+y+2z-9=0$ 与各坐标面的夹角的余弦.

**解** 因坐标系中 $yOz$ 面的方程为 $x=0$,已知平面与 $yOz$ 面的夹角余弦为

$$\cos\theta_1=\frac{|2\times 1|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\sqrt{1^2+0+0}}=\frac{2}{3}.$$

同理,与 $xOz$ 面的夹角余弦为

$$\cos\theta_2=\frac{|1\times 1|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\ \sqrt{1^2+0+0}}=\frac{1}{3},$$

与 $xOy$ 面的夹角余弦为

$$\cos\theta_3=\frac{|2\times 1|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\ \sqrt{1^2+0+0}}=\frac{2}{3}.$$

6.试确定 $k$ 的值,使平面 $kx+y+z+k=0$ 与 $x+ky+kz+k=0$:

(1)互相垂直; (2)互相平行; (3)重合.

**解** (1)若两平面互相垂直,则

$$k+k+k=0,\ k=0.$$

(2)若两平面互相平行,则

$$\frac{k}{1}=\frac{1}{k}=\frac{1}{k},\ k=\pm 1.$$

(3)若两平面重合,则 $k=1$.

7.讨论以下各组中两平面的位置关系:

(1) $-x+2y-z+1=0$, $y+3z-1=0$;

(2) $2x-y+z-1=0$, $-4x+2y-2z-1=0$;

(3) $2x-y-z+1=0$, $-4x+2y+2z-2=0$.

**解** (1)因 $\frac{A_1}{A_2}$, $\frac{B_1}{B_2}$, $\frac{C_1}{C_2}$ 不相等,故两平面不平行.

而 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=2-3=-1$,故两平面不垂直,因此两平面相交.

(2)因 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=-\frac{1}{2}\neq\frac{D_1}{D_2}$,故两平面平行而不重合.

(3)因 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}=-\frac{1}{2}$,故两平面重合.

8.试求系数 $k$,使平面 $x+ky-2z=9$ 适合下列条件之一:

(1)经过点(5,-4,-6);

(2)与原点相距 3 个单位;

(3)与平面 $2x-3y+z=0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$.

**解** (1)将点(5,-4,-6)代入平面方程得

$$5-4k+12=9,$$

解得 $k=2$.

(2)原点与平面的距离为

$$d=\frac{|-9|}{\sqrt{1^2+k^2+2^2}}=3,$$

解得 $k=\pm 2$.

(3)两平面夹角的余弦为

$$\cos\theta=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|2\times 1-3k-2\times 1|}{\sqrt{1^2+k^2+2^2}\sqrt{2^2+3^2+1^2}},$$

解得 $k=\pm\sqrt{\frac{35}{2}}=\pm\frac{\sqrt{70}}{2}$.

9. 求点 $(2,3,-2)$ 到平面 $2x-3y+5z-8=0$ 的距离.

**解** 所求点到平面的距离为

$$d=\frac{|2\times 2-3\times 3-2\times 5-8|}{\sqrt{2^2+3^2+5^2}}=\frac{23}{\sqrt{38}}=\frac{23\sqrt{38}}{38}.$$

## 习题 8-4

1. 用点向式方程及参数方程表示直线 $\begin{cases}x+y+z+1=0,\\ 2x-y+3z+4=0.\end{cases}$

**解** 先求出直线上的任意一点.

令 $x=1$,则 $\begin{cases}y+z=-2,\\ -y+3z=-6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}y=0,\\ z=-2.\end{cases}$

故 $(1,0,-2)$ 是直线上一点.

又因直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k},$$

故直线的点向式方程为

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{-3},$$

参数方程为

$$\begin{cases}x=1+4t,\\ y=-t,\\ z=-2-3t.\end{cases}$$

2. 求过点 $(-3,2,5)$ 且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行的直线方程.

**解** 根据题意,设直线方程为

$$\frac{x+3}{m}=\frac{y-2}{n}=\frac{z-5}{p}.$$

由于直线与两平面的交线平行,故直线与两平面平行,所以

$$\begin{cases}m-4p=0,\\2m-n-5p=0,\end{cases}$$

解得$\frac{m}{4}=\frac{n}{3}=\frac{p}{1}$.

因此直线方程为

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}.$$

3.求过点 $P(2,-1,3)$且与直线 $L:\frac{x}{3}=\frac{y+7}{5}=\frac{z-2}{2}$垂直相交的直线的方程.

**解** 设直线方程为$\frac{x-2}{m}=\frac{y+1}{n}=\frac{z-3}{p}$,由于该直线与 $L$ 垂直,故

$$3m+5n+2p=0.$$

又因两直线相交,所以

$$\begin{vmatrix}2-0 & -1+7 & 3-2\\3 & 5 & 2\\m & n & p\end{vmatrix}=0,$$

即 $7m-n-8p=0$,可得

$$\frac{m}{1}=\frac{n}{-1}=\frac{p}{1},$$

因此$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{1}$.

4.求直线 $L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1}$与 $L_2:\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}$的夹角.

**解** 根据题意设两直线的夹角 $\varphi$,则 $\varphi$ 满足

$$\cos\varphi=\frac{|1\times2+4\times2-1\times1|}{\sqrt{1^2+4^2+1^2}\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

故两直线的夹角为$\frac{\pi}{4}$.

5.求点 $P(3,-1,2)$到直线$\begin{cases}x+y-z+1=0,\\2x-y+z-4=0\end{cases}$的距离.

**解** 直线的方向向量为

$$s=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(0,-3,-3).$$

在直线上取点(1,−2,0),这样,直线的方程可表示成参数形式

$$x=1,\ y=-2-3t,\ z=-3t.$$

又因过点 $P(3,-1,2)$,以 $\boldsymbol{s}=(0,-3,-3)$ 为法向量的平面方程为

$$-3(y+1)-3(z-2)=0,$$

即 $y+z-1=0$.

故将参数形式方程代入上式可得 $t=-\frac{1}{2}$,则直线与平面的交点为$(1,-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$.

因此所求点到直线的距离为

$$d=\sqrt{(3-1)^2+(-1+\frac{1}{2})^2+(2-\frac{3}{2})^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

6. 试确定下列各组中的直线和平面间的位置关系:

(1)$\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$ 和 $4x-2y-2z=3$;

(2)$\begin{cases} x+3y+2z+1=0, \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 和 $4x-2y+z=0$;

(3)$\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$ 和 $x+y+z=3$.

**解** 设直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}$,平面的法向量为 $\boldsymbol{n}$,直线与平面的夹角为 $\varphi$,则

$$\sin\varphi=|\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{s})|=\frac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}|\cdot|\boldsymbol{n}|}.$$

(1)由题意知 $\boldsymbol{s}=(-2,-7,3)$, $\boldsymbol{n}=(4,-2,-2)$,则

$$\sin\varphi=\frac{|(-2)\times4+(-7)\times(-2)+3\times(-2)|}{\sqrt{2^2+7^2+3^2}\ \sqrt{4^2+2^2+2^2}}=0,$$

即 $\varphi=0$.

故直线平行于平面或在平面上.

将直线上点(−3,4,0)代入平面方程,方程不成立,故直线不在平面上,直线与平面平行.

(2)由题意知

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}. \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -10 \end{vmatrix}=(-28,14,-7),\ \boldsymbol{n}=(4,-2,1).$$

由于 $\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 方向相同,故直线垂直于平面.

(3)由题意知

$$\boldsymbol{s}=(3,1,-4),\ \boldsymbol{n}=(1,1,1).$$

由于 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 或 $\sin\varphi=\dfrac{|3\times1+1\times1+(-4)\times1|}{\sqrt{3^2+1^2+(-4)^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=0$,故 $\varphi=0$.

将直线上的点 $A(2,-2,3)$代入平面方程,方程成立,因此直线在平面上.

7.求过点$(2,0,-3)$且与直线$\begin{cases}x-2y+4z-7=0,\\3x+5y-2z+1=0\end{cases}$垂直的平面方程.

**解** 所求平面的法向量可为已知直线的方向向量,即

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\1 & -2 & 4\\3 & 5 & -2\end{vmatrix}=(-16,14,11),$$

故所求平面方程为

$$-16(x-2)+14(y-0)+11(z+3)=0,$$

即 $16x-14y-11z-65=0$.

8.求直线$\begin{cases}x+y-z-1=0,\\x-y+z+1=0\end{cases}$在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线的方程.

**解** 设过直线$\begin{cases}x+y-z-1=0\\x-y+z+1=0\end{cases}$的平面束方程为

$$x+y-z-1+\lambda(x-y+z+1)=0,$$

整理得

$$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(\lambda-1)z-1+\lambda=0.$$

由$(1+\lambda)\cdot1+(1-\lambda)\cdot1+(\lambda-1)\cdot1=0$ 可得 $\lambda=-1$,代入平面束方程得

$$2y-2z-2=0.$$

故所求投影直线的方程为$\begin{cases}y-z-1=0,\\x+y+z=0.\end{cases}$

9.求点$(-1,2,0)$在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影.

**解** 过点$(-1,2,0)$与平面 $x+2y-z+1=0$ 垂直的直线为

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-0}{-1},$$

将其化为参数方程得

$$\begin{cases}x=-1+t,\\y=2+2t,\\z=-t,\end{cases}$$

代入平面方程得

$$-1+t+2(2+2t)-(-t)+1=0,$$

解得 $t=-\dfrac{2}{3}$.

故所求点在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影为 $\left(-\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

10. 设直线 $L$：$\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$，直线外一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，若取 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为 $L$ 上任意一点，试证 $M_0$ 到 $L$ 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$，其中 $\boldsymbol{s}$ 为直线 $L$ 的方向向量.

**证明** 如图 8-6 所示，设点 $M_0$ 到直线 $L$ 的距离为 $d$，由向量积的几何意义知 $|\overrightarrow{M_0M_1}\times \boldsymbol{s}|$ 表示以 $\overrightarrow{M_0M_1}$，$\boldsymbol{s}$ 为邻边的平行四边形的面积.

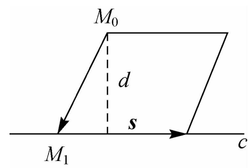

图 8-6

而 $\dfrac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$ 表示以 $|\boldsymbol{s}|$ 为边长的该平行四边形的高，即为点 $M_0$ 到 $L$ 的距离，故 $d=\dfrac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$.

## 习题 8-5

1. 已知 $A(1,2,3)$，$B(2,-1,4)$，求线段 $AB$ 的垂直平分面的方程.

**解** 由题意知线段 $AB$ 的中点为 $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{2}\right)$，经过 $A$、$B$ 点的直线的方向向量为 $(1,-3,1)$，故线段 $AB$ 的垂直平分面的法向量也为 $(1,-3,1)$.

因此所求垂直平分面的方程为

$$x-\frac{3}{2}-3\left(y-\frac{1}{2}\right)+\left(z-\frac{7}{2}\right)=0,$$

即 $2x-6y+2z-7=0$.

2. 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=0$ 表示什么曲面？

**解** 将已知方程整理成

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=(\sqrt{6})^2,$$

所以此方程表示以 $(1,-2,-1)$ 为球心，以 $\sqrt{6}$ 为半径的球面.

3. 求按如下方法所生成的旋转曲面的方程：

(1) 将 $zOx$ 坐标面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 $x$ 轴旋转一周；

(2) 将 $zOx$ 坐标面上的圆 $x^2+z^2=4$ 绕 $z$ 轴旋转一周；

(3)将 $xOy$ 坐标面上的 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 $x$ 轴及 $y$ 轴旋转一周.

**解** (1)以 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ 代替抛物线方程 $z^2=5x$ 中的 $z$ 得

$$(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2=5x,$$

即 $y^2+z^2=5x$.

(2)以 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代替圆方程 $x^2+z^2=4$ 中的 $x$ 得

$$(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2=4,$$

即 $x^2+y^2+z^2=4$.

(3)以 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ 代替双曲线方程 $4x^2-9y^2=36$ 中的 $y$,得该双曲线绕 $x$ 轴旋转一周而生成的旋转曲面方程,即为

$$4x^2-9(\pm\sqrt{y^2+z^2})=36,$$

即 $4x^2-9y^2-9z^2=36$.

再以 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ 代替双曲线方程 $4x^2-9y^2=36$ 中的 $x$,得该双曲线绕 $y$ 轴旋转一周而生成的旋转曲面方程,即为

$$4(\pm\sqrt{x^2+z^2})^2-9y^2=36,$$

即 $4x^2-9y^2+4z^2=36$.

4.说明下列旋转曲面是怎样形成的:

(1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{4}=1$;　　(2) $x^2+y^2-\dfrac{z^2}{9}=1$;

(3) $x^2-y^2+z^2=1$;　　(4) $(z-2)^2=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}$.

**解** (1)表示由 $xOy$ 面上的椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 绕 $x$ 轴旋转一周所得,或由 $xOz$ 面上的椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$ 绕 $x$ 旋转一周所得.

(2)表示由 $yOz$ 面上的双曲线 $y^2-\dfrac{z^2}{9}=1$ 绕 $z$ 轴旋转一周所得,或由 $xOz$ 面上的双曲线 $x^2-\dfrac{z^2}{9}=1$ 绕 $z$ 轴旋转一周所得.

(3)表示由 $xOy$ 面上的 $x^2-y^2=1$ 绕 $y$ 轴旋转一周所得,或由 $yOz$ 面上的 $z^2-y^2=1$ 绕 $y$ 轴旋转一周所得.

(4)表示由 $xOz$ 面上的直线 $z=\pm\dfrac{x}{\sqrt{2}}+2$ 绕 $z$ 轴旋转一周所得,或由 $yOz$ 面上的直线 $z=\pm\dfrac{y}{\sqrt{2}}+2$ 绕 $z$ 轴旋转一周所得.

5. 画出下列方程所表示的曲面，并指出其名称：

(1) $9x^2+y^2-z^2=9$；　　(2) $x^2-9y^2-z^2=9$；

(3) $\frac{z}{2}=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}$；　　(4) $4x^2-9y^2-16z^2=-25$.

**解**　(1)单叶双曲面 $x^2+\frac{y^2}{3^2}-\frac{z^2}{3^2}=1$，图形如图 8-7 所示.

(2)双叶双曲面 $\frac{x^2}{3^2}-y^2-\frac{z^2}{3^2}=1$，图形如图 8-8 所示.

(3)椭圆抛物面，图形如图 8-9 所示.

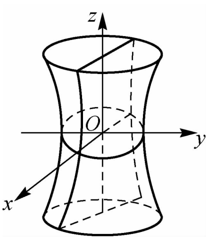


图 8-7

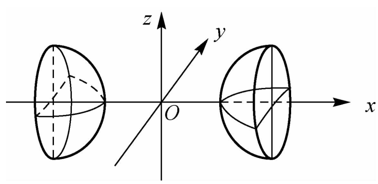


图 8-8

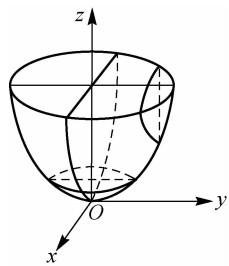


图 8-9

(4)单叶双曲面，图如 8-7 所示，但图中 $x$ 轴与 $z$ 轴位置应互换.

6. 画出下列方程所表示的曲面所围区域：

(1)由曲面 $z=2x^2+y^2$ 及 $z=3-x^2$ 所围成的闭区域；

(2)由双曲抛物面 $cz=xy(c>0)$，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的闭区域.

**解**　(1)两曲面分别为椭圆抛物面和抛物柱面，图形如图 8-10 所示.

(2)所围图形如图 8-11 所示.

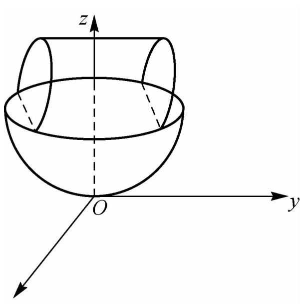


图 8-10

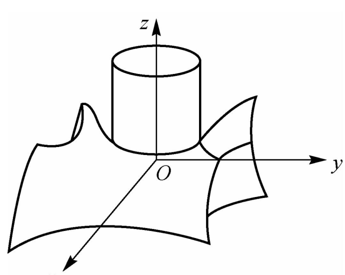


图 8-11

7. 画出下列各方程所表示的曲面，并说明在平面解析几何中和在空间解析几何中它们分别表示什么图形：

(1) $y=-2$；　　(2) $x^2+(y-6)^2=36$；

(3) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$；　　(4) $-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$；

(5) $4z=4-y^2$；　　(6) $y=\frac{1}{x}$.

**解**　(1)在平面解析几何中表示平行于 $x$ 轴的直线，在空间解析几何中表示平行于 $xOz$ 面的平面，如图 8-12 所示.

(2)在平面解析几何中表示圆，在空间解析几何中表示圆柱面，如图 8-13 所示.

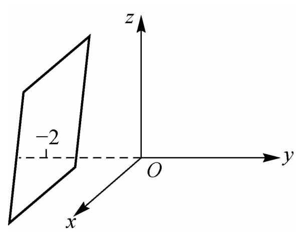


图 8-12

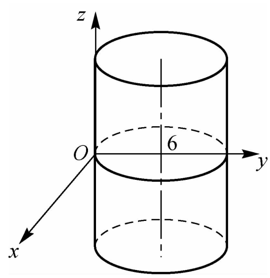


图 8-13

(3)在平面解析几何中表示椭圆，在空间解析几何中表示椭圆柱面，如图 8-14 所示.

(4)在平面解析几何中表示双曲线，在空间解析几何中表示双曲柱面，如图 8-15 所示.

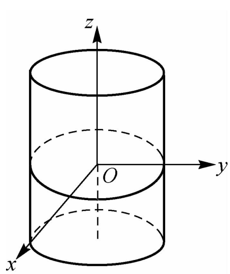


图 8-14

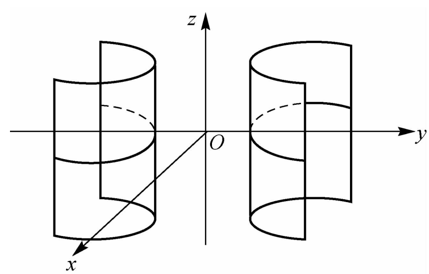


图 8-15

(5)在平面解析几何中表示抛物线，在空间解析几何中表示抛物柱面，如图 8-16 所示.

(6)在平面解析几何中表示双曲线，在空间解析几何中表示双曲柱面，如图 8-17 所示.

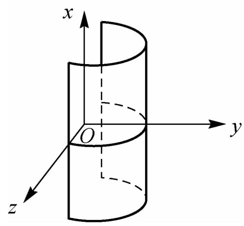


图 8-16

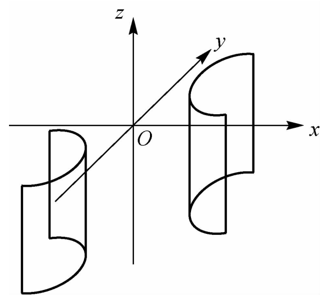


图 8-17

## 习题 8-6

1.以下方程组表示怎样的曲线：

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ 2x+3y+3z=6; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \\ (x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}. \end{cases}$

**解**　(1) $x^2+y^2=1$ 表示圆柱面，而 $2x+3y+3z=6$ 表示平面，因此方程组表示这两个曲面的交线，且其在 $xOy$ 面上的投影曲线为圆：$x^2+y^2=1$.

(2) $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 表示上半球面，而 $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$ 表示椭圆柱面，因此方程组表示这两曲面的交线，且在 $xOy$ 面上的投影曲线为圆：$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$

2.试求螺旋线 $\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=a\sin\theta, \\ z=b\theta \end{cases}$ 的一般方程.

**解**　由 $x=a\cos\theta$，$y=a\sin\theta$，得 $x^2+y^2=a^2$.

而 $y=a\sin\frac{z}{b}$，$x=a\cos\frac{z}{b}$，故该螺旋线的一般方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ y=a\sin\frac{z}{b} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ x=a\cos\frac{z}{b} \end{cases} \text{或} \begin{cases} y=a\sin\frac{z}{b}, \\ x=a\cos\frac{z}{b}. \end{cases}$$

3.将下列曲线的一般方程化为参数方程：

(1) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\ y=x;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4,\\ z=0.\end{cases}$

**解** (1)将 $y=x$ 代入 $x^2+y^2+z^2=9$ 中可得 $2x^2+z^2=9$.

令 $x=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t$,则 $z=3\sin t$,从而可得所求方程组的参数方程为

$$\begin{cases}x=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t,\\ y=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t,\\ z=3\sin t.\end{cases}\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

(2)将 $z=0$ 代入 $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4$ 中可得 $(x-1)^2+y^2=3$.

令 $x=1+\sqrt{3}\cos t$,则 $y=\sqrt{3}\sin t$,故所求方程组的参数方程为

$$\begin{cases}x=1+\sqrt{3}\cos t,\\ y=\sqrt{3}\sin t,\\ z=0\end{cases}\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

4.求旋转抛物面 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 4)$ 在三个坐标面上的投影.

**解** 联立 $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ z=4\end{cases}$ 得 $x^2+y^2=4$,故旋转抛物面在 $xOy$ 面上的投影为

$$x^2+y^2\leqslant 4.$$

联立 $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ x=0\end{cases}$ 得 $z=y^2$,故旋转抛物面在 $yOz$ 面上的投影为

$$y^2\leqslant z\leqslant 4.$$

同理,旋转抛物面在 $xOz$ 面上的投影为 $x^2\leqslant z\leqslant 4$.

5.求抛物面 $y^2+z^2=x$ 与平面 $x+2y-z=0$ 的截线在三个坐标面上的投影柱面方程.

**解** 在 $xOy$ 面上的投影柱面方程:

联立两方程消去 $z$ 得 $x^2+5y^2+4xy-x=0$.

在 $yOz$ 面上的投影柱面方程:

联立两方程消去 $x$ 得 $y^2+2y+z^2-z=0$.

在 $xOz$ 面上的投影柱面方程:

联立两方程消去 $y$ 得 $x^2+5z^2-2xz-4x=0$.

6.求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ z=\frac{1}{2}\end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线方程.

**解** 此曲线为球面与平面的截线其在 $xOy$ 面上的投影曲线是一个圆.

将 $z=\frac{1}{2}$代入 $x^2+y^2+z^2=1$ 得

$$x^2+y^2=\frac{3}{4},$$

故其在 $xOy$ 面上的投影曲线为

$$\begin{cases}x^2+y^2=\frac{3}{4},\\ z=0;\end{cases}$$

在 $yOz$ 面上的投影曲线为

$$\begin{cases}x=0,\\ z=\frac{1}{2};\end{cases}$$

在 $xOz$ 面上的投影曲线为

$$\begin{cases}y=0,\\ z=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

## 总复习题八

1. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量,问下列各式在什么条件下成立?

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$;　　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$;

(3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$;　　(4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}$.

**解** (1) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向时成立.

(2)任何情况下都成立.

(3) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向且 $|\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{b}|$ 时成立.

(4) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时成立.

2. 设 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$,$(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$,求 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

**解** 由题意知 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0$,$(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$,即

$$7|\boldsymbol{a}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15|\boldsymbol{b}|^2=0,$$

$$7|\boldsymbol{a}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8|\boldsymbol{b}|^2=0,$$

整理两式得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2,$$

代入上述任一式子中可得 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,故

$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}=\frac{1}{2},$$

则$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{3}$.

3. 设 $a=(1,4,5)$,$\boldsymbol{b}=(1,1,2)$.(1)求$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$;(2)求 $\lambda$,使 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$.

**解** (1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,5,7)$,故

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\begin{vmatrix}1&4&5\\1&1&2\\2&5&7\end{vmatrix}=0.$$

(2)因 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=(1+\lambda,\ 4+\lambda,\ 5+2\lambda)$,$\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}=(1-\lambda,4-\lambda,5-2\lambda)$,所以要使$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})$,则须使

$$(1+\lambda)\cdot(1-\lambda)+(4+\lambda)\cdot(4-\lambda)+(5+2\lambda)\cdot(5-2\lambda)=0,$$

可解得 $\lambda=\pm\sqrt{7}$.

4. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为非零向量,且 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,求$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|$.

**解** 因 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,故 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 互相垂直.

因此$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|$, $|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$,则可得

$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1,$$

故$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|=3$.

5. 设$|\boldsymbol{a}|=4$,$\boldsymbol{b}=3$,$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{6}$,求以 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积.

**解** 平行四边形的面积为

$$\begin{aligned}S&=|(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})|=|-5\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\\&=5|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=30.\end{aligned}$$

6. 已知点 $A(1,0,0)$及点 $B(0,2,1)$,试在 $z$ 轴上求一点 $C$,使$\triangle ABC$ 的面积最小.

**解** 设 $C$ 点坐标为$(0,0,a)$,则$\overrightarrow{AB}=(-1,2,1)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,0,a)$,故

$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC}&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-1&2&1\\-1&0&a\end{vmatrix}\\&=\frac{1}{2}|2a\boldsymbol{i}+(a-1)\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{5a^2-2a+5}.\end{aligned}$$

令 $f(x)=5x^2-2x+5$, 则 $f'(x)=10x-2$;再令 $f'(x)=0$,可得 $x=\frac{1}{5}$.

故 $a=\frac{1}{5}$,即 $C$ 点坐标为$(0,0,\frac{1}{5})$时,$\triangle ABC$ 面积最小.

7. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,1)$，$\boldsymbol{c}=(1,1,2)$，$\boldsymbol{h}=(3,2,1)$. 问 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是否共面，并求 $x,y,z$ 使 $\boldsymbol{h}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$.

**解** $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}=3-1-1=1\neq0$，故 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面.

由 $\boldsymbol{h}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$ 可得

$$\begin{cases}x+y+z=3,\\x+2y+z=2,\\x+y+2z=1,\end{cases}$$

可解得$\begin{cases}x=6,\\y=-1,\\z=-2.\end{cases}$

8. 求直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 $L_0$ 的方程，并求 $L_0$ 绕 $y$ 轴旋转一周所成的曲面方程.

**解** 由题意可得直线的一般方程为

$$\begin{cases}x-y-1=0,\\x+z-2=0.\end{cases}$$

设经过该直线的平面束方程为

$$x-y-1+\lambda(x+z-2)=0,$$

即 $(1+\lambda)x-y+\lambda z-1-2\lambda=0$.

由 $(1+\lambda)\cdot1+(-1)\cdot(-1)+\lambda\cdot2=0$ 可得 $\lambda=-\dfrac{2}{3}$，故 $L_0$ 的方程为

$$\begin{cases}x-3y-2z+1=0,\\x-y+2z-1=0,\end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases}x=2y,\\z=\dfrac{1}{2}(1-y),\end{cases}$$

其绕 $y$ 轴旋转一周所成曲面方程为

$$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0.$$

9. 求顶点在原点，准线为 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{8}+\dfrac{z^2}{3}=1,\\y=2\end{cases}$ 的锥面方程.

**解** 由题意可得准线椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{3}=\frac{1}{2}$，即$\frac{x^2}{2}+\frac{2z^2}{3}=1$.

故设锥面方程为

$$\frac{x^2}{2}+\frac{2z^2}{3}=ay^2,(a>0),$$

因其经过$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{3}=1\\ y=2\end{cases}$，可得 $1=4a$，$a=\frac{1}{4}$.

故所求锥面方程为 $6x^2-3y^2+8z^2=0$.

10. 求过直线 $L_1$：$\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{2}$和 $L_2$：$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$的平面方程.

**解** 根据题意，在直线 $L_1$ 上取两点$(2,-2,3)$和$(3,-3,5)$，在直线 $L_2$ 上取一点$(1,-1,1)$，则平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-3 \\ x-3 & y+3 & z-5 \\ x-1 & y+1 & z-1 \end{vmatrix}=0,$$

即$-5x-3y+z+1=0$.

11. 求曲线$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x+y+z=0\end{cases}$的参数方程.

**解** 令 $x=\cos t$，则 $y=\sin t$，所以

$$z=-x-y=-\cos t-\sin t,$$

故所求参数方程为

$$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t, \qquad\qquad t\in[0,2\pi].\\ z=-\cos t-\sin t,\end{cases}$$

12. 求两球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 和 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ 的交线 $L$ 在 $xOy$ 面上的投影.

**解** 分析题意可知两球面的交线是一个圆，其在 $xOy$ 面上投影是一个椭圆.

联立两球面方程消去 $x$ 得

$$y^2+z^2-(y-1)^2-(z-1)^2=0,$$

化简可得 $y+z=1$.

故两球面交线为

$$\begin{cases}y+z=1,\\ x^2+y^2+(1-y^2)=1,\end{cases}$$

其在 $xOy$ 面上投影为

$$\begin{cases} x^2+y^2+(1-y)^2=1, \\ z=0, \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} x^2+2(y-\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{1}{2}, \\ z=0. \end{cases}$$

13. 求 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与 $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$ 所围立体在 $xOy$ 面上的投影.

**解**　分析题意可知所围立体在 $xOy$ 面上的投影是一个圆围成的面积.

联立两球面方程并消去 $x,y$ 可得

$$z^2-(z-R)^2=0,$$

即得 $z=\dfrac{R}{2}$,故两球面交线为

$$\begin{cases} z=\dfrac{R}{2}, \\ x^2+y^2=\dfrac{3}{4}R^2. \end{cases}$$

因此两球面所围立体在 $xOy$ 面上的投影方程为

$$x^2+y^2\leqslant\frac{3}{4}R^2.$$

14. 求直线 $\begin{cases} 2x-4y+z=0, \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线的方程.

**解**　经过此直线的平面束方程为

$$2x-4y+z+\lambda(3x-y-2z-9)=0,$$

整理可得

$$(2+3\lambda)x-(4+\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0.$$

由 $(2+3\lambda)\cdot 4-(4+\lambda)\cdot(-1)+(1-2\lambda)\cdot 1=0$ 可得 $\lambda=-\dfrac{13}{11}$,故所求投影直线方程为

$$\begin{cases} (2-\dfrac{39}{11})x-(4-\dfrac{13}{11})y+(1+\dfrac{26}{11})z+\dfrac{117}{11}=0, \\ 4x-y+z=1, \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} 17x+31y-37z-117=0, \\ 4x-y+z=1. \end{cases}$$

15. 求过点 $M(1,2,5)$ 且与直线 $L_1$：$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-5}{2}$ 相交，并和向量 $\boldsymbol{j}=(0,1,0)$ 成 $\frac{\pi}{4}$ 角的直线 $L$ 的方程.

**解**　根据题意设该直线方程为 $\frac{x-1}{m}=\frac{y-2}{n}=\frac{z-5}{p}$. 因其与 $L_1$ 相交，则

$$\begin{vmatrix} 1-1 & 2-1 & 5-5 \\ 2 & 3 & 2 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0,$$

即 $m-p=0$.

又因而直线的方向向量 $(m,n,p)$ 与向量 $\boldsymbol{j}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，则

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|n|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

即 $n=\pm\sqrt{2}m$.

故所求直线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{\pm\sqrt{2}}=\frac{z-5}{1}.$$

16. 平面过 $z$ 轴，且与平面 $2x+y-\sqrt{5}z=0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，求此平面方程.

**解**　设所求平面方程为 $ax+by=0$，则其与平面 $2x+y-\sqrt{5}z=0$ 的夹角满足

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}=\frac{|2a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+5}},$$

即 $6a^2+16ab-6b^2=0$，解得 $a=\frac{b}{3}$ 或 $a=-3b$.

故所求平面方程为

$$x+3y=0 \text{ 或 } -3x+y=0.$$

17. 设一平面垂直于平面 $z=0$，并通过从点 $(1,-1,1)$ 到直线 $\begin{cases} y-z+1=0, \\ x=0 \end{cases}$ 的垂线，求此平面的方程.

**解**　由题意可求出 $\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$ 的方向向量为

$$\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(0,-1,-1).$$

由题意可设此直线的垂线方程为

$$\frac{x-1}{m}=\frac{y+1}{n}=\frac{z-1}{p},$$

则$-n-p=0$，故所得垂线满足 $y+1=1-z$，即 $y=-z$.

而由于垂线与该直线相交，故有

$$\begin{cases}x=0,\\ y-z+1=0,\\ y=-z,\end{cases}$$

可解得两直线相交于$(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

又因所求平面垂直于平面 $z=0$，故可设所求平面方程为

$$ax+by+c=0.$$

因平面过点$(1,-1,1)$和$(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，则可得

$$\begin{cases}a-b+c=0,\\ -\frac{1}{2}b+c=0,\end{cases}$$

即$\begin{cases}b=2c,\\ a=c.\end{cases}$

故所求平面方程为

$$x+2y+1=0.$$

18. 在一切过直线 $L$：$\begin{cases}x+y+z+1=0,\\ 2x+y+z=0\end{cases}$ 的平面中找出平面 $\pi$，使原点到它的距离为最长.

**解** 根据题意设过直线 $L$ 的平面束方程为

$$x+y+z+1+\lambda(2x+y+z)=0,$$

即$(1+2\lambda)x+(1+\lambda)y+(1+\lambda)z+1=0$.

故原点到平面的距离为

$$d=\frac{|1|}{\sqrt{(1+2\lambda)^2+(1+\lambda)^2+(1+\lambda)^2}}=\frac{1}{\sqrt{6\lambda^2+8\lambda+3}}.$$

令 $f(x)=6x^2+8x+3$，则 $f'(x)=12x+8$；再令 $f'(x)=0$，则解得 $x=-\frac{2}{3}$.

故当 $\lambda=-\frac{2}{3}$时，原点到此平面距离最长，因此平面 $\pi$ 的方程为

$$-x+y+z+3=0.$$

19. 求过直线 $L:\begin{cases}x+28y-2z+17=0,\\5x+8y-z+1=0\end{cases}$ 且与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 相切的平面方程.

**分析** 由于原点到球面各点的距离均为 1,故求与球面相切的平面,只需求原点与此平面的距离为 1 的平面.

**解** 设过直线 $L$ 的平面束方程为

$$x+28y-2z+17+\lambda(5x+8y-z+1)=0,$$

即 $(1+5\lambda)x+(28+8\lambda)y-(2+\lambda)z+17+\lambda=0$.

故原点到平面距离为

$$d=1=\frac{|17+\lambda|}{\sqrt{(1+5\lambda)^2+(28+8\lambda)^2+(2+\lambda)^2}},$$

即 $89\lambda^2+428\lambda+500=0$,可解得 $\lambda=-2$ 或 $\lambda=-\frac{250}{89}$.

故所求平面方程为

$$3x-4y=5 \text{ 或 } 387x-164y-24z=421.$$

20. 求直线 $L_1:\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-7}{1}$ 和 $L_2:\begin{cases}x=z,\\y=-6z-7\end{cases}$ 之间的距离.

**解** 由题意可得 $L_1$ 的方向向量为 $(1,-2,1)$,$L_2$ 的方向向量

$$\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&-1\\0&1&6\end{vmatrix}=(1,-6,1).$$

由于两直线的垂线与两直线都垂直,故垂线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-2&1\\1&-6&1\end{vmatrix}=(4,0,-4).$$

在 $L_1$ 上取点 $(3,5,7)$,则过 $L_1$ 且法向量为 $\boldsymbol{s}$ 的平面方程为 $x-z+4=0$;在 $L_2$ 上取点 $(1,-13,1)$,则过 $L_2$ 且法向量为 $\boldsymbol{s}$ 的平面方程为 $x-z=0$.

故两平面平行,且均垂直于此垂线,因而 $L_1$ 和 $L_2$ 之间的距离即为两平面间的距离为

$$d=\frac{|4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}.$$

21. 已知直线 $L:\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{7}=\frac{z}{5}$,求:

(1) $L$ 在平面 $z=1$ 上的投影 $L_1$ 的方程;　　(2) 点 $M(1,2,1)$ 到 $L_1$ 的距离.

**解** (1)$L_1$ 的方程为$\begin{cases} z=1, \\ \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{7}, \end{cases}$ 即$\begin{cases} z=1, \\ 7x-y-16=0. \end{cases}$

(2)由于 $M$ 的 $z$ 坐标为 1,故此题可简化为求平面上点(1,2)到直线 $7x-y-16=0$ 的距离,即为

$$d=\frac{|7\times1-1\times2-16|}{\sqrt{7^2+1^2}}=\frac{21}{\sqrt{50}}=\frac{21\sqrt{2}}{10}.$$

22. 画出下列曲面所围立体图形:

(1) $x=0,y=0,z=0,x^2+y^2=R^2,y^2+z^2=R^2$(在第Ⅰ卦限内);

(2)半径为 $a$ 的球面与半顶角为 $\alpha$ 的锥面所围成的立体;

(3)球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与抛物面 $x^2+y^2=3z$ 所围成的在抛物面内的那一部分;

(4)曲线 $y^2=2z,x=0$ 绕 $z$ 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z=2,z=8$ 所围的立体.

**解** (1)如图 8-18 所示.

(2)如图 8-19 所示.

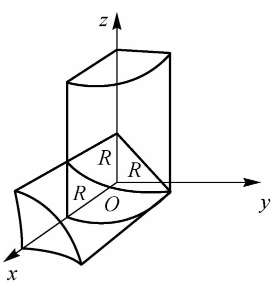


图 8-18

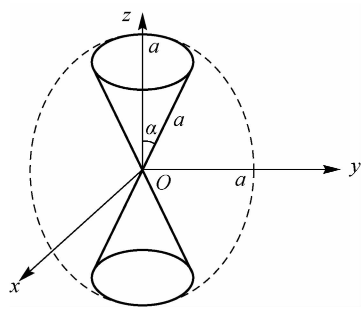


图 8-19

(3)如图 8-20 所示.

(4)$y^2=2z,x=0$ 绕 $z$ 轴旋转一周所得面为 $x^2+y^2=2$ 是一个椭圆抛物面,如图 8-21 所示.

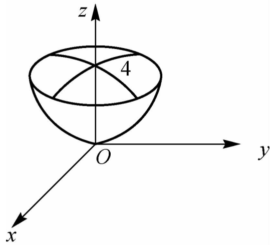


图 8-20

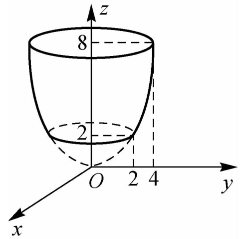


图 8-21

# 第九章

# 多元函数微分学

## 习题 9-1

1.判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集？并分别指出它们的聚点所成的点集(称为导集)和边界：

(1)$\{(x,y)\mid x^3\leqslant y<x^2,y\geqslant 0\}$；　　(2)$\{(x,y)\mid 4\leqslant x^2+y^2\leqslant 9\}$；

(3)$\{(x,y)\mid y>x^3\}$；

(4)$\{(x,y)\mid (x-1)^2+y^2\geqslant 1\}\cap\{(x,y)\mid (x-2)^2+y^2\leqslant 4\}$.

**解**　(1)非开非闭集；由于 $x^3<x^2$，故得 $0<x<1$，所以此点集是有界集．

其导集为$\{(x,y)\mid x^3\leqslant y\leqslant x^2,y\geqslant 0\}$，边界为

$$\{(x,y)\mid y=x^2,0\leqslant x\leqslant 1\}\cup\{(x,y)\mid y=x^3,0\leqslant x\leqslant 1).$$

(2)闭集且为有界集．

其导集为$\{(x,y)\mid 4\leqslant x^2+y^2\leqslant 9\}$，边界为

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\}\cup\{(x,y)\mid x^2+y^2=9\}.$$

(3)开集且为无界集.

其导集为$\{(x,y)\mid y\geqslant x^3\}$，边界为$\{(x,y)\mid y=x^3\}$

(4)闭集且为有界集.其导集为

$$\{(x,y)\mid (x-1)^2+y^2\geqslant 1\}\cap\{(x,y)\mid (x-2)^2+y^2\leqslant 4\}.$$

边界为

$$\{(x,y)\mid (x-1)^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\mid (x-2)^2+y^2=4\}.$$

2.已知复合函数的表达式，求 $f(x,y)$：

(1) $f(x+y,e^y)=x^2y$；　　(2) $f(x+y,xy)=x^2+3xy+y^2+5$.

**解** (1)$f(x,y)=(x-\ln y)^2\ln y$.

(2)因 $f(x+y,xy)=(x+y)^2+xy+5$,故

$$f(x,y)=x^2+y+5.$$

3.已知 $f(x,y)$,求以下复合函数:

(1) $f(x,y)=\ln(1+x^2+y^2)$,求 $f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$;

(2) $f(x,y)=x^y+2xy$,求 $f(2,-1)$和 $f(u+2v,uv)$.

**解** (1)$f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\ln(1+\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)=\ln(1+\rho^2)$.

(2)$f(2,-1)=2^{-1}-2\times2\times1=-\dfrac{7}{2}$;

$f(u+2v,uv)=(u+2v)^{uv}+2(u+2v)\cdot uv$.

4.求下列各函数的定义域:

(1) $z=\ln(x+y)$;　　(2) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$;

(3) $z=\dfrac{1}{\sqrt{y-x^2}}$;　　(4) $u=\dfrac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-9}}$.

**解** (1)$D=\{(x,y)\mid x+y>0\}$.

(2)$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant1\}$.

(3)$D=\{(x,y)\mid y-x^2>0\}$.

(4)$D=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2>9\}$.

5.求下列极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$;　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2e^{xy}}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$;　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,a)}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$;

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+|y|^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2}$;　　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{\sin\dfrac{x+y}{2}\pi+y^2}{x^2+y}$.

**解** (1)原式$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1}{\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{x^2}}=0$.

(2)原式$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\cdot\dfrac{1}{e^{xy}}$.

因 $1-\cos(x^2+y^2)\sim\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^2$,$((x,y)\to(0,0))$,故

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2e^{xy}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{2}.$$

(3)在 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$ 中，$(x+y)\to 0$，而 $\sin\dfrac{1}{x}\cdot\cos\dfrac{1}{y}$ 有界，故

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}=0.$$

(4)原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{ax}\right)^{\frac{x^2}{a+x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{ax}\right)^{ax\cdot\frac{x}{a(a+x)}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{x}{a(a+x)}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}.$$

(5)令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$r\to 0$，则原式可化为

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+|y|^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos^2\theta+|r\sin\theta|^{\frac{3}{2}}}{r^4\cos^4\theta+r^2\sin^2\theta},$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{\cos^2\theta+|r|^{-\frac{1}{2}}|\sin\theta|^{\frac{3}{2}}}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}=0.$$

(6)原式 $=\dfrac{\sin\dfrac{1+2}{2}\pi+4}{1+2}=1.$

6. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x-y}{x+y}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

**证明**　(1)当 $(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-k)x}{(1+k)x}=\frac{1-k}{1+k}(k\neq -1).$$

显然，它是随着 $k$ 的值不同而改变的，所以极限不存在 .

(2)分别取 $y=x, y=-x$ 两种方式求极限：

$$当\ y=x\ 时，\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1,$$

$$当\ y=-x\ 时，\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+4x^2}=0,$$

故所求极限不存在 .

7. 讨论下列函数在点 $(0,0)$ 处的连续性：

(1) $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0.\end{cases}$

**解** (1)因 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$,故函数在(0,0)处连续.

(2)因 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1}{\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y}{x^2}}$不存在,故函数在(0,0)处不连续.

## 习题 9-2

1.求下列函数的偏导数:

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$;　　(2) $z=\sqrt{\ln(xy)}$;

(3) $z=\mathrm{e}^{x+2y}\sin(xy^2)$;　　(4) $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$;

(5) $z=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;　　(6) $z=(1+xy)^y$;

(7) $z=y\displaystyle\int_0^{xy}\mathrm{e}^{1+t^2}\,\mathrm{d}t$;　　(8) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

**解** (1)$\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2,\dfrac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8x^2y$.

(2)$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(xy)}}\cdot\dfrac{1}{xy}\cdot y=\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$.

(3)$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{x+2y}\sin(xy^2)+y^2\mathrm{e}^{x+2y}\cos(xy^2)$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2\mathrm{e}^{x+2y}\sin(xy^2)+2xy\mathrm{e}^{x+2y}\cos(xy^2)$.

(4)$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{y}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{y}}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\sin\dfrac{x}{y}\cdot\cos\dfrac{x}{y}}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{y}\csc\left(\dfrac{2x}{y}\right)$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{y}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{y}}\cdot\dfrac{-x}{y^2}=-\dfrac{2x}{y^2}\csc\left(\dfrac{2x}{y}\right)$.

(5)$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{2x^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\dfrac{|y|}{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\cdot\frac{-\frac{2xy}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=-\frac{xy}{|y|(x^2+y^2)},$$

(6) $\frac{\partial z}{\partial x}=y(1+xy)^{y-1}\cdot y=y^2(1+xy)^{y-1}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[e^{y\ln(1+xy)}]=\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right]\cdot y\ln(1+xy).$$

(7) $\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot e^{1+t^2}\Big|_0^{xy}\cdot y=y^2e^{1+x^2y^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\int_0^{xy}e^{1+t^2}\,dt+xye^{1+x^2y^2}.$$

(8) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

2\. 设 $f(x,y)=xy^2+(x-2)\ln\frac{3x^2+y^2+2}{2y^2+x^2+1}$，求 $f_y(2,y)$ 和 $f_y(2,1)$.

**解** 根据题意可得

$$f_y(x,y)=2xy+(x-2)\cdot\frac{2y^2+x^2+1}{3x^2+y^2+2}\cdot\frac{2y\cdot(2y^2+x^2+1)-4y(3x^2+y^2+2)}{(2y+x^2+1)^2}$$

$$=2xy+(x-2)\cdot\frac{-10x^2y-6y}{(3x^2+y^2+2)(2y^2+x^2+1)},$$

故 $f_y(2,y)=4y,f_y(2,1)=4$.

3\. 求曲线 $\begin{cases}z=\sqrt{1+x^2+y^2},\\y=1\end{cases}$ 在 $(1,1,\sqrt{3})$ 处的切线与 $x$ 轴正向所成的倾斜角.

**解** 设 $z=f(x,y)$，按偏导数的几何意义，$f_x(1,1)$ 就是曲线在点 $(1,1,\sqrt{3})$ 处的切线对于 $x$ 轴的斜率，而

$$f_x(1,1)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\bigg|_{x=1,y=1}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

故倾斜角 $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

4\. 求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$：

(1) $z=\arcsin(xy)$；(2) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$.

**解** (1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2y^2}}\cdot y\right)=-\frac{1}{2}\cdot(1-x^2y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2xy^2)\cdot y$

$$=\frac{xy^3}{(1-x^2y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2y^2}}\cdot x\right)=\frac{x^3y}{(1-x^2y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}\right)=\frac{\sqrt{1-x^2y^2}-\dfrac{y\cdot(-2x^2y)}{2\sqrt{1-x^2y^2}}}{1-x^2y^2}=\frac{1}{(1-x^2y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right]=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

$$=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$=\frac{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2-y\cdot\left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}+2y\right)}{(x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2)^2},$$

$$=\frac{x^3+(x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}(x+\sqrt{x^2+y^2})^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=-\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

5.(1)设 $z=x\ln(xy)$,求$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$;

(2)设 $z=x^3\sin y+y^3\sin x$,求$\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^3\partial y}$;

(3)设 $z=xe^{xy}$,求$\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}$和$\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}$.

**解** (1)因$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+1$,$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{1}{x}$,故$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=0$.

(2)因$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2\sin y+y^3\cos x$,$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x\sin y-y^3\sin x$,$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}=6\sin y-y^3\cos x$,故

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^3\partial y}=6\cos y-3y^2\cos x.$$

(3)因$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2e^{xy}$,$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^3e^{xy}$,故

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}=3x^2e^{xy}+x^3ye^{xy}=x^2e^{xy}(3+xy),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=x^4e^{xy}.$$

6. 设 $f(x,y,z)=x^2y^5-y^2z^7+zx^3$，求 $f_{xx}(0,2,0)$，$f_{xx}(2,1,0)$，$f_{yz}(-1,0,0)$ 及 $f_{zzx}(1,2,0)$.

**解** 由题意得 $f_x=2xy^5+3zx^2$，$f_{xx}=2y^5+6zx$，故

$$f_{xx}(0,2,0)=64,f_{xx}(2,1,0)=2.$$

因 $f_y=5x^2y^4-2yz^7$，$f_{yz}=-14yz^6$，故

$$f_{yz}(-1,0,0)=0.$$

又因 $f_z=-7y^2z^6+x^3$，$f_{zz}=-42y^2z^5$，$f_{zzx}=0$，故

$$f_{zzx}(1,2,0)=0.$$

## 习题 9-3

1. 求下列函数的全微分：

(1) $z=\sqrt{x^2+y^2}$；　　(2) $z=e^x\cos y$；

(3) $z=e^{\frac{y}{x}}$；　　(4) $z=\ln\dfrac{x-y}{x+y}$；

(5) $u=x^{yz}$；　　(6) $u=\cos(xyz)$.

**解** (1)因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

所以

$$dz=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy.$$

(2)因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\cos y,\frac{\partial z}{\partial y}=-e^x\sin y,$$

所以

$$dz=e^x\cos y dx-e^x\sin y dy.$$

(3)因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}},$$

所以

$$dz=-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}dx+\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}dy.$$

(4)因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{x+y-x+y}{(x+y)^2}=\frac{2y}{x^2-y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{-x-y-x+y}{(x+y)^2}=-\frac{2x}{x^2-y^2},$$

所以

$$dz=\frac{2y}{x^2-y^2}dx+\frac{-2x}{x^2-y^2}dy.$$

(5)因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yzx^{yz-1},\frac{\partial u}{\partial y}=zx^{yz}\ln x,\frac{\partial u}{\partial z}=yx^{yz}\ln x,$$

所以

$$du=yzx^{yz-1}dx+zx^{yz}\ln x dy+yx^{yz}\ln x dz.$$

(6)因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\sin(xyz)\cdot yz=-yz\sin(xyz),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-xz\sin(xyz),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-xy\sin(xyz),$$

所以

$$du=-\sin(xyz)(yzdx+xzdy+xydz).$$

2. 求函数 $z=2x^2+3y^2$ 在点(10,8)处当 $\Delta x=0.2,\Delta y=0.3$ 时的全增量及全微分.

**解** 由题意得

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\\&=f(10.2,8.3)-f(10,8)=22.75,\end{aligned}$$

故 $dz=4x\Delta x+6y\Delta y=4\times10\times0.2+6\times8\times0.3=22.4$.

3. 判断二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(x_0,y_0),\\ 0, & (x,y)=(x_0,y_0)\end{cases}$ 在点(0,0)处是否可微分.

**解** 由题意得

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{0}{\Delta x}=0.$$

由$(x,y)$的对称性知 $f_y(0,0)=0$,故

$$\lim_{(\Delta y,\Delta y)\to(0,0)}=\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{(\Delta y,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\dfrac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0.$$

因此 $f(x,y)$在$(0,0)$可微分 .

## 习题 9-4

1. 求下列函数的全导数：

(1)设 $z=uv+\sin t$，其中 $u=e^t, v=\cos t$；

(2)设 $z=u^2v$，其中 $u=\cos x, v=\sin x$；

(3)设 $z=\arctan(xy)$，其中 $y=e^x$.

**解**　(1) $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{du}{dt}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{\partial \sin t}{\partial t}=e^t(\cos t-\sin t)+\cos t.$

(2) $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{du}{dx}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{dv}{dx}=-2\sin^2 x\cos x+\cos^3 x.$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{xe^x}{1+(xe^x)^2}+\dfrac{e^x}{1+(xe^x)^2}=\dfrac{(1+x)e^x}{1+(xe^x)^2}.$

2. 求下列函数的偏导数：

(1)设 $z=u^2+v^2, u=x+y, v=x-y$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

(2)设 $u=e^{x^2+y^2+z^2}, z=x^2\sin y$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$和$\dfrac{\partial u}{\partial y}$；

(3)设 $z=e^x\sin y, x=2st, y=t+s^2$，求$\dfrac{\partial z}{\partial s},\dfrac{\partial z}{\partial t}$.

**解**　(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=2(x+y)+2(x-y)=4x,$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=2(x+y)-2(x-y)=4y.$

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{du}{dx}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\cdot e^{x^2+y^2+(x^2\sin y)^2}+2x^2\sin y\cdot 2x\cdot\sin y\cdot e^{x^2+y^2+(x^2\sin y)^2}$

$\quad=2x(1+2x\sin^2 y)e^{x^2+y^2+(x^2\sin y)^2},$

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{du}{dy}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y\cdot e^{x^2+y^2+(x^2\sin y)^2}+2x^2\sin y\cdot x^2\cos y\cdot e^{x^2+y^2+(x^2\sin y)^2}$

$\quad=2(y+x^4\sin y\cos y)e^{x^2+y^2+x^4\sin^2 y}.$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial s}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial s}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial y}=e^x\sin y\cdot 2t+e^x\cos y\cdot 2s=2e^x(t\sin y+\cos y),$

$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}=e^{x}\sin y\cdot 2s+e^{x}\cos y\cdot 1=e^{x}(2s\sin y+s\cos y)$.

3. 求下列函数的一阶偏导数(其中 $f$ 具有一阶连续偏导数)：

(1)设 $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$,求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$；

(2)设 $u=f(x,xy,xyz)$,求$\frac{\partial u}{\partial x}$,$\frac{\partial u}{\partial y}$和$\frac{\partial u}{\partial z}$.

**解** (1)$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf'_1+y\cdot e^{xy}f'_2$,$\frac{\partial z}{\partial y}=-2yf'_1+xe^{xy}f'_2$.

(2)$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1+yf'_2+yzf'_3$,$\frac{\partial u}{\partial y}=xf'_2+xzf'_3$,$\frac{\partial u}{\partial z}=xyf'_3$.

4. 求下列函数的$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$,$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$,$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$(其中 $f$ 具有二阶连续偏导数)：

(1) $z=f(xy,y)$； (2) $z=f(xy^2,x^2y)$.

**解** (1)因$\frac{\partial z}{\partial x}=yf'_1$, $\frac{\partial z}{\partial y}=xf'_1+f'_2$,故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y\cdot(yf''_{11})=y^2f''_{11},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'_1+y\cdot(xf''_{11}+f''_{12}),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(xf''_{11})+2x\cdot f''_{12}+f''_{22}=x^2f''_{11}+2xf''_{12}+f''_{22}.$$

(2)因$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2f'_1+2xyf'_2$,$\frac{\partial z}{\partial y}=2xyf'_1+x^2f'_2$,故

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=y^2\cdot(y^2f''_{11}+2xyf''_{12})+2yf'_2+2xy\cdot(y^2f''_{12}+2xyf''_{22})\\&=2yf'_2+y^4f''_{11}+4xy^3f''_{12}+4x^2y^2f''_{22},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=2yf'_1+y^2\cdot(2xyf''_{11}+x^2f''_{12})+2xf'_2+2xy\cdot(2xyf''_{12}+x^2f''_{22})\\&=2yf'_1+2xf'_2+2xy^3f''_{11}+2x^3yf''_{22}+5x^2y^2f''_{12},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=2xf'_1+2xy(2xyf''_{11}+x^2f''_{12})+x^2(2xyf''_{12}+x^2f''_{22})\\&=2xf'_1+4x^2y^2f''_{11}+4x^3yf''_{12}+x^4f''_{22}.\end{aligned}$$

5. 设 $z=f\left(\frac{xy}{x+y}\right)$,$f$ 可微分,求 $dz$.

**解** $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

$$=f'\left(\frac{xy}{x+y}\right)\cdot\frac{y(x+y)-xy}{(x+y)^2}\mathrm{d}x+f'\left(\frac{xy}{x+y}\right)\cdot\frac{x\cdot(x+y)-xy}{(x+y)^2}\mathrm{d}y$$

$$=f'\left(\frac{xy}{x+y}\right)\cdot\frac{y^2}{(x+y)^2}\mathrm{d}x+f'\left(\frac{xy}{x+y}\right)\cdot\frac{x^2}{(x+y)^3}\mathrm{d}y.$$

6. 设 $f(u,v)$具有二阶连续偏导数，且满足$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，$g(x,y)=f\left[xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2)\right]$，求$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

**解** 令 $u=xy,v=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$，则

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot y+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot x,\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot x-\frac{\partial f}{\partial v}\cdot y,$$

故
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\left(y\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\right)\cdot y+\frac{\partial f}{\partial v}+\left(y\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)\cdot x,$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-y\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\right)\cdot x-\frac{\partial f}{\partial v}-\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}-y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)\cdot y.$$

因此
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$=(x^2+y^2)\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)=x^2+y^2.$$

## 习题 9-5

1. 求由方程$\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$所确定的隐函数 $z=f(x,y)$的一阶偏导数$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

**解** 根据题意令 $F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}$，则

$$F_x=\frac{1}{z},F_y=-\frac{y}{z}\cdot\left(-\frac{z}{y^2}\right)=\frac{1}{y},F_z=-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{z},$$

故$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{z}{x+z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{z^2}{y(x+z)}$.

2. 求由方程 $x^2+y^2-1=0$ 确定的隐函数 $y=f(x)$一阶与二阶导数在 $x=0$ 的值.

**解** 令 $F(x,y)=x^2+y^2-1$，则

$$F_x=2x,F_y=2y,$$

故

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x}{y},$$

$$y'' = -\frac{1 \cdot y - y' \cdot x}{y^2} = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2},$$

因此 $y'|_{x=0}=0, y''|_{x=0}=\mp 1$.

3.求由方程 $x^3+y^3+z^3=2xyz-1$ 所确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$.

**解** 令 $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-2xyz+1$,则

$$F_x=3x^2-2yz, F_y=3y^2-2xz, F_z=3z^2-2xy,$$

故$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{3x^2-2yz}{3z^2-2xy}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_y}{F_z}=-\frac{3y^2-2xz}{3z^2-2xy}$.

4.设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

**解** 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$,则

$$F_x=2x, F_y=2y, F_z=2z-4,$$

故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{x}{z-2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{z-2-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x}{(z-2)^2}=-\frac{z-2+\frac{x^2}{z-2}}{(z-2)^2}=-\frac{(z-2)^2+x^2}{(z-2)^3}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}.$$

5.设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数,又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由 $e^{xy}-xy=2$ 和 $e^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$ 确定,求$\frac{du}{dx}$.

**解** 由 $F(x,y)=e^{xy}-xy-2$ 得

$$F_x=ye^{xy}-y, F_y=xe^{xy}-x,$$

故$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{ye^{xy}-y}{xe^{xy}-x}=-\frac{y}{x}$.

由 $G(x,z)=e^x-\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$ 得

$$G_x=e^x-\frac{\sin(x-z)}{x-z},$$

$$G_z=\frac{\sin(x-z)}{x-z},$$

故$\dfrac{\partial z}{\partial x}=1-\dfrac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}$，则

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y}+\left[1-\frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}\right]\frac{\partial f}{\partial z}.$$

6. 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，$z=z(x,y)$ 由方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 所确定，求 $du$.

**解** 根据题意，令 $F(x,y,z)=xe^x-ye^y-ze^z$，则

$$F_x=e^x+xe^x,F_y=-e^y-ye^y,F_z=-e^z-ze^z,$$

故$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{e^x+xe^x}{e^z+ze^z}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{e^y+ye^y}{e^z+ze^z}$.

$$\begin{aligned}\text{因此 } du&=f_x dx+f_z\cdot\frac{e^x+xe^x}{e^z+ze^z}dx+f_y dy-f_z\cdot\frac{e^y+ye^y}{e^z+ze^z}dy\\&=\left(f_x+f_z\frac{x+1}{z+1}e^{x-z}\right)dx+\left(f_y-f_z\frac{y+1}{z+1}e^{y-z}\right)dy.\end{aligned}$$

7. 设 $xu-yv=0$，$yu+xv=1$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$和$\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

**解** 令 $F(x,y,u,v)=xu-yv$，$G(x,u,u,v)=yu+xv-1$，则

$$F_x=u,F_y=-v,F_u=x,F_v=-y;$$

$$G_x=v,G_y=u,G_u=y,G_v=x.$$

在 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}x & -y\\ y & x\end{vmatrix}=x^2+y^2\neq 0$ 的条件下，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}u & -y\\ v & x\end{vmatrix}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}-v & -y\\ u & x\end{vmatrix}=\frac{xv-yu}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}x & u\\ y & v\end{vmatrix}=\frac{yu-xv}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}x & -v\\ y & u\end{vmatrix}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}.$$

8. 设 $x=x(y,z)$，$y=y(x,z)$，$z=z(x,y)$都是由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的具有连续偏导数的函数，证明$\dfrac{\partial x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$.

**证明** 因为$\dfrac{\partial x}{\partial y}=-\dfrac{Fy}{Fx}$，$\dfrac{\partial y}{\partial z}=-\dfrac{Fz}{Fy}$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{Fx}{Fz}$，故

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{Fy}{Fx}\right)\cdot\left(-\frac{Fz}{Fy}\right)\cdot\left(-\frac{Fx}{Fz}\right)=-1.$$

## 习题 9-6

1. 求曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 在点(1,1,1)处的法平面及切线方程.

**解** 由题可得 $x'_t=1,y'_t=2t,z'_t=3t^2$,故所求切线的方向向量为(1,2,3),切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3};$$

法平面方程为

$$x-1+2(y-1)+3(z-1)=0,$$

即 $x+2y+3z-6=0$.

2. 求曲线 $\begin{cases}x+y+z=0,\\ x^2+y^2+z^2=6\end{cases}$ 在点(1,-2,1)处的法平面及切线方程.

**解** 令 $F(x,y,z)=x+y+z,G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$,则

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2y & 2z\end{vmatrix}=2z-2y,$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2z & 2x\end{vmatrix}=2x-2z,$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2x & 2y\end{bmatrix}=2y-2x,$$

因此

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\Big|_{(1,-2,1)}=6,\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}=\Big|_{(1,-2,1)}=0,\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\Big|_{(1,-2,1)}=-6,$$

故曲线在(1,-2,1)处的切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1};$$

法平面方程为

$$x-1-(z-1)=0,$$

即 $x-z=0$.

3. 求曲面 $z=x^2+y^2-1$ 在点(2,1,4)的切平面与法线方程.

**解** 令 $F(x,y,z)=z-x^2+y^2+1$,则

$$F_x=-2x,F_y=-2y,F_z=1,$$

故曲面在点(2,1,4)处的法线方向向量为(-4,-2,1),法线方程为

$$\frac{x-2}{-4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-4}{1};$$

切平面方程为

$$-4(x-2)-2(y-1)+z-4=0,$$

即 $4x+2y-z-6=0$.

4.设直线 $L:\begin{cases}x+y+b=0,\\x+ay-z-3=0\end{cases}$在平面 $\pi$ 上,而平面 $\pi$ 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点$(1,-2,5)$,求 $a,b$ 的值.

**解** 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z$,则

$$F_x=2x,F_y=2y,F_z=-1,$$

故平面 $\pi$ 在$(1,-2,5)$处的法向量 $\boldsymbol{n}=(2,-4,-1)$,则平面 $\pi$ 的方程为

$$2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0,$$

即 $2x-4y-z-5=0$.

而经过 $L$ 的平面束方程为

$$x+y+b+\lambda(x+ay-z-3)=0,$$

故有

$$\begin{cases}1+\lambda=2,\\1+a\lambda=-4,\\\lambda=1,\\-5=b-3,\end{cases}$$

解得$\begin{cases}a=-5,\\b=-2.\end{cases}$

5.求曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程.

**解** 设 $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{2}+y^2-z$,则

$$F_x=x,F_y=2y,F_z=-1,$$

故曲面 $z$ 上任一点$(x,y,z)$的切平面法向量为$(x,2y,-1)$.

由题意,平面 $2x+2y-z=0$ 的法向量为$(2,2,-1)$,因此

$$(x,2y,-1)\parallel(2,2,-1),$$

则可求得 $x=2,y=1$,此时曲线过点$(2,1,3)$,故所求切平面方程为

$$2(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0,$$

即 $2x+2y-z-3=0$.

6.求曲线 $\Gamma:x=\int_0^t \mathrm{e}^u\cos u\mathrm{d}u,y=2\sin t+\cos t,z=1+\mathrm{e}^{3t}$在 $t=0$ 处的法平面和切线方程.

**解** 当 $t=0$ 时可得

$$x=0,y=1,z=2,$$

则有

$$x'_t|_{t=0}=1,y'_t|_{t=0}=2,z'_t|_{t=0}=3,$$

故 $\Gamma$ 在 $t=0$ 处的切线方程为

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3},$$

法平面方程为

$$x+2(y-1)+3(z-2)=0,$$

即 $x+2y+3z-8=0$.

## 习题 9-7

1. 设 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$处的指向外侧的法向量,求函数 $u=\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$在点 $P$ 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数.

**解** 由题意可得 $\boldsymbol{n}=(4,6,2)$,则易知与 $\boldsymbol{n}$ 相同的单位向量为

$$\mathbf{e}_n=\left(\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}}\right),$$

因此有

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{14}},\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{14}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

又由题意知

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=\frac{1}{z}\cdot\left.\frac{12x}{2\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_{(1,1,1)}=\frac{6}{\sqrt{14}},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=\frac{1}{z}\cdot\left.\frac{16y}{2\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_{(1,1,1)}=\frac{8}{\sqrt{14}},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=-\left.\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}\right|_{(1,1,1)}=-\sqrt{14},$$

故 $u$ 在点 $P$ 处沿 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数为

$$\frac{2}{\sqrt{14}}\times\frac{6}{\sqrt{14}}+\frac{3}{\sqrt{14}}\times\frac{8}{\sqrt{14}}-\frac{1}{\sqrt{14}}\times\sqrt{14}=\frac{11}{7}.$$

2. 设 $x$ 轴正向到方向 $l$ 的转角为 $\varphi$,求函数 $z=x^2-xy+y^2$ 在点$(1,1)$沿方向 $l$ 的方向导数,并确定转角 $\varphi$,使得方向导数有最大值.

**解**　由题意知方向 $l$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=\cos\varphi,\cos\beta=\sin\varphi$.

又由于

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y,\frac{\partial z}{\partial y}=-x+2y,$$

故

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,1)}=1\cdot\cos\varphi+1\cdot\sin\varphi=\cos\varphi+\sin\varphi.$$

因此当 $\varphi=\frac{\pi}{4}$时,$\frac{\partial z}{\partial l}$最大为$\sqrt{2}$.

3. 试证明函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$在点(0,0)沿任意方向 $l$ 的方向导数存在,但偏导数不存在.

**证明**　因 $z(x,y)$在(0,0)的领域 $U(P_0)$有定义,且若 $l$ 为从点(0,0)出发的射线,$P(x,y)$为 $l$ 上且含于$U(P_0)$内的任一点,以 $\rho$ 表示 $P,P_D$ 两点间的距离．显然$\lim\limits_{\rho\to 0^+}\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}$存在,故 $z=\sqrt{x^2+y^2}$在(0,0)沿任意方向 $l$ 的方向导数存在．因而

$$\lim_{\rho\to D}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\Delta x^2}}{\Delta x}$$

不存在,同理

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}$$

也不存在,故 $z$ 的偏导数在(0,0)不存在．

4. 试证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^4\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在点(0,0)沿任意方向 $l$ 的方向导数都存在,但不连续.

**证明**　同上题类似,方向导数反映了 $f(x,y)$在(0,0)处沿方向 $l$ 的变化率,而$f(x,y)$在点(0,0)处无论沿哪个方向的领域均有定义,故方向导数都存在．

设 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta)$为点(0,0)沿任意给定的方向,则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(0,0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t\cos\alpha,t\cos\beta)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\cos\alpha\cos^2\beta}{\cos^2\alpha+t^2\cos^4\beta}$$

$$=\begin{cases}\frac{\cos^2\beta}{\cos\alpha},\cos\alpha\neq 0,\\ 0, \quad \cos\alpha\neq 0.\end{cases}$$

此结果表明 $f(x,y)$在点(0,0)沿任意方向的方向导数存在. 又因为

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=\sqrt{x}}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}\neq 0=f(0,0),$$

所以 $f(x,y)$在原点处不连续.

5. 求 $\mathbf{grad}\,\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

**解** 令 $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$,则

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2},\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2},$$

故 $\mathbf{grad}\,\dfrac{1}{x^2+y^2}=-\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}\boldsymbol{i}-\dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2}\boldsymbol{j}$.

6. 设 $u,v$ 都是 $x,y,z$ 的函数,$u,v$ 的各偏导数都存在且连续,证明:

(1) $\mathbf{grad}(u+c)=\mathbf{grad}\;u$;

(2) $\mathbf{grad}(\alpha u+\beta v)=\alpha\mathbf{grad}\;u+\beta\mathbf{grad}\;v$;

(3) $\mathbf{grad}(uv)=u\;\mathbf{grad}\;v+v\;\mathbf{grad}\;u$;

(4) $\mathbf{grad}\;\dfrac{v}{u}=\dfrac{u\mathbf{grad}\;v-v\mathbf{grad}\;u}{u^2}$;

(5) $\mathbf{grad}\;f(u)=f'(u)\mathbf{grad}\;u$.

**证明** (1)$\mathbf{grad}(u+c)=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial c}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial c}{\partial y},\dfrac{\partial c}{\partial z}\right)$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\mathbf{grad}u.$$

(2)$\mathbf{grad}(\alpha u+\beta v)=\left(\alpha\dfrac{\partial u}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial v}{\partial x},\alpha\dfrac{\partial u}{\partial y}+\beta\dfrac{\partial v}{\partial y},\alpha\dfrac{\partial u}{\partial z}+\beta\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)$

$$=\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\beta\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$=\alpha\mathbf{grad}u+\beta\mathbf{grad}v.$$

(3)$\mathbf{grad}(u,v)=\left(\dfrac{\partial}{\partial x}(uv),\dfrac{\partial}{\partial y}(uv),\dfrac{\partial}{\partial z}(uv)\right)$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}v+u\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}v+\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}v+u\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$=v\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)+u\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$=u\mathbf{grad}\,v+v\mathbf{grad}\,u.$$

(4)$\mathbf{grad}\;\dfrac{v}{u}=\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{v}{u}\right),\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{v}{u}\right),\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{v}{u}\right)\right)$

$$=\left[\frac{u\dfrac{\partial v}{\partial x}-v\dfrac{\partial u}{\partial x}}{u^2},\frac{u\dfrac{\partial v}{\partial y}-v\dfrac{\partial u}{\partial y}}{u^2},\frac{u\dfrac{\partial v}{\partial z}-v\dfrac{\partial u}{\partial z}}{u^2}\right]$$

$$=\frac{1}{u}\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z}\right)-\frac{v}{u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$=\frac{u\,\mathbf{grad}\,v-v\,\mathbf{grad}\,u}{u^2}.$$

(5) $\mathbf{grad}\,f(u)=\left(\dfrac{\partial f(u)}{\partial x},\dfrac{\partial f(u)}{\partial y},\dfrac{\partial f(u)}{\partial z}\right)$

$$=\left(f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x},f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial y},f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$=f'(u)\cdot\mathbf{grad}\,u.$$

7. 设一金属球体内各点处的温度离球心的距离成反比，证明球体内任意一点(异于球心)处沿着指向球心的方向上升得最快.

**证明** 以球心为原点建立坐标系，设球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=a^2\ (a\neq 0),$$

球体内点$(x_0,y_0,z_0)$的温度可表示为

$$T=\frac{k}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}},$$

则球体内一点$(x,y,z)$的温度为梯度为

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x},\frac{\partial T}{\partial y},\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\left[-\frac{2kx}{2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},-\frac{2ky}{2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},-\frac{2kz}{2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y,z),$$

故球体内任意一点处沿着指向球的方向温度上升最快 .

## 习题 9-8

1. 求函数 $z=x^3-y^3-3xy$ 的极值和极值点.

**解** 函数 $f(x,y)=x^3-y^3-3xy$ 的定义域为

$$D=\{(x,y)\,|\,-\infty<x<x+\infty,-\infty<y<+\infty\}.$$

$$f_x(x,y)=3x^2-3y,f_y(x,y)=-3y^2-3x,$$

联立$\begin{cases}f_x(x,y)=3x^2-3y=0\\f_y(x,y)=-3y^2-3x=0\end{cases}$，求得驻点$(-1,1)$和$(0,0)$.

又因二阶偏导数为

$$f_{xx}(x,y)=6x,f_{xy}(x,y)=-3,f_{yy}(x,y)=-6y,$$

所以在$(0,0)$处,$AC-B^2=-9<0$,故$(0,0)$不是极值点;在$(-1,1)$处,$AC-B^2=27>0$,且$A<0$,故$(-1,1)$是极大值点,极大值为$f(-1,1)=1$.

2.求函数$z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$的极值.

**解** 函数$f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty)\}.$$

$$f_x(x,y)=4x^3-2x-2y,f_y(x,y)=4y^3-2x-2y,$$

联立$\begin{cases}f_x(x,y)=4x^3-2x-2y=0\\ f_y(x,y)=4y^3-2x-2y=0\end{cases}$,求得驻点$(1,1)$和$(-1,-1)$和$(0,0)$.

又因二阶偏导数为

$$f_{xx}(x,y)=12x^2-2,f_{xy}(x,y)=-2,f_{yy}(x,y)=12y^2-2,$$

所以在$(1,1)$处,$AC-B^2=96>0$,且$A>0$,故$(1,1)$是极小值点,极小值为$-2$;在$(-1,-1)$处,$AC-B^2=96>0$,且$A>0$,故$(-1,-1)$是极小值点,极小值为$-2$;在$(0,0)$处,$AC-B^2=0$,但由于$f(0,0)=f(0,1)=f(1,0)=0$,故$(0,0)$不是极值点.

3.在平面$3x+4y-z=26$上求一点,使它与坐标原点的距离最短.

**解** 题意即为求在$3x+4y-z=26$的条件下$x^2+y^2+z^2$的最小值,作拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda(3x+4y-z-26),$$

则令

$$\begin{cases}L_x=2x+3\lambda=0,\\ L_y=2y+4\lambda=0,\\ L_z=2z-\lambda=0,\\ 3x+4y-z-26=0,\end{cases}$$

求得$\lambda=-2$,故

$$x=3,y=4,z=-1,$$

所以在平面上点$(3,4,-1)$距坐标原点的距离最短.

4.求函数$z=xy$在适合附加条件$x+y=1$下的极大值.

**解** 作拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x+y-1),$$

则令

$$\begin{cases}L_x=y+\lambda=0,\\ L_y=x+\lambda=0,\\ x+y-1=0,\end{cases}$$

求得 $\lambda=-\frac{1}{2}$,故

$$x=y=\frac{1}{2},$$

所以当 $x=\frac{1}{2}$,$y=\frac{1}{2}$时,$z=xy$ 在 $x+y=1$ 条件下的极大值为$\frac{1}{4}$.

5.在半径为 $r$ 的球内接一长方体,问长、宽、高各为多少时,其体积最大?

**解** 由题意,设长方体的长、宽、高分别为 $x$、$y$、$z$,($x,y,z>0$),则

$$x^2+y^2+z^2=4r^2,$$

题目即求 $xyz$ 的最大值.

作拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-4r^2),$$

则令

$$\begin{cases}L_x=yz+2x\lambda=0,\\L_y=xz+2y\lambda=0,\\L_z=xy+2z\lambda=0,\\x^2+y^2+z^2-4r^2=0,\end{cases}$$

可推知 $x=y=z$.

由 $x^2+y^2+z^2-4r^2=0$ 可知

$$x=y=z=\frac{2\sqrt{3}}{3}r,$$

故当 $x=y=z=\frac{2\sqrt{3}}{3}r$,即长、宽、高均为$\frac{2\sqrt{3}}{3}r$ 时,长方体的体积最大.

6.在两直角边分别是 $a$,$b$ 的直角三角形中内接一个矩形,求矩形的最大面积.

**解** 设矩形的长和宽分别为 $x$ 和 $y$,则此三角形的面积为

$$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}a\cdot x+\frac{1}{2}b\cdot y,$$

即 $ax+by=ab$.

故题目为求 $ax+by=ab$ 条件下 $xy$ 的最大值.

作拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=xy+\lambda(ax+by-ab),$$

则令

$$\begin{cases}L_x=y+a\lambda=0,\\L_y=x+b\lambda=0,\\ax+by-ab=0,\end{cases}$$

可知 $\lambda=-\dfrac{1}{2}$,故

$$x=\frac{b}{2},y=\frac{a}{2},$$

因此,矩形的最大面积为 $xy=\dfrac{1}{4}ab$.

7. 在椭球面$\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}+\dfrac{z^2}{2^2}=1$ 的第一卦限上点 $P$ 处作切平面,使与三个坐标平面所围四面体的体积最小,求点 $P$ 坐标.

**解** 设 $P$ 点坐标为$(x_0,y_0,z_0)$则点 $P$ 处切平面的法向量为$\left(\dfrac{2x_0}{25},\dfrac{2y_0}{9},\dfrac{2z_0}{4}\right)$,故曲面在 $P$ 处的切平面方程为

$$\frac{2x_0}{25}(x-x_0)+\frac{2y_0}{9}(y-y_0)+\frac{2z_0}{4}(z-z_0)=0,$$

即$\dfrac{xx_0}{25}+\dfrac{yy_0}{9}+\dfrac{zz_0}{4}=1$.

于是切平面在三个坐标轴上的截距依次为$\dfrac{25}{x_0},\dfrac{9}{y_0},\dfrac{4}{z_0}$,切平面与三个坐标面围成四面体的体积为

$$V=\frac{1}{6}\cdot\frac{25\times9\times4}{x_0y_0z_0},$$

题意即为在$\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}+\dfrac{z^2}{2^2}=1$ 的条件下求 $V$ 的最小值,即求分母 $xyz$ 的最大值.

作拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}+\frac{z^2}{2^2}-1\right),$$

则令

$$\begin{cases}L_x=yz+\dfrac{2x\lambda}{25}=0,\\[2mm] L_y=xz+\dfrac{2y\lambda}{9}=0,\\[2mm] L_z=xy+\dfrac{2z\lambda}{4}=0,\\[2mm] \dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}+\dfrac{z^2}{2^2}-1=0,\end{cases}$$

可得

$$\lambda=-5\sqrt{3},x=\frac{5}{\sqrt{3}},y=\frac{3}{\sqrt{3}},z=\frac{2}{\sqrt{3}},$$

故 $P$ 点坐标为$\left(\frac{5}{\sqrt{3}},\frac{3}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

8.已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=2xdx-2ydy$,并且 $f(1,1)=2$. 求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\left|\,x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\right.\right\}$上的最大值和最小值.

**解** 由题意知

$$f'_x=2x,f'_y=-2y,$$

故可得

$$f(x,y)=x^2-y^2+C(C\text{ 常数}).$$

又因 $f(1,1)=1-1+C=2$,所以 $C=2$,故

$$f(x,y)=x^2-y^2+2.$$

解此题可分两步进行:

①求 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在 $D$ 内部的驻点. 令

$$\begin{cases}f_x(x,y)=2x=0,\\ f_y(x,y)=-2y=0,\end{cases}$$

则可得唯一驻点(0,0).

②求 $f(x,y)$ 在 $D$ 的边界 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上可能的极值点.

作拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=x^2-y^2+2+\lambda\left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right),\text{令}$$

$$\begin{cases}L_x=2x+2x\lambda=0,\\ L_y=-2y+\frac{y\lambda}{2}=0,\\ x^2+\frac{y^2}{4}-1=0,\end{cases}$$

因 $\lambda$ 不存在,无法用此方法判断极值点.

由于 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在边界 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上,则有

$$f(x,y)=1-\frac{5}{4}y^2+2=3-\frac{5}{4}y^2,$$

$$f(x,y)=x^2-4(1-x^2)+2=-2+5x^2,$$

故当 $y=0$ 时,$f(x,y)$在边界上有一个极大值点 3;当 $x=0$ 时 $f(x,y)$的边界上有一个极小值点$-2$.

又因 $f(0,0)=2$,故可知 $f(x,y)$在椭圆域上的最大值为 3,最小值为$-2$.

## 总复习题九

1.求下列极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\sin(xy^2)}{y^2}$；

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1-2xy)^{\frac{1}{xy}}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,1)}\dfrac{xy-3}{\sqrt{xy+1}-2}$；

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{xy-1}{x^2+y^2}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{\sqrt{x+y+1}-1}$.

**解** (1)原式$=\dfrac{\sin(xy^2)}{y^2}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\sin y^2}{y^2}=1$.

(2)原式$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1-2xy)^{\frac{1}{-2xy}\cdot(-2)}=e^{-2}$.

(3)原式$=\lim\limits_{(x,y)\to(3,1)}\dfrac{(xy-3)(\sqrt{xy+1}+2)}{xy+1-4}=4$.

(4)原式$=\dfrac{-1}{1}=-1$.

(5)原式$=\dfrac{\ln(1+1)}{\sqrt{1+0}}=\ln2$.

(6)原式$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(x+y)\cdot(\sqrt{x+y+1}+1)}{x+y+1-1}=\sqrt{0+0+1}+1=2$.

2.求下列函数的一阶偏导数：

(1) $u=x^{\frac{y}{z}}$；

(2) $u=\sin(x+y^2-e^z)$；

(3) $u=\sqrt{x^2+y^2}+\dfrac{xy}{z}$；

(4) $z=x^2\sin y$；

(5) $f(x,y)=\sqrt{25-x^2-y^2}$,求 $f_x(2\sqrt{2},3)$,$f_y(2\sqrt{2},3)$；

(6) $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$,求 $f_x(x,1)$.

**解** (1)$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$,$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{z}\cdot x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x$,$\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{y}{z^2}\cdot x^{\frac{y}{z}}\ln x$.

(2)$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos(x+y^2-e^z)$,$\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y\cos(x+y^2-e^z)$,$\dfrac{\partial u}{\partial z}=-e^z\cos(x+y^2-e^z)$.

(3)$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{y}{z}$,$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{x}{z}$,$\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{xy}{z^2}$.

(4)$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\sin y$,$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2\cos y$.

(5)因 $f_x=\dfrac{-x}{\sqrt{25-x^2-y^2}}, f_y=\dfrac{-y}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$,故

$$f_x(2\sqrt{2},3)=-1, f_y(2\sqrt{2},3)=-\frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

(6)因 $f_x=1+(y-1)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x}{y}}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{xy}}=1+\dfrac{y-1}{2\sqrt{x(y-x)}}$,故

$$f_x(x,1)=1+0=1.$$

3. 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$,求 $f_{xx}(0,0,1), f_{yz}(0,-1,0)$和 $f_{zx}(2,0,1)$.

**解** 由题意可得

$$f_x(x,y,z)=y^2+2zx, f_y(x,y,z)=2xy+z^2, f_z(x,y,z)=2yz+x^2,$$

二级偏导为

$$f_{xx}(x,y,z)=2z, f_{yz}(x,y,z)=2z, f_{zx}(x,y,z)=2x,$$

故 $f_{xx}(0,0,1)=2, f_{yz}(0,-1,0)=0, f_{zx}(2,0,1)=4$.

4. 求函数 $z=y^x\ln(xy)$的$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$及 $dz$.

**解** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^x\cdot\ln y\cdot\ln(xy)+y^x\cdot\dfrac{1}{xy}\cdot y=y^x\ln y\ln(xy)+y^x\cdot\dfrac{1}{x}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1}\ln(xy)+y^x\cdot\frac{1}{xy}\cdot x=xy^{x-1}\ln(xy)+y^{x-1},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\ln y\cdot\left[y^x\ln y\cdot\ln(xy)+y^x\cdot\frac{1}{xy}\cdot y\right]+\frac{y^x\ln y-y^x}{x^2}$$

$$=y^x\ln y[\ln y\ln(xy)+\frac{1}{x}]+\frac{y^x(\ln y-1)}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xy^{x-1}\ln y\cdot\ln(xy)+y^x\cdot\left[\frac{1}{y}\cdot\ln(xy)+\ln y\cdot\frac{1}{xy}\cdot x\right]+y^{x-1}$$

$$=y^{x-1}[x\ln y\ln(xy)+\ln(xy)+\ln y+1],$$

$$dz=\left[y^x\ln y\ln(xy)+y^x\cdot\frac{1}{x}\right]dx+[xy^{x-1}\ln(xy)+y^{x-1}]dy.$$

5. 求下列函数的全微分:

(1) $z=(xy)^y$;　　(2) $u=(xy)^z$.

**解** (1)$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\cdot(xy)^{y-1}\cdot y=y^2(xy)^{y-1}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(e^{y\ln(xy)})=(xy)^y\left[\ln(xy)+y\cdot\frac{1}{xy}\cdot x\right]=(xy)^y[\ln(xy)+1],$$

故 $dz=y^2(xy)^{y-1}dx+(xy)^y[\ln(xy)+1]dy$.

(2) $\frac{\partial u}{\partial x}=yz(xy)^{z-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=xz(xy)^{z-1}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=(xy)^z\ln(xy)$,

故 $\mathrm{d}u=yz(xy)^{z-1}\mathrm{d}x+xz(xy)^{z-1}\mathrm{d}y+(xy)^z\ln(xy)\mathrm{d}z$.

6. 求函数 $z=x^2y^3$ 在点(2,−1)处的全微分.

**解** 因 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^3$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3x^2y^2$,所以

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,-1)}=-4, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,-1)}=12,$$

故 $\mathrm{d}z|_{(2,-1)}=-4\mathrm{d}x+12\mathrm{d}y$.

7. 证明函数 $u=z\arctan\frac{x}{y}$ 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

**证明** 因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=z\cdot\frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}=\frac{zy}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=z\cdot\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}}=\frac{-xz}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\arctan\frac{x}{y},$$

则有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{-2xyz}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2xyz}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

故 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

8. 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点(0,0)连续,并求 $f_x(0,0)$ 和 $f_y(0,0)$.

**证明** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\cdot\frac{x^2}{y}+1}{\left(\frac{x^2}{y}+1\right)}\cdot\sqrt{x^2+y^2}=0,$$

故 $f(x,y)$在点$(0,0)$处连续,则

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^3}{\sqrt{(\Delta x)^2}}\cdot\frac{1}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta y)^2}}\cdot\frac{1}{\Delta y}\text{不存在}.$$

9. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点$(0,0)$处的可导性,连续性与可微性.

**解** 取 $y=kx$,则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{k^2}{1+k^2},$$

故 $f(x,y)$在$(0,0)$处极限不存在,则不连续.

因为

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0,f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0,$$

故 $f(x,y)$在$(0,0)$处两个偏导数都存在,但不连续且不可微.

10. 求下列函数的全导数:

(1) $z=\mathrm{e}^{u-2v}$,其中 $u=\sin t,v=t^2$;

(2) $z=\arcsin(u-v)$,其中 $u=3t,v=4t^3$.

**解** (1) $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{u-2v}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\mathrm{e}^{u-2v}\cdot(-2)\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{\sin t-2t^2}(\cos t-4t)$.

(2) $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\sqrt{1-(u-v)^2}}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{3-12t^2}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$.

11. 设 $z=u\arctan(uv),u=x^2,v=x\mathrm{e}^y$,求 $z$ 关于 $x,y$ 的偏导数.

**解** $\frac{\partial z}{\partial x}=\arctan(uv)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{u}{1+u^2v^2}\cdot\left(v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)$

$$=2x\arctan(x^3\mathrm{e}^y)+\frac{3\mathrm{e}^yx^4}{1+x^6\mathrm{e}^{2y}},$$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\arctan(uv)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{u}{1+u^2v^2}\cdot\left(v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}+u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right)=\frac{x^5\mathrm{e}^y}{1+x^6\mathrm{e}^{2y}}$.

12. 设 $z=x^3f\left(xy,\frac{y}{x}\right)$,其中 $f$ 具有二阶连续偏导数,求$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

**解** 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2f+x^3\cdot(f'_1\cdot y-\frac{y}{x^2}\cdot f'_2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^3\cdot(xf'_1+\frac{1}{x}f'_2),$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=x^4\cdot\left(x\cdot f''_{11}+\frac{1}{x}f''_{12}\right)+x^2\cdot\left(x\cdot f''_{12}+\frac{1}{x}f''_{22}\right)\\&=x^5f''_{11}+2x^3f''_{12}+xf''_{22};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\\&=4x^3f'_1+x^4\cdot\left(yf''_{11}-\frac{y}{x^2}f''_{12}\right)+2xf'_2+x^2\cdot\left(yf''_{12}-\frac{y}{x^2}f''_{22}\right)\\&=4x^3f'_1+2xf'_2+x^4yf''_{11}-yf''_{22}.\end{aligned}$$

13. 设函数 $z=f(x,y)$在点(1,1)处可微,且 $f(1,1)=1,\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2,\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3$, $\varphi(x)=f[x,f(x,x)]$,求$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$.

**解** 由题意得 $\varphi^3(x)=f^3[x,f(x,x)]$,所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)=3\cdot f^2[x,f(x,x)]\left[\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y})\right],$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}=3\cdot f^2(1,1)\cdot(2+3\times5)=51.$$

14. 求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 在点(1,2,3)处的切平面及法线方程.

**解** 令 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14$,则 $f_x(x,y,z)=2x$, $f_y(x,y,z)=2y$, $f_z(x,y,z)=2z$,所以球面在(1,2,3)处的切平面法向量为(2,4,6),故法线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3},$$

切平面方程为

$$x-1+2(y-2)+3(z-3)=0,$$

即 $x+2y+3z-14=0$.

15. 求函数 $z=xe^{2y}$在点 $P(1,0)$沿从点 $P(1,0)$到点 $Q(2,-1)$的方向的方向导数.

**解** 从 $P$ 到 $Q$ 的方向向量为$(1,-1)$,与之同向的单位向量 $\boldsymbol{e}_l=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,则

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=\left.e^{2y}\right|_{(1,0)}=1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(1,0)}=2xe^{2y}\bigg|_{(1,0)}=2,$$

故函数 $z$ 在 $P$ 沿 $P$ 到 $Q$ 的方向导数为

$$1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

16. 求函数 $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$的极值.

**解**　由题意得

$$f_x(x,y)=2e^{2x}(x+y^2+2y)+e^{2x},$$
$$f_y(x,y)=e^{2x}(2y+2),$$

联立$\begin{cases}f_x(x,y)=0\\f_y(x,y)=0\end{cases}$可得

$$\begin{cases}2x+2y^2+4y+1=0,\\2y+2=0,\end{cases}$$

故驻点为$\left(\frac{1}{2},-1\right)$.

又因

$$f_{xx}(x,y)=4e^{2x}(x+y^2+2y)+2e^{2x}+2e^{2x},$$
$$f_{xy}(x,y)=2e^{2x}(2y+2),$$
$$f_{yy}(x,y)=2e^{2x},$$

所以

$$f_{xx}(x,y)\big|_{(\frac{1}{2},-1)}=4e(\frac{1}{2}+1-2)+2e+2e=2e,$$
$$f_{xy}(x,y)\big|_{(\frac{1}{2},-1)}=2e(-2+2)=0,$$
$$f_{yy}(x,y)\big|_{(\frac{1}{2},-1)}=2e,$$

因此 $AC-B^2>0$ 且 $A>0$,故 $z$ 在$(\frac{1}{2},-1)$处取得极小值$-\frac{e}{2}$.

17. 求表面积为 $a^2$ 而体积为最大的长方体的体积.

**解**　设长方体的长、宽、高为 $x$、$y$、$z$,则 $2(xy+xz+yz)=a^2$,题意即求 $xyz$ 的最大值.

令 $L(x)=xyz+\lambda(2xy+2xz+2yz-a^2)$,则联立方程组

$$\begin{cases}L_x=yz+\lambda(2y+2z)=0,\\L_y=xz+\lambda(2x+2z)=0,\\L_z=xy+\lambda(2x+2y)=0,\\2xy+2xz+2yz-a^2=0,\end{cases}$$

可解得

$$x=y=z=\frac{\sqrt{6}}{6}a,$$

故以棱长为$\frac{\sqrt{6}}{6}a$的正方体体积最大，最大体积为$V=\frac{\sqrt{6}}{36}a^3$.

18. 某厂要用铁板制成一个体积为 2 $\mathrm{m}^3$ 的有盖长方体水箱. 问当长、宽、高各取怎样的尺寸时，才能使用料最省？

**解** 设长、宽、高为$x,y,z$，则$xyz=2$，题意即求$xy+yz+xz$的最小值.

令$L(x)=xy+yz+xz+\lambda(xyz-2)$，则联立方程组

$$\begin{cases}L_x=y+z+\lambda yz=0,\\ L_y=x+z+\lambda xz=0,\\ L_z=y+x+\lambda xy=0,\\ xyz-2=0\end{cases}$$

可解得

$$x=y=z=\sqrt[3]{2}.$$

故长、宽、高均取$\sqrt[3]{2}$ m 时，用料最省.

# 第十章

# 重积分

## 习题 10-1

1. 设平面区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，根据二重积分的几何意义确定 $\iint\limits_D(2-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值.

**解** $\iint\limits_D(2-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示以 $D$ 为底，以 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 为顶的曲顶柱体的体积，故而

$$V=\iint\limits_D 2-\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\pi\cdot 1^2\cdot\int_0^1 2-\sqrt{r}\mathrm{d}r$$

$$=\pi\cdot\left(2r\Big|_0^1-\frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1\right)=\frac{4}{3}\pi.$$

2. 试用二重积分表示极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$.

**解** 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{n}\right)\left(1+\dfrac{j^2}{n^2}\right)}$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y.$$

3. 利用二重积分的性质，估计下列积分的值：

(1) $I=\iint\limits_D\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D$ 是圆形区域 $x^2+y^2\leqslant 1$；

(2) $I=\iint\limits_{D}\sin^2 x\sin^2 y\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$.

**解** (1) 令 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$,则 $f(x,y)$ 在 $D$ 上的最大值为 1,最小值为 $\mathrm{e}^{-1}$.

$D$ 面积为 $\pi$,故 $\frac{\pi}{\mathrm{e}}\leqslant I\leqslant\pi$.

(2) 令 $f(x,y)=\sin^2 x\sin^2 y$,则 $f(x,y)$ 在 $D$ 上最大值为 1,最小值为 0.

$D$ 面积为 $\pi^2$,故 $0\leqslant I\leqslant\pi^2$.

4. 比较二重积分 $\iint\limits_{D}(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_{D}(x+y)^3\mathrm{d}\sigma$ 的大小:

(1) $D$ 是由直线 $x=0$,$y=0$ 及 $x+y=1$ 围成的闭区域;

(2) $D$ 是由圆 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成的闭区域.

**解** (1) 在 $D$ 中,$0\leqslant x+y\leqslant 1$,故而 $(x+y)^2\geqslant(x+y)^3$,所以

$$\iint\limits_{D}(x+y)^2\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint\limits_{D}(x+y)^3\mathrm{d}\sigma.$$

(2) 在 $D$ 中,令 $\begin{cases}x=\sqrt{2}r\cos\theta+2,r\in[0,1],\\ y=\sqrt{2}r\sin\theta+1,\theta\in[0,2\pi],\end{cases}$

则 $x+y=3+\sqrt{2}r(\sin\theta+\cos\theta)=3+2r\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$.

由于 $r\in[0,1]$,$\theta\in[0,2\pi]$,故 $x+y\in[-1,5]$.

因此在 $D$ 区域中,$x+y\geqslant 1$ 的面积要大于 $x+y\leqslant 1$ 的面积;故而在 $D$ 中 $(x+y)^3\geqslant(x+y)^2$ 的面积比 $(x+y)^2\geqslant(x+y)^3$ 的面积大,因此

$$\iint\limits_{D}(x+y)^2\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint\limits_{D}(x+y)^3\mathrm{d}\sigma.$$

## 习题 10-2

1. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_{D}xy\mathrm{d}\sigma$,其中区域 $D$ 是由抛物线 $y=x^2-1$ 及直线 $y=1-x$ 所围成的区域;

(2) $\iint\limits_{D}x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\left\{(x,y)\middle|1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$;

(3) $\iint\limits_{D}(2x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D$ 由直线 $y=x$,$y=2-x$ 及 $y=0$ 所围成;

(4) $\iint\limits_{D}(x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant\sin x,0\leqslant x\leqslant\pi\}$;

(5) $\iint\limits_D (x^2+xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D$ 是由 $x+y=1$,$x+y=2$,$y=x$,$y=2x$ 所围成的闭区域.

**解** (1)所围区域如图 10-1 所示,则

$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}}xy\,\mathrm{d}x+\int_0^3\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y+1}}^{1-y}xy\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{y}{2}\cdot(y+1-y-1)\mathrm{d}y+\int_0^3\frac{y}{2}\cdot(1-2y+y^2-y-1)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^3\left(-\frac{y^3}{2}-\frac{3}{2}y^2\right)\mathrm{d}y=-\frac{27}{8}.$$

(2) $\iint\limits_D x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2 x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin y\mathrm{d}y=\frac{4-1}{2}\cdot\left(-\cos y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=-\frac{3}{2}.$

(3) 所围图形如图 10-2 所示,则

$$\iint\limits_D(2x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(2x+y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x}(2x+y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1(2x^2+\frac{x^2}{2})\mathrm{d}x+\int_1^2\left[2x\cdot(2-x)+\frac{(2-x)^2}{2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{7}{3}.$$

(4) $\iint\limits_D(x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}(x^2-y^2)\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\left(x^2\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}\right)\mathrm{d}x=\pi^2-\frac{40}{9}.$

(5) 所围图形如图 10-3 所示,则

$$\iint\limits_D(x^2+xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}y\int_{1-y}^{y}(x^2+xy)\mathrm{d}x+\int_{\frac{2}{3}}^{1}\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{y}(x^2+xy)\mathrm{d}x+$$

$$\int_1^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{2-y}(x^2+xy)\mathrm{d}x=\frac{25}{96}.$$

2. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}\sigma$,其中 $D$ 是由 $|x|+|y|\leqslant 1$ 所确定的区域;

(2) $\iint\limits_D x\sqrt{1-x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D$ 是由 $x=1$,$y=x$ 及 $x$ 轴所围成的区域;

(3) $\iint\limits_D \sin y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D$ 是由 $x=0$,$y=1$,$y=\sqrt{x}$ 所确定的区域;

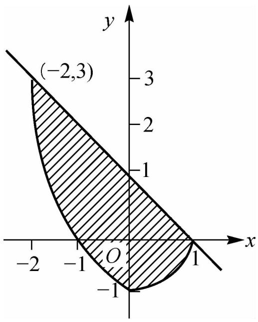


图 10-1

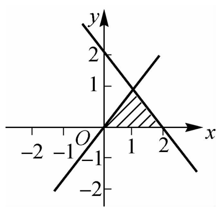


图 10-2

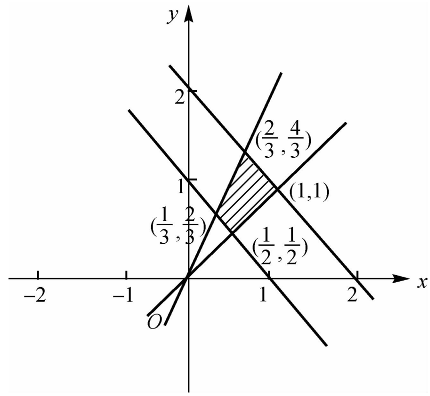


图 10-3

(4) $\iint\limits_D |\sin(x+y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant \pi,0\leqslant y\leqslant \pi\}$.

**解** (1) 所围区域如图 10-4 所示,则

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{-y-1}^{1+y}\mathrm{e}^{x+y}+\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{y-1}^{1-y}\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x=\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

(2) 所围图形如图 10-5 所示,则

$$\iint\limits_D x\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x x\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{4}.$$

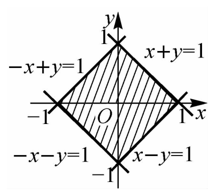


图 10-4

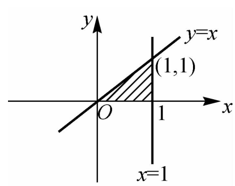


图 10-5

(3) 所围图形如图 10-6 所示,则

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \sin y^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{y^2}\sin y^3\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 y^2\sin y^3\,\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\int_0^1\sin y^3\,\mathrm{d}y^3\\&=-\frac{1}{3}\cos y^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}(1-\cos 1).\end{aligned}$$

(4)所围图形如图 10-7 所示,则

$$\iint_D |\sin(x+y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{0\leqslant x+y\leqslant\pi} \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{\pi\leqslant x+y\leqslant 2\pi} \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\pi-x} \sin(x+y)\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \mathrm{d}x\int_{\pi-x}^{\pi} \sin(x+y)\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\pi.$$

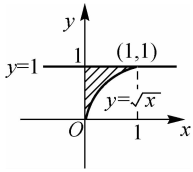


图 10-6

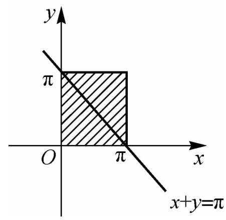


图 10-7

3. 改变下列积分次序：

(1) $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$；　　(2) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$；

(3) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

**解**　(1) 积分所表示的图形如图 10-8 所示，则

$$原式 = \int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{y-1} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

(2) 积分所表示的图形如图 10-9 所示，则

$$原式 = \int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,.$$

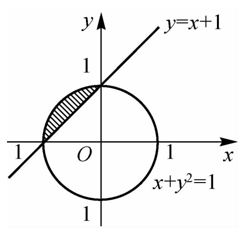


图 10-8

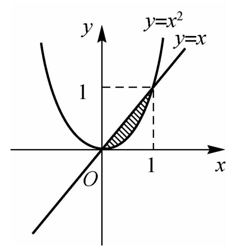


图 10-9

(3) 积分所表示的图形如图 10-10 所示，则

$$原式 = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

(4) 积分所表示的图形如图 10-11 所示，则

$$原式 = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x\int_x^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

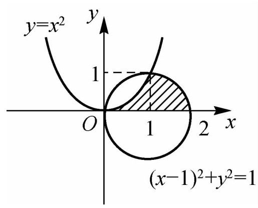


图 10-10

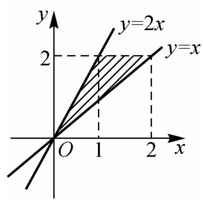


图 10-11

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，并设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = A$，求证 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y = \frac{A^2}{2}$.

**证明** 根据题意画出示意图如图 10-12 所示.

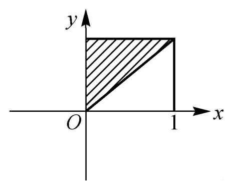


图 10-12

因为

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)\mathrm{d}x,$$

故有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\int_0^y f(x)\mathrm{d}x.$$

因此

$$\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y = \int_0^y f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y + \int_0^y f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = A,$$

则 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y = A\cdot\frac{A}{2} = \frac{A^2}{2}$.

5. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的正值连续函数，证明 $\iint\limits_D \frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant (b-a)^2$，其中 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant y\leqslant b\}$.

**证明** $\iint\limits_D \frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y$，由于 $D$ 的二重积分具有轮换对称性，故

$$\iint\limits_D \frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D \frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\mathrm{d}y.$$

因此当 $f(x)\geqslant f(y)$ 时，则有

$$\iint\limits_D \frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \sigma\cdot 1 = (b-a)^2,$$

当 $f(x) < f(y)$ 时，则有

$$\iint_D \frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y > \sigma \cdot 1 = (b-a)^2.$$

综上所述，$\iint\limits_D \frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant (b-a)^2$.

## 习题 10-3

1. 计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D \sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D$ 是由 $x^2+y^2=1$ 所围成的闭区域；

(2) $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D$ 是由 $x^2+y^2=2$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域；

(3) $\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D$ 是由圆周 $x^2+y^2=2$，$x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0$，$y=x$ 所围成的在第一象限的闭区域；

(4) $\iint\limits_D (1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0$，$y=x$ 所围成的在第一象限的闭区域；

(5) $\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D$ 是由 $x^2+y^2\leqslant 1$，$x+y\geqslant 1$ 所围成的闭区域；

(6) $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D$ 是由 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域.

**解** (1) 在极坐标系中，$D$ 为 $0\leqslant\rho\leqslant 1$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，所以

$$\begin{aligned}\iint_D \sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \rho\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\sin\rho^2\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^1 2\pi\rho\sin\rho^2\,\mathrm{d}\rho \\ &= \int_0^1 \pi\sin\rho^2\,\mathrm{d}\rho^2 \\ &= \pi(1-\cos 1).\end{aligned}$$

(2) 在极坐标系中，$D$ 为 $0\leqslant\rho\leqslant\sqrt{2}$，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以

$$\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{2}}\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\rho^2)\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2}\rho\ln(1+\rho^2)\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}(1+\rho^2)\ln(1+\rho^2)-\frac{1}{2}\rho^2\right]\Bigg|_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4}(3\ln3-2).$$

(3) 在极坐标系中,$D$ 为 $1\leqslant\rho\leqslant\sqrt{2}, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$,所以

$$\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^{\sqrt{2}}\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{\frac{\pi}{4}}\arctan\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{64}.$$

(4) 在极坐标系中,$D$ 为 $0\leqslant\rho\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$,所以

$$\iint\limits_D (1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\rho^2)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{\rho}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{16}.$$

(5) 在极坐标系中,$D$ 为 $\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\leqslant\rho\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$,所以

$$\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^1\rho\cdot\frac{\rho(\cos\theta+\sin\theta)}{\rho^2}\mathrm{d}\rho$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\right)\cdot(\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= (\sin\theta-\cos\theta-\theta)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2-\frac{\pi}{2}.$$

(6) 在极坐标系中,$D$ 为 $0\leqslant\rho\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$,所以

$$\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{1+\rho^2}}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{\rho\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{1+\rho^2}}\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\pi}{8}(\pi-2).$$

2. 化二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$为极坐标形式的二次积分，其中积分区域$D$分别为：

(1) $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$；　　(2) $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$；

(3) $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2y\}$；　　(4) $\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

**解**　(1) 令 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$，则$\begin{cases}0\leqslant \rho\cos\theta\leqslant 1,\\ 0\leqslant \rho\sin\theta\leqslant 1,\end{cases}$即$\begin{cases}0\leqslant \rho\leqslant 1;\\ 0\leqslant \theta\leqslant 2\pi,\end{cases}$所以

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

(2) 因 $1\leqslant \rho\leqslant \sqrt{2},0\leqslant \theta\leqslant 2\pi$，故

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^{\sqrt{2}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

(3) $D$ 为$\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2=1\}$，故 $0\leqslant \theta\leqslant \pi,0\leqslant \rho\leqslant 2\sin\theta$，所以

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

(4) 由题知$\begin{cases}0\leqslant\rho\cos\theta\leqslant 1\\ 0\leqslant\rho\sin\theta\leqslant 1\end{cases}$，故 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$.

又因在 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上，$\cos\theta\geqslant\sin\theta$，故

$$0\leqslant\rho\leqslant\frac{1}{\cos\theta};$$

在 $0\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$上，$\sin\theta\geqslant\cos\theta$，故

$$0\leqslant\rho\leqslant\frac{1}{\sin\theta};$$

因此

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

3. 化下列积分为极坐标形式的二次积分：

(1) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$；　　(2) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$；

(3) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$；　　(4) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$.

**解**　(1) 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$

(2) 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho,(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$.

(3) 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho,(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$.

(4) 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{1}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho,(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$.

4. 改变 $\int_0^{2\sqrt{2}}\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}f(\rho,\theta)\mathrm{d}\theta+\int_{2\sqrt{2}}^{4}\mathrm{d}\rho\int_{\arccos\frac{2}{\rho}}^{\frac{\pi}{3}}f(\rho,\theta)\mathrm{d}\theta$ 的积分次序.

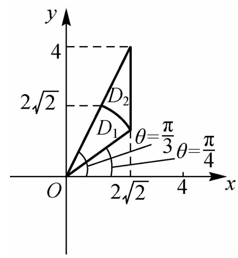


图 10-13

**解** 如图 10-13 所示，将积分区域分为 $D_1$ 和 $D_2$ 两部分，则 $D_1$ 中，$0\leqslant\rho\leqslant2\sqrt{2}$，$\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}$；$D_2$ 中，$2\sqrt{2}\leqslant\rho\leqslant4$，$\arccos\frac{2}{\rho}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}$；从而得 $\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}$.

而 $0\leqslant\rho\leqslant2/\cos\theta$，故

$$\int_0^{2\sqrt{2}}\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}f(\rho,\theta)\mathrm{d}\theta+\int_{2\sqrt{2}}^{4}\mathrm{d}\rho\int_{\arccos\frac{2}{\rho}}^{\frac{\pi}{3}}f(\rho,\theta)\mathrm{d}\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{2}{\cos\theta}}f(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho.$$

* 5. 作适当的变换，计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{y-x}{y+x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是由 $x$ 轴、$y$ 轴和直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域；

(2) $\iint\limits_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是由 $xy=1,xy=2,y=x,y=4x$ 所围成的在第一象限内的闭区域.

**解** (1)令 $u=x+y,v=y-x$，则

$$x=\frac{u-v}{2},y=\frac{u+v}{2},$$

可得 $D$ 在 $uOv$ 面上对应的区域如图 10-14 所示.

因此

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2},$$

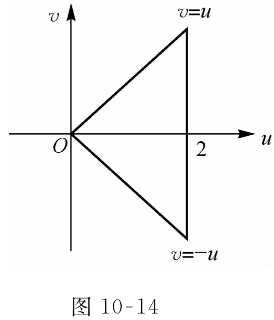


图 10-14

于是

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{y-x}{y+x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}u\int_{-u}^{u}\mathrm{e}^{\frac{v}{u}}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^2 \frac{1}{2}\cdot u(\mathrm{e}^{\frac{u}{u}}-\mathrm{e}^{-\frac{u}{u}})\mathrm{d}u$$

$$=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}.$$

(2)令 $u=xy, v=\dfrac{y}{x}$,则

$$x=\sqrt{\frac{u}{v}}, y=\sqrt{uv},$$

可得 $uOv$ 面上 $D$ 为$\{(u,v)\,|\,1\leqslant u\leqslant 2, 1\leqslant v\leqslant 4\}$,因此

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{u}\cdot\frac{1}{v^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} & \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} \end{vmatrix}=\frac{1}{2v},$$

于是$\iint\limits_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}u\int_1^4\frac{u^2}{2v}\mathrm{d}v=\frac{7}{3}\ln 2.$

*6. 求由下列曲线所围成的闭区域 $D$ 的面积:

(1) $D$ 是由曲线 $xy=1, xy=2, y=x, y=2x(x>0, y>0)$所围成的闭区域;

(2) $D$ 是由曲线 $y=x^3, y=4x^3, x=y^3, x=4y^3$ 所围成的第一象限部分的闭区域.

**解** (1)令 $xy=u$ $\dfrac{y}{x}=v$,则 $D$ 在 $uOv$ 面上为

$$\{(u,v)\,|\,1\leqslant u\leqslant 2, 1\leqslant v\leqslant 2\},$$

于是 $J=\dfrac{1}{2v}$,故所围区域面积为

$$S=\int_1^2\mathrm{d}u\int_1^2\frac{1}{2v}\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\ln 2.$$

(2)令 $u=\dfrac{y}{x^3}, v=\dfrac{x}{y^3}$,则 $D$ 在 $uOv$ 面上为

$$\{(u,v)\,|\,1\leqslant u\leqslant 4, 1\leqslant v\leqslant 4\},$$

于是$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt[8]{u^3v}}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt[8]{uv^3}}, \end{cases}$因此

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} -\frac{3}{8}u^{-\frac{11}{8}}v^{-\frac{1}{8}} & -\frac{1}{8}u^{-\frac{3}{8}}v^{-\frac{9}{8}} \\ -\frac{1}{8}u^{-\frac{9}{8}}v^{-\frac{3}{8}} & -\frac{3}{8}u^{-\frac{1}{8}}v^{-\frac{11}{8}} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{9}{64}v^{-\frac{2}{3}}u^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{64}v^{-\frac{2}{3}}u^{-\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{1}{8}v^{-\frac{2}{3}}u^{-\frac{2}{3}},$$

故所求面积为

$$S=\int_1^4\mathrm{d}u\int_1^4\frac{1}{8}v^{-\frac{2}{3}}u^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}v=\frac{1}{8}.$$

*7. 作适当的变换，证明 $\iint\limits_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 f(u)\mathrm{d}u$，其中 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$.

**证明** 令 $x+y=u, x-y=v$，则

$$x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2},$$

$$D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\},$$

故在 $uOv$ 面上，$D$ 为 $\{(u,v)\mid -1\leqslant u\leqslant 1, -1\leqslant v\leqslant 1\}$，于是

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2},$$

因此

$$\iint\limits_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1\mathrm{d}u\int_{-1}^1 f(u)\cdot\left|-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}v=\int_{-1}^1 f(u)\mathrm{d}u.$$

## 习题 10-4

1. 求底圆半径相等的两个直交圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=R^2$ 所围立体的表面积.

**解** 设第一卦限内的立体面位于圆柱面 $x^2+z^2=R^2$ 上的那一部分的面积为 $A$，则由对称性知全部表面的面积为 $16A$. 于是

$$A=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}+0}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_R\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= R\int_0^R \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y$$

$$= R\int_0^R \mathrm{d}x = R^2,$$

故全部表面积为 $16R^2$.

2. 求平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$被三个坐标面割出部分的面积.

**解** 由题意得 $Z=c-\frac{cx}{a}-\frac{cy}{b}$,$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c}{a}$,$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c}{b}$,则平面在 $xOy$ 面上的投影为 $y=-\frac{b}{a}(x-a)$,$(0\leqslant x\leqslant a)$,故

$$A = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{D} \sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{-\frac{b}{a}(x-a)} \sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}\mathrm{d}y$$

$$= \sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)\cdot\left(\frac{a^2}{2}-a^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}.$$

3. 设半径为 $R$ 的球面$\Sigma$的球心在定球面$x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$上,问当 $R$ 取何值时,球面$\Sigma$在定球面内部的那部分面积最大?

**解** 由题意知 $R$ 应大于 $a$,设球面球心位于$(0,0,a)$,则球面方程为

$$x^2+y^2+(z-a)^2=R^2.$$

取 $R^2-(z-a)^2=a^2-z^2$,则得

$$R^2+2za-a^2=a^2, z=\frac{2a^2-R^2}{2a},$$

故曲面在定球面内部在 $xOy$ 面上的投影为

$$x^2+y^2=a^2-\frac{4a^4-4a^2R^2+R^4}{4a^2},$$

$$=R^2-\frac{R^4}{4a^2},$$

$$z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}+a, \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

因此

$$S=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{R}{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{R^2-\frac{R^4}{4a^2}}}\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\cdot R\cdot\int_0^{\sqrt{R^2-\frac{R^4}{4a^2}}}-\frac{1}{2\sqrt{R^2-\rho^2}}\mathrm{d}(R^2-\rho^2)$$

$$=2\pi R\cdot\left(-\sqrt{R^2-\rho^2}\,\Big|_0^{\sqrt{R^2-\frac{R^4}{4a^2}}}\right)=2\pi R\cdot\left(-\frac{R^2}{2a}+R\right).$$

令 $f(R)=2\pi R\cdot\left(-\frac{R^2}{2a}+R\right)$,则

$$f'(R)=2\pi\cdot\left(-\frac{R^2}{2a}+R\right)+2\pi R\cdot\left(-\frac{R}{a}+1\right)=-\frac{2\pi R^2}{2a}+2\pi R-\frac{2\pi R^2}{a}+2\pi R$$

$$=\frac{-3\pi R^2}{a}+4\pi R,$$

当 $f'(R)=0$ 时,可得 $R=\frac{4}{3}a$ 时所求面积最大.

4.求下列曲面所围的体积:

(1) $x^2+y^2=R^2, x^2+z^2=R^2$;

(2) $z=x^2+2y^2, z=6-2x^2-y^2$;

(3) $z=6-x^2-y^2, z=\sqrt{x^2+y^2}$.

**解** (1)设第一卦限内体积为 $V$,则对称性知总体积为 $8V$. 于是

$$V=\iint_D\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2-\rho^2\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}R^3,$$

故总体积为 $\frac{16}{3}R^3$.

(2)由题意知两曲面交线为 $x^2+y^2=2$.

令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,则

$$V=\iint_D(6-2x^2-y^2-x^2-2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}(6-3\rho^2)\mathrm{d}\theta$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}(6\rho-3\rho^3)\mathrm{d}\rho$$

$$=6\pi.$$

(3) 由题意知两曲面交线为 $x^2+y^2-\sqrt{x^2+y^2}-6=0$,则得

$$x^2+y^2=9.$$

令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,则

$$\begin{aligned}V&=\iint_D(6-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^3\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}(6-\rho^2-\rho)\mathrm{d}\theta\\&=2\pi\int_0^3(6\rho-\rho^3-\rho^2)\mathrm{d}\rho\\&=\frac{32}{3}\pi.\end{aligned}$$

5. 设均匀薄片(面密度为常数 1)所占的闭区域 $D$ 如下,求给定的转动惯量:

(1) $D$ 由抛物线 $y=1-x^2$ 与 $x$ 轴围成,求 $I_x, I_y$;

(2) $D$ 为矩形闭区域 $\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b\}$,求 $I_x, I_y$.

**解** (1) $$\begin{aligned}I_y&=\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x^2}x^2\mathrm{d}y=\int_{-1}^1(x^2-x^4)\mathrm{d}x\\&=\frac{1+1}{3}-\frac{1+1}{5}=\frac{4}{15},\end{aligned}$$

$$I_x=\iint_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x^2}y^2\mathrm{d}y=\int_{-1}^1\frac{(1-x^2)^3}{3}\mathrm{d}x=\frac{32}{105}.$$

(2) $$I_x=\iint_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^b y^2\mathrm{d}y=\frac{ab^3}{3},$$

$$I_y=\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a x^2\mathrm{d}x\int_0^b\mathrm{d}y=\frac{a^3b}{3}.$$

6. 设有一等腰直角三角形薄片腰长为 $a$,各点处的面密度等于该点到直角顶点的距离的平方,求这薄片的质心.

**解** 如图 10-15 所示,按题设面密度为

$$\mu(x,y)=x^2+y^2,$$

由对称性知 $\bar{x}=\bar{y}$. 于是

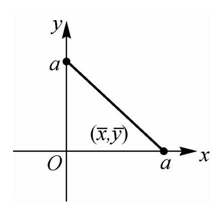

图 10-15

$$\begin{aligned}M&=\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y\\&=\int_0^a\left[x^2(a-x)+\frac{(a-x)^3}{3}\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6}a^4,$$

$$M_x = \iint_D x(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^a x\mathrm{d}x\int_0^{a-x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^a \left[x^3(a-x)+\frac{x(a-x)^3}{3}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^a \left(-\frac{4}{3}x^4+2ax^3-a^2x^2+\frac{a^3x}{3}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{15}a^5.$$

因此 $\overline{x}=\frac{My}{m}=\frac{2}{5}a$，$\overline{y}=\overline{x}=\frac{2}{5}a$，故质心为 $\left(\frac{2}{5}a,\frac{2}{5}a\right)$.

## 习题 10-5

1. 化三重积分 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为直角坐标系下的三次积分，其中积分区域 $\Omega$ 分别是：

(1) 由 $x+y+2z=1$，$x=0$，$y=0$ 及 $z=0$ 四个平面所围成的闭区域；

(2) 由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的闭区域；

(3) 由曲面 $z=x^2+y^2$ 及 $z=2-x^2-y^2$ 所围成的闭区域；

(4) 由曲面 $z=xy$，$x^2+y^2=1$，$z=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域.

**解** (1) 由题意知闭区域在 $xOy$ 面投影为 $x+y=1$，故

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{1-x-y}{2}} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

(2) 由题知闭区域在 $xOy$ 面投影为 $x^2+2y^2=1$，故

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}}\mathrm{d}y\int_{x^2+2y^2}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

(3) 由题知闭区域在 $xOy$ 面投影为 $x^2+y^2=1$，故

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

(4) 由题知闭区域在 $xOy$ 面投影为 $x^2+y^2=1$，$(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$，故

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^{xy} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

2. 求$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中$\Omega$为三个坐标面及平面$x+y+z=1$所围成的闭区域.

**解**　由题知闭区域在$xOy$面上投影为$x+y=1$,$(0\leqslant x\leqslant 1)$,故

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}z\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{(1-x-y)^2}{2}\mathrm{d}y=\frac{1}{24}.$$

3. 求$\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中积分区域$\Omega$为由曲面$z=x^2+2y^2$及$z=2-x^2$所围成的闭区域.

**解**　由题知闭区域在$xOy$面上投影为$x^2+y^2=1$,故

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2}x\mathrm{d}z\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}2x-x^3-x^3-2xy^2\mathrm{d}y=0.\end{aligned}$$

4. 求$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中积分区域$\Omega$为由$1=x^2+y^2$,$z=\sqrt{x^2+y^2}$及$z=0$所围成的闭区域.

**解**　由题知闭区域在$xOy$面上的投影为$x^2+y^2=1$,故

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}z\mathrm{d}z\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{x^2+y^2}{2}\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2}{2}\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^1 2\pi\cdot\frac{\rho^3}{2}\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

5. 求$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中积分区域$\Omega$为由$1=x^2+y^2$,$z=0$及$z=1(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$所围成的闭区域.

**解**　显然,$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$指此闭区域的体积.本题意可得闭区域的底面积$S$和高$h$分别为

$$S=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2=\frac{\pi}{4},h=1-0=1,$$

故

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}.$$

6. 求$\iiint\limits_{\Omega} e^{|z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中积分区域 $\Omega$ 为由 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域.

**解**　由题意得 $\Omega$ 在 $xOy$ 面的投影为 $x^2+y^2=1$，则由对称性得

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} e^{|z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= 2\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^z\mathrm{d}z\\&= 2\int_{0}^{1}\rho\mathrm{d}\rho\int_{0}^{2\pi}(e^{\sqrt{1-\rho^2}}-1)\mathrm{d}\theta\\&= 4\pi\int_{0}^{1}(\rho e^{\sqrt{1-\rho^2}}-\rho)\mathrm{d}\rho\\&= 2\pi.\end{aligned}$$

7. 求$\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{x}\mathrm{d}y\int_{0}^{y}\dfrac{\sin z}{1-z}\mathrm{d}z$.

**解**　交换积分位置得

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{x}\mathrm{d}y\int_{0}^{y}\frac{\sin z}{1-z}\mathrm{d}z &= \int_{0}^{1}\mathrm{d}z\int_{0}^{1-z}\mathrm{d}y\int_{0}^{y}\frac{\sin z}{1-z}\mathrm{d}x\\&= \int_{0}^{1}\mathrm{d}z\int_{0}^{1-z} y\frac{\sin z}{1-z}\mathrm{d}y\\&= \int_{0}^{1}\frac{1}{2}(\sin z-z\sin z)\mathrm{d}z\\&= \frac{1}{2}\left(-\cos z\Big|_{0}^{1}+z\cos z\Big|_{0}^{1}-\sin z\Big|_{0}^{1}\right)=\frac{1}{2}(1-\sin 1).\end{aligned}$$

## 习题 10-6

1. 利用柱面坐标计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中积分区域 $\Omega$ 为由 $x^2+y^2+z^2=4(z\geqslant 0)$ 与抛物面 $3z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ 所围成的闭区域；

(2) $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中积分区域 $\Omega$ 为由 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=0$ 所围成的闭区域.

**解**　(1) 由题意得 $\Omega$ 在 $xOy$ 面投影为 $x^2+y^2=6(\sqrt{13}-3)$，故

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{\sqrt{6(\sqrt{13}-3)}}\rho\mathrm{d}\rho\int_{\frac{1}{6}\rho^2}^{\sqrt{4-\rho^2}} z\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{6(\sqrt{13}-3)}}\frac{4-\rho^2-\frac{1}{36}\rho^4}{2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\cdot\left\{(6\sqrt{13}-3)-\frac{1}{8}[6(\sqrt{13}-3)]^2-\frac{1}{72}\cdot\frac{1}{6}[6(\sqrt{13}-3)]^3\right\}$$

$$=\frac{13}{4}\pi.$$

(2) 由题意得 $\Omega$ 在 $xOy$ 面投影为 $x^2+y^2=1$,故

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho}(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta+z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho(1-\rho)\cdot(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta)+\frac{\rho\cdot(1-\rho)^2}{2}\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\pi}{12}.$$

2. 利用球面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中积分区域 $\Omega$ 为由 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 与 $z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的闭区域;

(2) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中积分区域 $\Omega$ 为由 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域.

**解** (1) 由题意知 $0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$,故

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\varphi}{4}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{\pi}{4}(2-\sqrt{2}).$$

(2) 由题意 $0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi$,故

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi}{5}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{4}{5}\pi.$$

3. 选用适当的坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中积分区域$\Omega$为由$z=\sqrt{x^2+y^2}$及$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$所围成的闭区域；

(2) $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由曲面$y=x^2+z^2$与平面$y=4$所围成的闭区域；

(3) $\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中积分区域$\Omega$为由$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$及$z=x^2+y^2$所围成的闭区域；

(4) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中积分区域$\Omega$为由$4z^2=25(x^2+y^2)$及$z=5$所围成的闭区域.

**解**　(1) 由题意知闭区域在$xOy$面投影为$x^2+y^2=\frac{1}{2}$，故

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho}^{\sqrt{1-\rho^2}}(\rho\cos\theta+z)\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left[\rho^2\cos\theta\cdot(\sqrt{1-\rho^2}-\rho)+\frac{1-\rho^2-\rho^2}{2}\cdot\rho\right]\mathrm{d}\rho\\&=\frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

(2) 由题知意闭区域在$xOz$面投影为$x^2+z^2=4$，故令$x=\rho\cos\theta,z=\rho\sin\theta$，则

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}yz&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^4\rho\mathrm{d}y\\&=2\pi\int_0^2\rho^2(4-\rho^2)\mathrm{d}\rho\\&=\frac{128}{15}\pi.\end{aligned}$$

(3) 闭区域在$xOy$面投影为$x^2+y^2=1$，故

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}z\mathrm{d}z\\&=2\pi\int_0^1\rho\cdot\frac{2-\rho^2-\rho^4}{2}\mathrm{d}z\\&=\frac{7}{12}\pi.\end{aligned}$$

(4) 闭区域在$xOy$面投影为$x^2+y^2=4$，故

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 \rho\mathrm{d}\rho\int_{\frac{5}{2}\rho}^{5}\rho^2\mathrm{d}z$$
$$= 2\pi\cdot\int_0^2\rho^3\cdot(5-\frac{5}{2}\rho)\mathrm{d}\rho$$
$$= 8\pi.$$

4. 设有一物体，占有空间闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1\}$，在点 $(x,y,z)$ 处的密度为 $\rho(x,y,z)=x+y+z$，计算该物体的质量.

**解** $M=\iiint_\Omega \rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(x+y+z)\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x+y+\frac{1}{2})\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})\mathrm{d}x$$
$$=\frac{3}{2}.$$

5. 求由圆锥面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=0$ 所围立体的质心(设密度 $\rho(x,y,z)=1$).

**解** 由对称性知 $\bar{x}=\bar{y}$. 由题意知所围立体在 $xOy$ 面投影为 $x^2+y^2=1$，则
$$M=\iiint_\Omega\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho}\mathrm{d}z$$
$$=2\pi\int_0^1\rho-\rho^2\mathrm{d}\rho$$
$$=2\pi\cdot(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})$$
$$=\frac{\pi}{3},$$
$$M_x=\iiint_\Omega x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho}\rho\cos\theta\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\cos\theta(1-\rho)\mathrm{d}\rho$$
$$=\int_0^{2\pi}(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= 0,$$

因此 $\overline{x} = \overline{y} = \dfrac{M_x}{M} = 0.$

又因

$$M_z = \iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \rho\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho} z\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi\int_0^1 \frac{\rho - 2p^2 + p^3}{2}\mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi\cdot\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{\pi}{12},$$

故 $\overline{z} = \dfrac{M_z}{M} = \dfrac{1}{4}.$

因此质心为$\left(0,0,\dfrac{\pi}{12}\right).$

6.设半径为 $R$ 的匀质球占有空间闭区域 $\Omega = \{(x,y,z)\mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2\}$，球的密度为 $\rho_0$，求它对位于 $M_0(0,0,a)(a > R)$处的单位质量的质点的引力.

**解**　由球体的对称性和质量分布的均匀性知 $F_x = F_y = 0$,则引力沿 $z$ 轴的分量为

$$F_z = \iiint\limits_{\Omega} k\rho_0\cdot\frac{z-a}{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v$$

$$= k\rho_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \rho\mathrm{d}\rho\cdot\int_{-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}}\cdot\frac{z-a}{[\rho^2 + (z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi k\rho_0\int_0^R \rho\mathrm{d}\rho\int_{-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{[\rho^2 + (z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}[\rho^2 + (z-a)^2]$$

$$= 2\pi k\rho_0\int_0^R \rho\mathrm{d}\rho\, \frac{-1}{[\rho^2 + (z-a)^2]^{\frac{1}{2}}}\Bigg|_{-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}}$$

$$= \frac{-4k\pi R^3\rho_0}{3a^2}.$$

## 习题 10-7

1.求下列极限:

(1) $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_a^{2+a}\frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2 + a^2}$;　　(2) $\displaystyle\lim_{a\to +\infty}\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^a}\mathrm{d}x$;

(3) $\lim\limits_{a\to 0}\int_0^1 y^4 e^{ay} dy$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^2 \dfrac{dx}{\left(1+\dfrac{2x}{n}\right)^n}$.

**解** (1) 原式 $=\lim\limits_{a\to 0}\int_a^{2+a}\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2} d\dfrac{x}{\sqrt{1+a^2}}$

$$=\lim_{a\to 0}\sqrt{1+a^2}\arctan\frac{x}{\sqrt{1+a^2}}\Bigg|_a^{2+a}$$

$$=\lim_{a\to 0}\sqrt{1+a^2}\left(\arctan\frac{2+a}{\sqrt{1+a^2}}-\arctan\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)$$

$$=\arctan 2.$$

(2) 在 $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^1 x e^{-x^a} dx$ 中，因 $0\leqslant x\leqslant 1$，故 $\lim\limits_{a\to+\infty} e^{-x^a}=1$，因此

$$\text{原式}=\int_0^1 x dx=\frac{1}{2}.$$

(3) 原式 $=\int_0^1 y^4 dy=\dfrac{1}{5}$.

(4) 原式 $=\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^2\dfrac{dx}{\left(1+\dfrac{2x}{n}\right)^{\frac{n}{2x}\cdot 2x}}$

$$=\int_0^2\frac{dx}{e^{2x}}=-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^2$$

$$=\frac{1-e^{-4}}{2}.$$

2. 求下列函数的导数：

(1) $\varphi(x)=\int_x^{x^2} e^{-xy^2} dy$；

(2) $\varphi(x)=\int_{x^2}^{x^3}\sqrt{\sin(xy)} dy$；

(3) $\varphi(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}(y^2\sin x-y^3) dy$；

(4) $\varphi(x)=\int_0^x f^2(x,y) dy$，其中 $f(x)$ 连续.

**解** (1) $\varphi'(x)=\int_x^{x^2} e^{-xy^2}\cdot(-y^2) dy+e^{-x^5}\cdot 2x-e^{-x^3}\cdot 1$

$$=-\int_x^{x^2} y^2 e^{-xy^2} dy+2xe^{-x^5}-e^{-x^3}.$$

$$(2)\varphi'(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{2\sqrt{\sin(xy)}}\cdot\cos(xy)\cdot y\mathrm{d}y+\sqrt{\sin x^4}\cdot 3x^2-\sqrt{\sin x^3}\cdot 2x$$

$$=\int_{x^2}^{x^3}\frac{y\cos(xy)}{2\sqrt{\sin xy}}\mathrm{d}y+3x^2\sqrt{\sin x^4}-2x\sqrt{\sin x^3}.$$

$$(3)\varphi'(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}y^2\cos x\mathrm{d}y+(\cos^2 x\sin x-\cos^3 x)(-\sin x)-(\cos^2 x\sin x-\cos^3 x)\cdot\cos x$$

$$=\frac{\cos^3 x-\sin^3 x}{3}\cos x+\cos^2 x(\sin x-\cos x)\cdot(-\sin x-\cos x)$$

$$=\frac{1}{3}\cos x(\cos x-\sin x)(1+2\sin 2x).$$

$$(4)\varphi'(x)=\int_0^x 2f(x,y)f_x(x,y)\mathrm{d}y+f^2(x,y).$$

3.计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}(|a|<1)$； (2) $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

**解** (1)因 $\displaystyle\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}=\int_{-1}^1\frac{a\cos x}{1+a\cos x\cdot y}\mathrm{d}y$,故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int_{-1}^1\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a}{1+a\cos x\cdot y}\mathrm{d}x=\pi\arcsin a.$$

(2)因 $\displaystyle\ln(1+x)=\int_0^1\frac{x}{1+xy}\mathrm{d}y$,故

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+xy}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

4.设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,求证 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\int_0^t\frac{t}{t^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0)$.

**证明** 因 $\displaystyle\int_0^t\frac{t}{t^2+x^2}\mathrm{d}x=\arctan\frac{x}{t}\Big|_0^t=\frac{\pi}{4}$,故

$$\left(\lim_{t\to 0}\int_0^t\frac{t}{t^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x\right)'=\lim_{t\to 0}\frac{t}{t^2+t^2}f(t)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{2t}=\frac{f'(0)}{2},$$

因此 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\int_0^t\frac{t}{t^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\cdot 2f(0)=\frac{\pi}{2}f(0)$.

## 总复习题十

1.填空题：

(1)设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\}$,则 $\displaystyle\iint_D\mathrm{d}\sigma=$ ________.

(2) 设闭区域 $D$ 由 $y=0, y=x^2, x=1$ 围成，$f(x,y)$ 为 $D$ 上的连续函数，且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，则 $f(x,y)=$ ________.

(3) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 \sqrt{x^2-y^2}\,\mathrm{d}x=$ ________.

(4) $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2} \dfrac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}\sigma=$ ________.

(5) 化 $\int_0^{2a}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x$ 为极坐标系下的二次积分为________.

**解**　(1) $\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma$ 即为 $D$ 的面积．$D$ 表示圆 $(x-1)^2+y^2=1$，其面积为 π，故 $\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\pi$.

(2) 设 $c=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\left(\frac{x}{2}\cdot x^4+Cx^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}+\frac{C}{3},$$

故 $C=\dfrac{1}{12}+\dfrac{C}{3}$，解得 $C=\dfrac{1}{8}$. 因此 $f(x,y)=xy+\dfrac{1}{8}$.

(3) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\sqrt{x^2-y^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{12}$.

(4)
$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\frac{r\cos\varphi\ln(r^2+1)}{r^2+1}\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\frac{r^3\cos\varphi\sin\varphi\ln(r^2+11)}{r^2+1}\mathrm{d}r$$
$$=0.$$

(5) 因 $0\leqslant y\leqslant 2a, 0\leqslant x\leqslant\sqrt{2ay-y^2}$，故

$$x^2+(y-a)^2\leqslant a.$$

又 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}, 0\leqslant\rho\leqslant 2a\sin\theta$，因此

$$\int_0^{2a}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\sin\theta} f(\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho$$

2. 选择题：

(1) 设 $D=\{(x,y)\mid -a\leqslant x\leqslant a, x\leqslant y\leqslant a\}$，$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant a, x\leqslant y\leqslant a\}$，则 $\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}\sigma=$ (　　).

A. $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\,d\sigma$　　B. $\iint\limits_{D_1} xy\,d\sigma$

C. $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\,d\sigma$　　D. 0

(2) 将极坐标下的二次积分 $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\rho$ 化为直角坐标系下的二次积分，则 $I=$(　　).

A. $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

B. $\int_0^1 dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x} f(x,y)dy$

C. $\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$

D. $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$

(3) 旋转抛物面 $z=1+\dfrac{x^2+y^2}{2}$ 在 $1\leqslant z\leqslant 2$ 那部分的曲面面积 $S=$(　　).

A. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$　　B. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$

C. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$　　D. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$

(4) 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} z\,dv$，其中 $\Omega$ 为 $z^2=x^2+y^2$，$z=1$ 围成的立体，则正确的解法为(　　).

A. $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_0^1 z\,dz$　　B. $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_\rho^1 z\,dz$

C. $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dz\int_\rho^1\rho\,d\rho$　　D. $I=\int_0^1 dz\int_0^{\pi}d\theta\int_0^z z\rho\,d\rho$

**解**　(1) $D$ 和 $D_1$ 的关系如图 10-16 所示，$xy$ 关于 $x$、$y$ 均为奇函数，故

$$\iint\limits_D xy\,d\sigma=0.$$

$\cos x\sin y$ 关于 $y$ 是奇函数，关于 $x$ 是偶函数，故

$$\iint\limits_D \cos x\sin y\,d\sigma=2\iint\limits_D \cos x\sin d\sigma.$$

选 A.

(2) $\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \rho \leqslant 2\sin\theta$,则图形如图 10-17 所示,故 C 符合图形.

选 C.

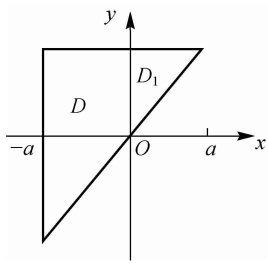


图 10-16

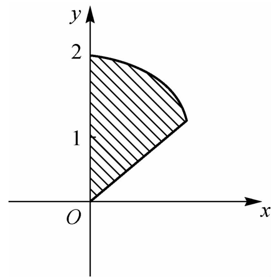


图 10-17

(3) $\frac{\partial z}{\partial x} = x, \frac{\partial z}{\partial y} = y$,$z$ 在 $xOy$ 面投影为 $x^2 + y^2 = 2$.

选 B.

(4) 所围立体在 $xOy$ 面上投影为 $x^2 + y^2 = 1$,故

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \rho \leqslant 1, \rho \leqslant z \leqslant 1.$$

选 C.

3. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D y e^{x^2 y^2} dx dy$,其中 $D$ 是由直线 $x = 1, x = 2, y = 0$ 和曲线 $xy = 1$ 所围成的闭区域;

(2) $\iint\limits_D e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy$,其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$;

(3) $\iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$,其中 $D$ 是由圆周 $x^2 + y^2 = Rx$ 所围成的闭区域;

(4) $\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}} dx dy$,其中 $D$ 是由曲线 $y = -a + \sqrt{a^2 - x^2}$ $(a > 0)$ 和直线 $y = -x$ 所围成的区域.

**解** (1) $\iint\limits_D y e^{x^2 y^2} = \int_1^2 dx \int_0^{\frac{1}{x}} y e^{x^2 y^2} dy = \int_1^2 \frac{e^{x^2 y^2}}{2} \Big|_0^{\frac{1}{x}} dx = \frac{e - 1}{4}$.

(2) $\iint\limits_D e^{\max\{x^2, y^2\} dx dy} = \int_0^1 dx \int_{-x}^{x} e^{x^2} dy + \int_{-1}^{0} dx \int_x^{-x} e^{x^2} dy + \int_0^1 dy \int_{-y}^{y} e^{y^2} dx + \int_{-1}^{0} dy \int_y^{-y} e^{y^2} dx = e - 1$.

(3) $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}\Big|_0^{R\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{3}R^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right).$$

(4) 如图 10-18 所示，$\pi\leqslant\theta\leqslant\frac{7\pi}{4}$，$0\leqslant\rho\leqslant-2a\sin\theta$，所以

$$\iint\limits_D\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\pi}^{\frac{7\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{\rho}{\sqrt{4a^2-\rho^2}}\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=a^2\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\right).$$

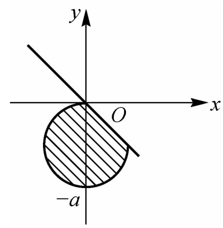

图 10-18

4. 交换下列二次积分的次序：

(1) $\int_1^2\mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$；

(2) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{2y}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^3\mathrm{d}y\int_0^{3-y}f(x,y)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x$；

(4) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{4-x^2}f(x,y)\mathrm{d}y$.

**解** (1) 如图 10-19 所示，则

$$\text{原式}=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(2) 如图 10-20 所示，则

$$\text{原式}=\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}x}^{3-x}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

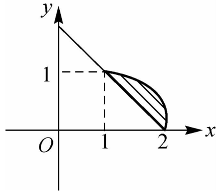

图 10-19

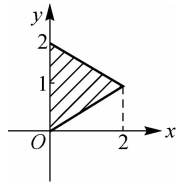

图 10-20

(3) 如图 10-21 所示，则

$$原式 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy.$$

(4) 如图 10-22 所示，则

$$原式 = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx.$$

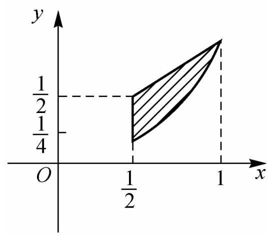


图 10-21

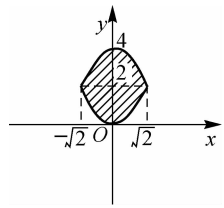


图 10-22

5. 将三重积分 $I = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} dx \int_0^{\sqrt{3(x^2+y^2)}} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dz$ 分别表示为柱面坐标及球面坐标的形式.

**解** $D$ 为 $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leqslant \frac{1}{4}$，故有 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$，$0 \leqslant \rho \leqslant \sin\theta$. 从而在柱坐标下有

$$I = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\sin\theta} \rho d\rho \int_0^{\sqrt{3}\rho} f(\sqrt{\rho^2 + z^2})dz.$$

在球坐标下，因 $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{3(x^2+y^2)}$，故有

$$\frac{\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant r \leqslant \frac{\sin\theta}{\sin\varphi},$$

因此

$$I = \int_0^{\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}} r^2 \sin\varphi f(r)dr.$$

6. 计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$，其中 $\Omega$ 是由曲面 $z^2 = x^2 + y^2$ 及平面 $z = 3$ 所围成的闭区域；

(2) $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$，其中 $\Omega$ 是由柱面 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 及平面 $y = 0$，$z = 0$ 和 $z = 1$ 所围成的闭区域；

(3) $\iiint\limits_{\Omega} (y^2 + z^2)dxdydz$，其中 $\Omega$ 是由曲线 $y^2 = 2x$ 绕 $x$ 轴旋转一周而成的曲面与平面 $x = 5$ 所围成的闭区域；

(4) $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中$\Omega$是由球面$x^2+y^2+z^2=z$所围成的闭区域.

**解** (1) 闭区域在$xOy$面投影为$x^2+y^2=3^2$,故

$$\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^3\rho\mathrm{d}\rho\int_\rho^3 z\,\mathrm{d}z=2\pi\int_0^3\frac{9-\rho^2}{2}\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\frac{81}{4}\pi.$$

(2) 柱面可化为$(x-1)^2+y^2=1$,故闭区域在$xOy$面上投影为

$$(x-1)^2+y^2=1\ (y\geqslant 0),$$

因此$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$,$0\leqslant\rho\leqslant 2\cos\theta$,则

$$\iiint\limits_{\Omega}z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho\mathrm{d}\rho\int_0^1 z\rho\,\mathrm{d}z=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\frac{\rho^2}{2}\mathrm{d}\rho=\frac{8}{9}.$$

(3) $y^2=2x$绕$x$轴旋转一周所得曲面为$z^2+y^2=2x$,故闭区域在$yOz$面上投影为

$$z^2+y^2=10,$$

因此

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{10}}\rho\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^5\rho^2\,\mathrm{d}x\\&=2\pi\int_0^{\sqrt{10}}\rho^3\cdot\left(5-\frac{\rho^2}{2}\right)\mathrm{d}\rho\\&=\frac{250}{3}\pi.\end{aligned}$$

(4) 因球面为$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$,故有

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{3},\ 0\leqslant r\leqslant\frac{1}{2},$$

因此

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{2}}r\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{\pi}{10}.$$

7. 将积分$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{x+y}f(x,y,z)\mathrm{d}z$改换成先对$y$,再对$z$,最后对$x$的积分顺序.

**解** 由题意知积分区域由$y+x=1$,$z=x+y$,$z=0$,$x=0$,$y=0$围成,故有

$$0\leqslant x\leqslant 1.$$

当$0\leqslant z\leqslant x$时,$0\leqslant y\leqslant 1-x$;当$x\leqslant z\leqslant 1$时,$1-x\leqslant y\leqslant z-x$.

因此积分顺序改换后为

$$\int_0^1 dx\int_0^x dz\int_0^{1-x} f(x,y,z)dy + \int_0^1 dx\int_x^1 dz\int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)dy.$$

8. 设 $f(x)$ 连续，$F(t) = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)dv$，求$\dfrac{dF(t)}{dt}$.

**解** $F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^t f(r^2)\cdot r^2\sin\varphi dr$

$$= 2\pi\cdot\int_0^{\pi}\sin\varphi dr\cdot\int_0^t f(r^2)\cdot r^2 dr$$

$$= 4\pi\cdot\int_0^t f(r^2)\cdot r^2 dr,$$

故$\dfrac{dF(t)}{dt} = 4\pi t^2 f(t^2)$.

9. 证明$\int_0^1 f(x)g(x)dx \geqslant \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx$，其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在$[0,1]$连续，且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在$[0,1]$上均为单调减少函数.

**证明** 根据微分中值定理，在$[0,1]$上存在 $\xi,\eta$ 使

$$\int_0^1 f(x)dx = f(\xi),\ \int_0^1 g(x)dx = g(\eta).$$

又因 $f(x)$，$g(x)$ 均为单调递减函数，故

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \geqslant f(\xi)\cdot g(\eta),$$

因此

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \geqslant \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx.$$

10. 设有半球体 $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$，它在任一点处的密度与该点到坐标原点的距离的平方成正比，求此半球体的质心.

**解** 由题意得 $\mu = x^2+y^2+z^2$，$\overline{x} = \overline{y} = 0$，则

$$M = \iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^R r^2\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$= 2\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{5}\sin\varphi\cdot R^5 d\varphi$$

$$= \frac{2\pi}{5}\cdot R^5,$$

$$M_z=\iiint_{\Omega} z\cdot(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r\cos\varphi\cdot r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$
$$=2\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^6}{6}\cdot\frac{\sin2\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi$$
$$=\frac{R^6\pi}{6}\cdot\left(-\frac{\cos2\varphi}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$
$$=\frac{R^6\pi}{6},$$

故$\bar{z}=\frac{M_z}{M}=\frac{5}{12}R$,因此$\bar{x}=\bar{y}=0$, $\bar{z}=\frac{5}{12}R$.

11. 求由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=1$ 所围成的均匀薄片(面密度为常数 $\mu$)对于直线 $y=-1$ 的转动惯量.

**解** $I_y=\iint_D(y+1)^2\cdot\mu\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}(y+1)^2\cdot\mu\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1 2\sqrt{y}\cdot(y+1)^2\cdot\mu\mathrm{d}y$$
$$=\mu\int_0^1 2y^{\frac{5}{2}}+4\cdot y^{\frac{3}{2}}+2\cdot y^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y$$
$$=\mu\cdot\left(2\cdot\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}+4\cdot\frac{2}{5}\cdot y^{\frac{5}{2}}+2\cdot\frac{2}{3}\cdot y^{\frac{3}{2}}\right)\bigg|_0^1$$
$$=\frac{368}{105}\mu.$$

12. 求密度为常数 $K$ 的圆柱体 $x^2+y^2=R^2$, $0\leqslant z\leqslant H$,对其底面中心处单位质点的引力.

**解** 由对称性知 $F_x=F_y=0$,则

$$F_z=\iiint_{\Omega}K\cdot\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho\mathrm{d}\rho\int_0^H\frac{Kz}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}z$$
$$=2\pi\int_0^R\rho\mathrm{d}\rho\int_0^H\cdot\frac{K}{2}\cdot\frac{1}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\mathrm{d}(\rho^2+z^2)$$
$$=2\pi(R-\sqrt{R^2+H^2}+H)K.$$

# 第十一章

# 曲线积分　曲面积分 数量场与向量场

## 习题 11-1

1. 计算下列第一类曲线积分：

(1) $\int_L y^2 \mathrm{d}s$，其中 $L$ 为摆线 $x = a(t-\sin t), y = a(1-\cos t)(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 的一拱；

(2) $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$，其中 $L$ 为圆周 $x^2+y^2=ax(a>0)$；

(3) $\oint_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$，其中 $L$ 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$ 及 $x$ 轴在第一象限中所围区域的边界；

(4) $\oint_L (x^2+y^2)^2 \mathrm{d}s$，其中 $L$ 为圆周 $x^2+y^2=a^2(a>0)$；

(5) $\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$，其中 $\Gamma$ 为点 $A(1,-1,2)$ 到点 $B(2,1,3)$ 之间的直线段；

(6) $\int_\Gamma x^2yz\,\mathrm{d}s$，其中 $\Gamma$ 为折线 $ABCD$，这里 $A,B,C,D$ 依次为点$(0,0,0)$，$(0,0,2)$，$(1,0,2)$，$(1,3,2)$；

(7) $\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$，其中 $\Gamma$ 为螺旋线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=kt$ 上相应于 $t$ 从 0 到 $2\pi$ 的一段弧.

**解**　(1) $\mathrm{d}s = \sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$

$$= \sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_L y^2\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 \cdot \sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}t \xlongequal{u=\frac{t}{2}} 16a^3\int_0^{\pi}\sin^5 u\,\mathrm{d}u$$

$$= 32a^3\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$$

$$= \frac{256}{15}a^3.$$

（2）依题意，$L$ 为 $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2$，设 $x=\frac{a}{2}(1+\cos\theta)$，$y=\frac{a}{2}\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，则

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\frac{a^2}{4}\sin^2\theta+\frac{a^2}{4}\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{a}{2}\mathrm{d}\theta,$$

因此

$$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi}\frac{a}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2(1+\cos\theta)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2a^2.$$

（3）依题意，$L$ 由线段 $OA$：$y=0\ (0\leqslant x\leqslant a)$，圆弧 $\widehat{AB}$：$x=a\cos t, y=a\sin t\ (0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4})$ 和线段 $OB$：$y=x(0\leqslant x\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}})$ 组成，如图 11-1 所示.

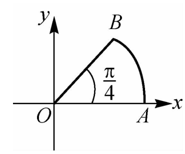


图 11-1

因为

$$\int_{OA} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s = \int_0^a e^x\,\mathrm{d}x = e^a-1,$$

$$\int_{\widehat{AB}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a\, a\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}ae^a,$$

$$\int_{OB} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}x}\sqrt{1+1^2}\,\mathrm{d}x = e^a-1,$$

所以

$$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s = e^a\left(2+\frac{\pi}{4}a\right)-2.$$

（4）$\oint_L (x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t)^2\cdot\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$

$$= \int_0^{2\pi} a^5 \mathrm{d}t = 2\pi a^5.$$

(5) 直线段方程为$\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{1}$,故

$$y = 2x - 3,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2;$$

$$z = x + 1 = \frac{y+5}{2}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 1;$$

因此

$$\int_\Gamma (x^2 + y^2 + z^2) \mathrm{d}s = \int_1^2 (x^2 + 4x^2 - 12x + 9 + x^2 + 2x + 1) \cdot \sqrt{1+4+1} \mathrm{d}x$$
$$= 9\sqrt{6}.$$

(6)$\Gamma$ 由直线段$AB$:$x = 0$,$y = 0$,$z = t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2)$,$BC$:$x = t$,$y = 0$,$z = 2$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$,$CD$:$x = 1$,$y = t$,$z = 2$ $(0 \leqslant t \leqslant 3)$ 组成,故

$$\int_\Gamma x^2 yz \mathrm{d}s = \int_{AB} x^2 yz \mathrm{d}s + \int_{BC} x^2 yz \mathrm{d}s + \int_{CD} x^2 yz \mathrm{d}s$$
$$= \int_0^2 0 \mathrm{d}t + \int_0^1 0 \mathrm{d}t + \int_0^3 2t \mathrm{d}t = 9.$$

(7)$\displaystyle\int_\Gamma (x^2 + y^2 + z^2) \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (a^2 + k^2 t^2) \sqrt{a^2 + k^2} \mathrm{d}t$

$$= \frac{2}{3}\pi \sqrt{a^2 + k^2} (3a^2 + 4\pi^2 k^2).$$

2. 设螺旋形弹簧一圈的方程为 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = kt$,其中 $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$,它的线密度为 $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$,求:

(1) 它关于 $z$ 轴的转动惯量 $I_z$;　　　　(2) 它的质心.

**解**　(1)$\displaystyle I_z = \int_L (x^2 + y^2) \rho(x,y,z) \mathrm{d}s = \int_L (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) \mathrm{d}s$

$$= \int_0^{2\pi} a^2 (a^2 + k^2 t^2) \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + k^2} \mathrm{d}t$$
$$= a^2 \sqrt{a^2 + k^2} \int_0^{2\pi} (a^2 + k^2 t^2) \mathrm{d}t$$
$$= \frac{2}{3}\pi a^2 \sqrt{a^2 + k^2} (3a^2 + 4\pi^2 k^2).$$

(2) 设质心位置为$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$,则

$$M = \int_L \rho(x,y,z) \mathrm{d}s$$
$$= \int_L (x^2 + y^2 + z^2) \mathrm{d}s$$

$$= \frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2),$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_L x\rho(x,y,z)\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{M}\int_0^{2\pi} a\cos t\cdot(a^2+k^2t^2)\cdot\sqrt{a^2+k^2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a\sqrt{a^2+t^2}}{M}\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\cos t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{6ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\int_L y(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$$

$$= \frac{a\sqrt{a^2+k^2}}{M}\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sin t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{-6\pi ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2},$$

$$\bar{z} = \frac{k\sqrt{a^2+k^2}}{M}\int_0^{2\pi} t\cdot(a^2+k^2t^2)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3\pi k(a^2+2\pi^2k^2)}{3a^2+4\pi^2k^2}.$$

故质心为$\left(\frac{6ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2},\frac{-6\pi ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2},\frac{3\pi k(a^2+2\pi^2k^2)}{3a^2+4\pi^2k^2}\right)$

3. 有一铁丝成半圆形 $x=a\cos t, y=a\sin t, 0\leqslant t\leqslant\pi$，其上每一点的线密度等于该点的纵坐标，求铁丝的质量.

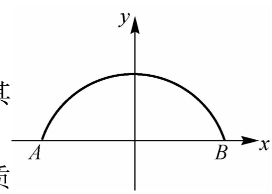

图 11-2

**解**　如图 11-2 所示，直线 $AB$ 上铁丝的线密度为 0，故质量为 0，因此

$$M = \int_0^{\pi} a\sin t\cdot\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi} a^2\sin t\mathrm{d}t = 2a^2.$$

## 习题 11-2

1. 计算下列第二类曲线积分：

(1) $\int_L(x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$，其中 $L$ 为曲线 $y=x^2$ 上从点$(-1,1)$至点$(1,1)$的一段弧；

(2) $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y$，其中 $L$ 为曲线 $y=1-|1-x|$ 上从原点至点(2,0)的一段弧；

(3) $\oint_L \dfrac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 $L$ 为圆周 $x^2+y^2=a^2$(按逆时针方向绕行)；

(4) $\int_\Gamma x^3\mathrm{d}x+3zy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}z$，其中 $\Gamma$ 是从点 $A(3,2,1)$ 到点 $B(0,0,0)$ 的直线段 $AB$；

(5) $\int_L (x-y^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y$，其中 $L$ 为有向折线 $ACB$，从点 $A(0,0)$ 沿 $x$ 轴到点 $C(1,0)$，再从点 $C(1,0)$ 沿直线 $x=1$ 到点 $B(1,1)$；

(6) $\int_L (2a-y)\mathrm{d}x-(a-y)\mathrm{d}y$，其中 $L$ 为摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ 从点 $A(0,0)$ 到点 $B(2\pi a,0)$ 的一段弧；

(7) $\oint_L x\mathrm{d}y$，其中 $L$ 为直线 $y=x$，$y=2x$，$x+y=1$，$x+y=2$ 所围成的四边形的边界(按逆时针方向绕行).

**解** (1) 原式 $=\int_{-1}^{1}[(x^2-2x\cdot\sqrt{x})+(x^4-2x\cdot\sqrt{x})\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}]\mathrm{d}x$

$$=-\frac{14}{15}.$$

(2) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时 $y=x$；当 $1<x\leqslant 2$ 时，$y=2-x$，故

$$\text{原式}=\int_0^1[(x^2+x^2)+(x^2-x^2)\cdot 1]\mathrm{d}x+\int_1^2\{x^2+(2-x)^2+[x^2-(2-x)^2]\cdot(-1)\}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

(3) $L$ 的参数方程为 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$，故

$$\text{原式}=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}[a(\cos t+\sin t)\cdot(-a\sin t)-a(\cos t-\sin t)\cdot a\cos t]\mathrm{d}t=-2\pi.$$

(4) 直线段 $AB$ 方程为 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$，故 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{3}$，因此

$$\text{原式}=\int_\xi^0\left[x^3+3\cdot\frac{x}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}x\right)^2\cdot\frac{2}{3}-x^2\cdot\frac{2}{3}x\cdot\frac{1}{3}\right]\mathrm{d}x=-\frac{87}{4}.$$

(5) 原式 $=\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_0^1 2y\mathrm{d}y=\dfrac{3}{2}$.

(6) 因 $\mathrm{d}x=a(1-\cos t)\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y=a\sin t\ \mathrm{d}t$,故

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}[(2a-a+a\cos t)\cdot a(1-\cos t)-(a-a+a\cos t)\cdot a\sin t]\mathrm{d}t$$
$$=\pi a^2.$$

(7) 如图 11-3 所示,则

$$\oint_L x\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}x\cdot(-1)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}x\cdot 1\cdot \mathrm{d}x+\int_1^{\frac{2}{3}}x\cdot(-1)\mathrm{d}x+\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}}x\cdot 2\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{4}.$$

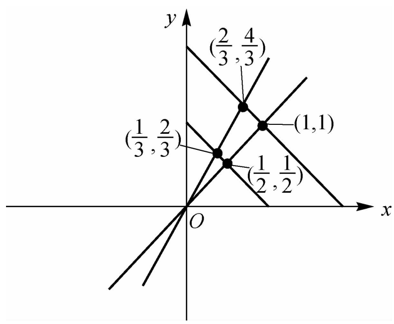


图 11-3

2. 计算积分$\int_L(2x+y)\mathrm{d}x+(x+2y)\mathrm{d}y$,其中 $L$ 分别为:

(1) 抛物线 $y=x^2$ 上从点 $A(0,0)$ 到点 $B(1,1)$ 的一段弧;

(2) 曲线 $y=x^3$ 上从点 $A(0,0)$ 到点 $B(1,1)$ 的一段弧;

(3) 有向折线 $ACB$,从点 $A(0,0)$ 沿 $x$ 轴到点 $C(1,0)$,再从点 $C(1,0)$ 沿直线 $x=1$ 到点 $B(1,1)$.

**解** (1) 原式 $=\int_0^1[(2x+x^2)+(x+2x^2)\cdot 2x]\mathrm{d}x=3$.

(2) 原式 $=\int_0^1[(2x+x^3)+(x+2x^3)\cdot 3x^2]\mathrm{d}x=3$.

(3) 原式 $=\int_0^1 2x\mathrm{d}x+\int_0^1(1+2y)\mathrm{d}y=3$.

3. 把第二类曲线积分$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 化成第一类曲线积分,其中 $L$ 为:

(1) 在 $xOy$ 面内沿直线从点$(0,0)$到点$(1,1)$;

(2) 沿抛物线 $y = x^2$ 从点(0,0)到点(1,1)；

(3) 沿上半圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 从点(0,0)到点(1,1).

**解** (1) 因$\frac{dy}{dx} = 1$，故 $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{2}$,因此

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_L \frac{P(x,y)+Q(x,y)}{\sqrt{2}}ds.$$

(2) 因 $\frac{dy}{dx} = 2x$,故 $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+4x^2}$,因此

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_L \frac{P(x,y)+2xQ(x,y)}{\sqrt{1+4x^2}}ds.$$

(3) 因$\frac{dy}{dx} = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$,故

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\frac{2x-x^2+1-2x+x^2}{2x-x^2}} = \sqrt{\frac{1}{2x-x^2}},$$

因此

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_L \left[\sqrt{2x-x^2}P(x,y) + (1-x)Q(x,y)\right]ds.$$

4. 在过点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y = a\sin x (a>0)$ 中,求一条曲线 $L$,使该曲线从 $O$ 到 $A$ 的积分$\int_L (1+y^3)dx + (2x+y)dy$ 的值最小.

**解** $$\int_L (1+y^3)dx+(2x+y)dy = \int_0^{\pi}[(1+a^3\sin^3 x)+(2x+a\sin x)\cdot a\cos x]dx$$
$$= \int_0^{\pi}(1+2xa\cos x+a^3\sin^3 x+a^2\sin x\cos x)dx,$$

因此当 $a=1$ 时,$\int_L (1+y^3)dx + (2x+y)dy$ 最小,故 $y = \sin x$.

5. 求质点在力 $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} - xy\boldsymbol{j}$ 的作用下沿着曲线 $L:x = \cos t, y = \sin t$,从点 $A(1,0)$ 移动到点 $B(0,1)$ 时所做的功.

**解** $$W = \int_L x^2dx - xydy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos^2 t\cdot(-\sin t) - \cos t\cdot\sin t\cdot\cos t]dt = \frac{2}{3}.$$

## 习题 11-3

1. 利用格林公式,计算下列曲线积分：

(1) $\oint_L xy^2dy - x^2ydx$,其中 $L$ 为以点 $A(1,0)$,$B(0,1)$,$C(-1,0)$ 为顶点的三角

形的正向回路；

(2) $\int_L (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy$，其中 $L$ 为由点 $A(a,0)$ 到点 $B(-a,0)$ 的半圆周 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$；

(3) $\int_L e^x[(\cos y + 2y)dx + (2 - \sin y)dy]$，其中 $L$ 为曲线 $y = \sin x$ 从点 $O(0,0)$ 到点 $A(\pi,0)$ 的一段弧；

(4) $\int_L (2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)dy$，其中 $L$ 为抛物线 $2x = \pi y^2$ 从点 $O(0,0)$ 到点 $A\left(\frac{\pi}{2},1\right)$的一段弧.

**解** (1)
$$\oint_L xy^2 dy - x^2 y dx = \iint_D (y^2 + x^2) dxdy = \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} (y^2 + x^2) dx = \frac{1}{3}.$$

(2)
$$\int_L (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy = \iint_D (e^x \cos y - e^x \cos y + 2)dxdy = 2 \cdot \frac{1}{2}\pi a^2 = \pi a^2.$$

(3)
$$\int_L e^x[(\cos y + 2y)dx + (2 - \sin y)dy] = \iint_D e^x \cdot (2 - \sin y) + e^x \sin y dxdy = \iint_D 2e^x dxdy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} 2e^x dy = e^{\pi} - 1.$$

(4)
$$\int_L (2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)dy$$
$$= \iint_D -2y\cos x + 6xy^2 - 6xy^2 + 2y \cdot \cos x dxdy$$
$$= \iint_D 0 dxdy = 0.$$

2. 利用曲线积分，求下列曲线所围成的面积：

(1) 椭圆 $x = a\cos t, y = b\sin t$ 所围成图形的面积；

(2) 双纽线$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ 所围区域的面积.

**解** (1)$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos t\cdot b\cos t-b\sin t\cdot(-a\sin t)]\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}ab\,\mathrm{d}t=\pi ab.$$

(2)$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=a^2$.

3.计算下列曲线积分：

(1)$\oint_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$,其中 $L$ 为圆周 $x^2+y^2=a^2(a>0)$(按逆时针方向绕向)；

(2)$\int_L\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$,$L$ 为折线 $ABC$,其中 $A(1,0)$,$B(0,1)$,$C(-1,0)$；

(3)$\oint_L\frac{(x+4y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$,其中 $L$ 为圆周 $x^2+y^2=a^2(a>0)$(按逆时针方向绕向)；

(4)$\oint_L\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$,其中 $L$ 为正向曲线 $|x|+|y|=1$.

**解** (1) $\oint_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{(a\cos\theta+a\sin\theta)\cdot(-a\sin\theta)-(a\cos\theta-a\sin\theta)\cdot a\cos\theta}{a^2}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}(-\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta-\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=-2\pi.$$

(2)$\int_L\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}=\int_{AB}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{x+y}+\int_{BC}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{-x+y}$

$$=\int_0^1\frac{(-1)+1}{1}\mathrm{d}y+\int_1^0\frac{(1+1)}{-1}\mathrm{d}y$$

$$=2.$$

(3) $\oint_L\frac{(x+4y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{(a\cos\theta+4a\sin\theta)\cdot(-a\sin\theta)+(a\cos\theta-a\sin\theta)\cdot a\cos\theta}{a^2+4a^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{-a^2\sin\theta\cos\theta-4a^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta-a^2\sin\theta\cos\theta}{a^2+4a^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\pi.$$

(4)$\oint_L\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_1^0\frac{-(1-x)+x\cdot(-1)}{x^2+(1-x)^2}\mathrm{d}x+\int_0^{-1}\frac{-(1+x)+x\cdot1}{x^2+(1+x)^2}\mathrm{d}x+$

$$\int_{-1}^{0}\frac{1+x+x\cdot(-1)}{x^2+(-x-1)^2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\frac{1-x+x\cdot 1}{x^2+(x-1)^2}\mathrm{d}x$$
$$=2\pi.$$

4.证明下列积分在相应区域内与路径无关,并计算积分值:

(1) $\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$;

(2) $\int_{(-2,-1)}^{(3,0)}(x^4+4xy^3)\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\mathrm{d}y$;

(3) $\int_{(3,\frac{2}{3})}^{(1,2)}\frac{1+y^2f^2(xy)}{y}\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f^2(xy)-1]\mathrm{d}y$,这里 $f(u)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续可导.

**解** (1)因$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1-1=0$,故积分与路径无关.选取$(1,1)\to(1,3)\to(2,3)$积分,则

$$\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y=\int_1^3(1-y)\mathrm{d}y+\int_1^2(3+y)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}.$$

(2) $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=12xy^2-12xy^2=0$,故积分与路径无关,选取$(3,0)\to(-2,0)\to(-2,1)$积分,则

$$\int_{(-2,-1)}^{(3,0)}(x^4+4xy^3)\mathrm{d}x+(6x^2y^2+5y^4)\mathrm{d}y=\int_3^{-2}x^4\mathrm{d}x+\int_0^{-1}6\cdot(-2)^2\cdot y^2-5y^4\mathrm{d}y$$
$$=62.$$

(3)
$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}&=\frac{1}{y^2}\cdot[y^2f^2(xy)-1]+\frac{x}{y^2}[y^2\cdot 2f(xy)\cdot f'\cdot y]-\\&\quad\frac{y[2yf^2(xy)+y^2\cdot 2f(xy)\cdot xf']-1-y^2f^2(xy)}{y^2}\\&=f^2(xy)-\frac{1}{y^2}+xy\cdot f'\cdot 2f(xy)-2f^2(xy)+2yx\cdot f(xy)\cdot\\&\quad f'+\frac{1}{y^2}+f^2(xy)\\&=0,\end{aligned}$$

故积分与路径无关,选取$(1,2)\to(3,2)\to(3,\frac{2}{3})$积分,则

$$\text{原式}=\int_1^3\frac{1+4f^2(2x)}{2}\mathrm{d}x+\int_2^{\frac{2}{3}}\frac{3}{y^2}[y^2\cdot f^2(3y)-1]\mathrm{d}y=-4.$$

5.选择 $a,b$ 使$[(x+y+1)\mathrm{e}^x+a\mathrm{e}^y]\mathrm{d}x+[b\mathrm{e}^x-(x+y+1)\mathrm{e}^y]\mathrm{d}y$ 为某一函数的全微分,并求出这个函数.

**解** $\frac{\partial Q}{\partial x}=be^x-e^y$，$\frac{\partial P}{\partial y}=e^x+ae^y$，则由 $be^x-e^y=e^x+ae^y$ 知 $a=-1$，$b=1$，故

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_0^x(x+1)e^x dx+\int_0^y e^x-(x+y+1)\cdot e^y dy\\&=(x+y)(e^x-e^y)+C.\end{aligned}$$

6. 求解方程：

(1) $(x^2+y^2)dx+(2xy+y)dy=0$；

(2) $(x\cos y+\cos x)y'-y\sin x+\sin y=0$.

**解** (1) $\frac{\partial Q}{\partial x}=2y=\frac{\partial P}{\partial y}$，取 $x_0=0$，$y_0=0$ 得

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_0^x P(x,y)dx+\int_0^y Q(0,y)dy\\&=\int_0^x x^2+y^2dx+\int_0^y ydy\\&=\frac{x^2}{3}+xy^2+\frac{1}{2}y^2,\end{aligned}$$

故方程为

$$\frac{x^3}{3}+xy^2+\frac{1}{2}y^2=C.$$

(2) $\frac{\partial Q}{\partial x}=\cos y-\sin x=\frac{\partial P}{\partial y}$，取 $x_0=0$，$y_0=0$ 得

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_0^x P(x,y)dx+\int_0^y Q(0,y)dy\\&=\int_0^x \sin y-y\sin x dx+\int_0^y \cos 0 dy\\&=x\sin y+y\cos x,\end{aligned}$$

故方程为

$$x\sin y+y\cos x=C.$$

7. 设有变力 $\boldsymbol{F}(x,y)=(x^2-y)\boldsymbol{i}-(x+\sin^2 y)\boldsymbol{j}$，在此变力的作用下，质点沿圆周 $L:y=\sqrt{2x-x^2}$ 从点 $O(0,0)$ 运动到点 $B(1,1)$，求该变力所做的功.

**解** $W=\int_L(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=-1=\frac{\partial P}{\partial y}$，故可沿 $(0,0)\to(0,1)\to(1,1)$ 积分，则

$$W=\int_0^1-\sin^2 ydy+\int_0^1(x^2-1)dx=-\frac{7}{6}+\frac{1}{4}\sin 2.$$

8. 求常数 $\lambda$，使在右半平面 $x>0$ 上的向量 $\boldsymbol{A}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{i}-x^2(x^4+$

$y^2)^\lambda \boldsymbol{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度,并求 $u(x,y)$.

**解** 在单连通域 $C_1$ 内,若 $P(x,y)$,$Q(x,y)$ 具有一阶连续偏导数,则向量

$$A(x,y) = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$$

为 $u(x,y)$ 的梯度,即

$$P(x,y) = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda,\ Q(x,y) = -x^2 \cdot (x^4 + y^2)^\lambda,$$

因此

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \cdot (x^4 + y^2)^\lambda + 2\lambda xy(x^4 + y^2)^{\lambda-1} \cdot 2y,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x \cdot (x^4 + y^2)^\lambda - x^2\lambda \cdot (x^4 + y^2)^{\lambda-1} \cdot 4x^3,$$

则由 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 得

$$4x(x^4 + y^2)^\lambda(1+\lambda) = 0.$$

由于 $4x(x^4 + y^2)^\lambda > 0$,故 $\lambda = -1$,即

$$\boldsymbol{A}(x,y) = \frac{2xy\boldsymbol{i} - x^2\boldsymbol{j}}{x^4 + y^2}.$$

在半平面 $x > 0$ 内,取 $(x_0, y_0) = (1,0)$,则得

$$u(x,y) = \int_1^x \frac{2x \cdot 0}{x^4 + 0^2}\mathrm{d}x - \int_0^y \frac{x^2}{x^4 + y^2}\mathrm{d}y = -\arctan\frac{y}{x^2}.$$

故 $u(x,y) = -\arctan\frac{y}{x^2} + C$($C$ 为常数).

## 习题 11-4

1. 计算下列第一类曲面积分:

(1) $\iint\limits_{\Sigma}(x^2 + y^2)\mathrm{d}S$,其中 $\Sigma$ 是锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 上对应于 $0 \leqslant z \leqslant 1$ 的部分;

(2) $\iint\limits_{\Sigma}(xyz + z)\mathrm{d}S$,其中 $\Sigma$ 是上半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$,$z \geqslant 0$;

(3) $\iint\limits_{\Sigma}(2xy - 2x^2 - x + z)\mathrm{d}S$,其中 $\Sigma$ 为平面 $2x + 2y + z = 6$,$x \geqslant 0$,$y \geqslant 0$,$z \geqslant 0$;

(4) $\iint\limits_{\Sigma}|xyz|\mathrm{d}S$,其中 $\Sigma$ 为曲面 $z = x^2 + y^2 (0 \leqslant z \leqslant 1)$;

(5) $\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}(x^2 + y^2)\mathrm{d}S$,其中 $\Sigma$ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $z = 1$ 所围成的立体的表面;

(6) $\iint\limits_{\Sigma}(12x+4y+6z)\mathrm{d}S$,其中 $\Sigma$ 为平面 $x+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{2}=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$.

**解** (1)$\Sigma$ 在 $xOy$ 面投影为

$$x^2+y^2\leqslant 1,\quad \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2},$$

因此

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\cdot\sqrt{2}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

(2)$\Sigma$ 在 $xOy$ 面投影为 $x^2+y^2\leqslant 1$,则

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\frac{(-x)^2}{(\sqrt{1-x^2-y^2})^2}+\frac{(-y)^2}{(\sqrt{1-x^2-y^2})^2}}=\sqrt{\frac{1}{1-x^2-y^2}},$$

因此

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}(xyz+z)\mathrm{d}s&=\iint\limits_{D_{xy}}(xy\cdot\sqrt{1-x^2-y^2}+\sqrt{1-x^2-y^2})\cdot\sqrt{\frac{1}{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D_{xy}}(xy+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(\rho^2\cos\theta\sin\theta+1)\cdot\rho\mathrm{d}\rho\\&=\pi.\end{aligned}$$

(3) 在 $\Sigma$ 上,$z=6-2x-2y$,$\Sigma$ 在 $xOy$ 面上投影为 $x+y=3$ 与 $x$ 轴、$y$ 轴围成三角区域,故

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}(2xy-2x^2-x+z)\mathrm{d}s&=\iint\limits_{D_{xy}}(2xy-2x^2-x+6-2x-2y)\cdot\\&\qquad\sqrt{1+(-2)^2+(-2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=3\int_0^3\mathrm{d}x\int_0^{3-x}(6-2x-2x^2+2xy-2y)\mathrm{d}y\\&=-\frac{27}{4}.\end{aligned}$$

(4)$\Sigma$ 在 $xOy$ 面投影为 $x^2+y^2\leqslant 1$,则

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}|xyz|\mathrm{d}s&=\iint\limits_{D_{xy}}|xy|\cdot(x^2+y^2)\cdot\sqrt{1+2x+2y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2|\cos\theta\sin\theta|\cdot\rho^2\cdot\sqrt{1+2\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta}\mathrm{d}\rho\\&=\frac{125\sqrt{5}}{420}-1.\end{aligned}$$

(5)$\Sigma$ 在 $xOy$ 面投影为 $x^2+y^2\leqslant 1$,立体表面有两部分,即 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$ 和 $x^2+y^2\leqslant 1$, $z=2$,故

$$\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{1+0+0}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=(1+\sqrt{2})\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2}).$$

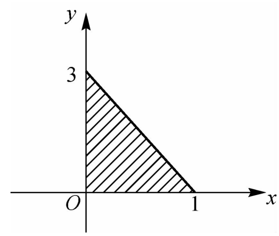

图 11-4

(6) 如图 11-4 所示 $\Sigma$ 在 $xOy$ 面投影为 $x+\frac{y}{3}=1, x=0$, $y=0$ 所围区域,故

$$\iint_{\Sigma}(12x+4y+6z)\mathrm{d}s=\iint_{D_{xy}}(12x+4y+12-12x-4y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{3-3x}(12x+4y+12-12x-4y)\mathrm{d}y=42.$$

2. 求 $F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2}f(x,y,z)\mathrm{d}S$,其中 $f(x,y,z)=\begin{cases}x^2+y^2, & z\geqslant\sqrt{x^2+y^2},\\ 0, & z<\sqrt{x^2+y^2}.\end{cases}$

**解** $x^2+y^2+z^2=t^2$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 交线为 $x^2+y^2=\frac{t^2}{2}$,故 $f(t)$ 中 $z$ 的范围为 $\left(\frac{t}{\sqrt{2}},t\right)$,因此

$$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}s.$$

$\Sigma$ 在 $xOy$ 面投影为 $x^2+y^2\leqslant\frac{t^2}{2}$, $(\frac{t}{\sqrt{2}}\leqslant z\leqslant t)$,故

$$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{t^2}{2}}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{t^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{t^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\rho^2\cdot\sqrt{\frac{t^2}{t^2-\rho^2}}\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{8-5\sqrt{2}}{6}\pi t^4.$$

3. 求锥面壳 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ $(0\leqslant z\leqslant 3)$ 的质量,此壳的面密度为 $\rho(x,y)=$

$x^2+y^2$.

**解** $M=\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y)\mathrm{d}s$, $\Sigma$ 在 $xOy$ 面投影为 $x^2+y^2\leqslant 3$,故

$$M=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 3}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{1+\frac{(6x)^2}{12(x^2+y^2)}+\frac{(6y)^2}{12(x^2+y^2)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}\rho^2\sqrt{1+\frac{36\rho^2}{12\rho^2}}\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=9\pi.$$

4. 求密度均匀的半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的质心.

**解** 由对称性知$\overline{x}=\overline{y}=0$,则

$$M=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}s=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\times 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1$$

$$=2\pi,$$

$$M_z=\iint\limits_{\Sigma}z\,\mathrm{d}s=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt{1-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi,$$

故有$\overline{z}=\dfrac{M_z}{M}=\dfrac{1}{2}$,因此质心为$\left(0,0,\dfrac{1}{2}\right)$.

## 习题 11-5

1. 计算下列第二类曲面积分:

(1) $\oiint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $\Sigma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧;

(2) $\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $\Sigma$ 是平面 $x+y+\dfrac{z}{2}=1$ 在第一卦限中的部分,取上侧;

(3) $\oiint\limits_{\Sigma} \dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,其中 $\Sigma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧；

(4) $\iint\limits_{\Sigma}(x^3+y^3+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $\Sigma$ 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 的部分,取外侧；

(5) $\iint\limits_{\Sigma}(8z+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}z + 2(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $\Sigma$ 是由曲面 $z=1+x^2+y^2$ 被平面 $z=3$ 所截下部分的下侧；

(6) $\iint\limits_{\Sigma}(xz^2+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (x^2y+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + (y^2z+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $\Sigma$ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧；

(7) $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{\mathrm{e}^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $\Sigma$ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1, z=2$ 所围立体表面的外侧；

(8) $\iint\limits_{\Sigma}-y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $\Sigma$ 是圆柱面 $x^2+y^2=4$ 被平面 $x+z=2$, $z=0$ 所截部分的外侧.

**解** (1) 由题意知 $D_{xy}$ 为 $x^2+y^2\leqslant a^2$, $D_{yz}$ 为 $y^2+z^2\leqslant a^2$, $D_{xz}$ 为 $x^2+z^2\leqslant a^2$,故

$$\oiint\limits_{z} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oiint\limits_{D_{yz}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \oiint\limits_{D_{xz}} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \oiint\limits_{D_{xy}} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由对称性知

$$\begin{aligned}\oiint\limits_{D_{\mathrm{d}yz}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \sqrt{a^2-\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}\rho \\ &= 4\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(a^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}\Big|_0^a \\ &= \frac{4}{3}\pi a^3.\end{aligned}$$

同理,$\oiint\limits_{D_{xz}} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \oiint\limits_{D_{xy}} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \dfrac{4}{3}\pi a^3$,故原式 $=4\pi a^3$.

(2) 由题意知 $\Sigma$ 在 $xOy$ 面投影为 $x+y=1, x=0, y=0$ 所围成的图形；在 $yOz$ 面投影为 $y+\dfrac{z}{2}=1, y=0z=0$ 所围成的图形；在 $zOx$ 面投影为 $x+\dfrac{z}{2}=1$, $x=0, y=0$ 所围成的图形,所以

$$\oiint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oiint_{D_{yz}} \left(1 - y - \frac{z}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \oiint_{D_{xy}} (2 - 2x - 2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oiint_{D_{xz}} (1 - x - \frac{z}{2})\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{2-2y} (1 - y - \frac{z}{2})\mathrm{d}z + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{2-2x} (1 - x - \frac{z}{2})\mathrm{d}z + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} (2 - 2x - 2y)\mathrm{d}y$$

$$= 1.$$

(3) 由对称性知只需求$\oiint_{\Sigma} \dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$即可.

$\Sigma$ 在 $yOz$ 面投影为 $y^2 + z^2 \leqslant 1$,故

$$\oiint_{\Sigma} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 2 \iint_{y^2+z^2\leqslant 1} \frac{1 - y^2 - z^2}{1}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \rho\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{4\pi}{3},$$

因此

$$\oiint_{\Sigma} \frac{x\mathrm{d}yz + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2 + y^2 + z^2)} = 4\pi.$$

(4) 球面在 $xOy$ 面投影为 $x^2 + y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0$ 所围成的区域,故

$$\oiint_{\Sigma} (x^3 + y^3 + z) = \oiint_{D} (x^3 + y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\oiint_{D} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho^3 \cdot (\cos^3\theta + \sin^3\theta) \cdot \rho\mathrm{d}\rho + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{\pi}{3}.$$

(5) $z_x = 2x \quad z_y = 2y$,故

$$\cos\alpha = \frac{-2x}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}, \cos\beta = \frac{-2y}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}.$$

因 $\Sigma$ 在 $xOy$ 面投影区域为 $x^2 + y^2 \leqslant 2$,故

$$\text{原式} = \sum_{x^2+y^2\leqslant 2} [8z + 1) \cdot x \cdot \frac{-2x}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} - 4yz \cdot \frac{(-2y)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} + 2(1 - z^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \sum_{x^2+y^2\leqslant 2} \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \cdot [-16x^2 \cdot (1+x^2+y^2) - 2x^2 + 8y^2 \cdot (1+x^2+y^2)$$

$$+ 2 - 2(1+x^2+y^2)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 34\pi.$$

(6) $z_x = \dfrac{x}{x^2+y^2}, z_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，故

$$\cos\alpha = \frac{-\dfrac{x}{x^2+y^2}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(-x)}{x^2+y^2},$$

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(-y)}{x^2+y^2},$$

$$\cos r = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

因 $\Sigma$ 在 $xOy$ 面投影区域为 $x^2+y^2 \leqslant 1$，故

$$\text{原式} = \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \left\{[x \cdot (x^2+y^2)+1] \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(-y)}{x^2+y^2} + (x^2y+2) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{(-x)}{x^2+y^2} + (y^2 \cdot \sqrt{x^2+y^2}+3) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{59}{20}\pi.$$

(7) $\Sigma$ 在 $xOy$ 面投影区域为 $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$，故

$$\iint_\Sigma \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{\rho}}}{\sqrt{\rho}} \cdot \rho\mathrm{d}\rho.$$

$$= 2\pi\mathrm{e}^2.$$

(8) $\Sigma$ 在 $xOy$ 面上的投影为 0，故

$$\iint_\Sigma (z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

而 $\Sigma$ 在 $xOz$ 面上的投影为 $x+z=2, z=0, x=-2$ 所截部分，故

$$\text{原式} = \iint_\Sigma -yx\mathrm{d}z = 2\int_{-2}^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x} - \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z = -8\pi.$$

2. 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上取 $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$三点为顶点的球面三角形($\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CA}$ 均为大圆弧)，若球面密度为 $\rho = x^2+z^2$，求此球面三角

形块的质量.

**解**　由题意知

$$M=\oiint_{\Sigma}(x^2+z^2)\mathrm{d}s.$$

又因 $z_x=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, z_y=\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$,故

$$\cos\beta=\frac{\dfrac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1-x^2-y^2}+\dfrac{y^2}{1-x^2-y^2}}}=-y,$$

则有

$$\begin{aligned}M&=\oiint_{\Sigma}(x^2+z^2)\mathrm{d}s\\&=\oiint_{D_{xz}}(x^2+z^2)\cos\beta\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\&=\oiint_{D_{xz}}(x^2+z^2)(-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\&=\oiint_{D_{xz}}(x^2+z^2)(x^2+z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\&=\frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

## 习题 11-6

1. 利用高斯公式计算下列曲面积分:

(1) $\oiint\limits_{\Sigma}(x^2-yz)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-xz)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $\Sigma$ 为球 $x^2+y^2+z^2=1$ 面的外侧;

(2) $\oiint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $\Sigma$ 是平面 $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$ 所围立体表面的外侧;

(3) $\oiint\limits_{\Sigma}(x-1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $\Sigma$ 是平面 $z=1$ 和 $z=2$ 之间的圆柱体 $x^2+y^2\leqslant 4$ 所围立体表面的外侧;

(4) $\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $\Sigma$ 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 上侧;

(5) $\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z - x\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\Sigma$ 是锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}(1 \leqslant z \leqslant 2)$ 的外侧；

(6) $\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\Sigma$ 是有向曲面 $z = x^2+y^2(0 \leqslant z \leqslant 1)$，其法向量与 $z$ 轴正向夹角为锐角；

(7) $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$，其中 $\Sigma$ 是下半球面 $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧；

(8) $\oiint\limits_{\Sigma}\left[x^3 + \dfrac{1}{z}f\left(\dfrac{x}{z}\right)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left[\dfrac{1}{x}f\left(\dfrac{x}{z}\right) + z^3\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $f(u)$ 有连续的二阶导数，$\Sigma$ 是 $z>0$ 的锥面 $x^2+y^2-z^2=0$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及 $x^2+y^2+z^2=4$ 所围成立体表面的外侧.

**解** (1) 原式 $= \iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+2z)\mathrm{d}v$

$$\xlongequal{\text{球坐标}} \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1(2r\cos\theta\cos\varphi + 2r\sin\theta\cos\varphi + 2r\sin\varphi)\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$= \frac{4}{5}\pi.$$

(2) 原式 $= \iiint\limits_{\Omega}(z+x+y)\mathrm{d}v = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}(z+x+y)\mathrm{d}z = \dfrac{1}{8}$.

(3) 原式 $= \iiint\limits_{\Omega}(1+1+2z)\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho\mathrm{d}\rho\int_1^2(2+2z)\mathrm{d}z = 20\pi$.

(4) 令 $D = \Sigma + D_1$，$D_1$ 为 $x^2+y^2=1$ 所围成的区域，则

$$\iint\limits_{D} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_{\Omega}2\mathrm{d}v = 2\times\frac{4}{3}\pi\times\frac{1}{2} = \frac{4}{3}\pi,$$

$$\iint\limits_{D_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi,$$

故原式 $= \dfrac{4}{3}\pi - 2\pi = -\dfrac{2}{3}\pi$.

(5) 原式 $= \iiint\limits_{\Omega}2z\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2\rho\mathrm{d}\rho\int_1^2 2z\mathrm{d}z = -\dfrac{15}{4}\pi$.

(6) 原式 $= -\iiint\limits_{\Omega}(2+0+1)\mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_0^1\mathrm{d}z = -\dfrac{1}{2}\pi$.

(7) 令 $D = \Sigma + D_1$，$D_1$ 为 $x^2+y^2=1$ 所围成的区域，则

$$\iint_D \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{7}{2}}} = -\oiint_\Omega (1+2z+2)\mathrm{d}v$$
$$= -\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 (3+2r\sin\varphi)\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$
$$= -\frac{1}{2}\pi,$$
$$\iint_{D_1} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = \iint_{D_1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \rho\,\frac{1}{\rho^{2\times\frac{1}{2}}}\mathrm{d}\rho$$
$$= 2\pi,$$

故原式 $= -\frac{1}{2}\pi - 2\pi = -\frac{5}{2}\pi$.

(8) 原式 $= \oiiint_\Omega \left(3x^2 + \frac{1}{z}f'\cdot\frac{1}{z} + 3y^2 + \frac{1}{x}\cdot f'\cdot x\cdot\frac{(-1)}{z^2} + 3z^2\right)\mathrm{d}v$

$$= \oiiint_\Omega (3x^2+3y^2+3z^2)\mathrm{d}v$$
$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_1^2 (3r^2 - r^2\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{93}{5}\sqrt{2}\pi.$$

2. 利用高斯公式证明阿基米德原理：浸没在液体中的物体所受液体压力的合力（即浮力）的方向铅直向上，其大小等于这物体所排开的液体的重力.

**证明**　取液面为 $xOy$ 面，$z$ 轴铅直向上，设液体的密度为 $\rho$. 在物体表面上 $\Sigma$ 取面积元素 $\mathrm{d}s$，$M(x,y,z)$ 为 $\mathrm{d}s$ 上的一点（$z\leqslant 0$），$\Sigma$ 在点 $M$ 处的外法线向量的方向的余弦分别为 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$，则 $\mathrm{d}s$ 所受液体的压力在 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴上的分量分别为 $\rho z\cos\alpha\,\mathrm{d}s$、$\rho z\cos\beta\mathrm{d}s$、$\rho z\cos\gamma\mathrm{d}s$，$\overline{z}$ 所受的液体的总压力在各坐标轴上的分量等于上列各分量元素在 $\Sigma$ 上的积分. 由高斯公式可得

$$F_x = \oiint_\Sigma \rho z\cos\alpha\mathrm{d}s = \oiiint_\Omega \frac{\partial(\rho z)}{\partial x}\mathrm{d}v = 0.$$

同理，$F_y = 0$，$F_z = \oiint_\Sigma \rho z\cos\gamma\mathrm{d}s = \oiiint_\Omega \frac{\partial(\rho z)}{\partial z}\mathrm{d}v = \rho v$.

故合力 $F = \rho Vk$，此力的方向铅直向上，大小等于被物体排开液体的重力.

3. 利用斯托克斯公式计算下列曲线积分：

(1) $\oint_\Gamma (y^2-z^2)\mathrm{d}x + (z^2-x^2)\mathrm{d}y + (x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中 $\Gamma$ 是平面 $x+y+z=\frac{3}{2}$

截立方体 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1$ 的表面所得的切痕，从 $x$ 轴的正向看时，是依逆时针方向进行的；

(2) $\oint_{\Gamma}(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$，其中 $\Gamma$ 是曲线 $x^2+y^2+z^2=2Rx, x^2+y^2=2rx(0<r<R, z>0)$，此曲线是顺着如下方向前进的：由它所包围在球 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 外表面上的最小区域保持在左方；

(3) $\oint_{\Gamma} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，其中 $\Gamma$：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x+y+z=0, \end{cases}$ 从 $x$ 轴正向看去，$\Gamma$ 的方向是逆时针方向；

(4) $\oint_{\Gamma} y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$，其中 $\Gamma$ 是曲线 $x^2+y^2+z^2=R^2, x^2+y^2=Rx(R>0, z\geqslant 0)$，从 $x$ 轴的正方向看去为逆时针方向.

**解** (1) 取 $\Sigma$ 为平面 $x+y+z=\frac{3}{2}$ 的上侧被围成部分，因 $\Sigma$ 单位法向量为 $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$，故

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix} \mathrm{d}s \\
&= \iint_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (-2y-2z-2z-2x-2x-2y)\mathrm{d}s \\
&= \iint_{\Sigma} -\frac{4}{3}(x+y+z)\mathrm{d}s \\
&= -\frac{9}{2}.
\end{aligned}
$$

(2) 取 $\Sigma$ 为 $x^2+y^2=2yx$ 上侧被 $\Gamma$ 围成部分，则

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2+z^2 & x^2+z^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix} \\
&= \iint_{\Sigma}(2y-2z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2z-2x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{\Sigma}(2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

$$= 2\pi r^2 R.$$

(3) 取 $\Sigma$ 为 $x+y+z=0$ 的上侧被 $\Gamma$ 所围成的部分，则 $\Sigma$ 的面积为 $\pi a^2$，$\Sigma$ 单位法向量为 $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$，故

$$\text{原式} = \oiint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} \mathrm{d}s = \oiint_{\Sigma} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}s = -\frac{3}{\sqrt{3}}\cdot \pi a^2 = -\sqrt{3}\pi a^2.$$

(4) 取 $\Sigma$ 为圆 $x^2+y^2=R_x$ 的上侧被 $\Gamma$ 围成部分，则

$$\text{原式} = \oiint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}x\mathrm{d}z & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix}$$

$$= \oiint_{\Sigma} -2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}z - 2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \oiint_{\Sigma} 2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{\pi}{4}R^3.$$

## 习题 11-7

1. 求下列向量 $\boldsymbol{A}$ 穿过曲面 $\Sigma$ 流向指定侧的流量：

(1) $\boldsymbol{A}=(x+1)\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 是平面 $x+y+z=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$ 所围立体的表面，流向外侧；

(2) $\boldsymbol{A}=(x-y)\boldsymbol{i}+(y-z)x\boldsymbol{j}$，$\Sigma$ 是平面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0$，$z=3$ 所围立体的表面，流向外侧.

**解** (1) $P=x+1$，$Q=y$，$R=1$，故所求流量为

$$\oiint_{\Sigma} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s = \iiint_{\Omega}(1+1+0)\mathrm{d}v = 2\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\mathrm{d}z = \frac{1}{3}.$$

(2) $P=x-y$，$Q=(y-z)x=0$，$R=0$，故

$$\oiint_{\Sigma} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n} = \iiint_{\Omega}(1+x+0)\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \rho\mathrm{d}p\int_0^3 \rho\cos\theta\mathrm{d}z = -\frac{9}{2}\pi.$$

2. 求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度：

(1) $\boldsymbol{A}=(xy+2x)\boldsymbol{i}+(-y^2+xy)\boldsymbol{j}+zy\boldsymbol{k}$；

(2) $\boldsymbol{A}=\mathrm{e}^{\frac{x}{z}}\boldsymbol{i}-\frac{y}{z}\mathrm{e}^{\frac{x}{z}}\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$.

**解** (1) $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=y+2-2y+x+y=2+x.$

(2) $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\mathrm{e}^{\frac{x}{z}}\cdot\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\cdot\mathrm{e}^{\frac{x}{z}}+2z=2z.$

3. 物体以一定的角速度 $\omega$ 沿逆时针方向绕 $z$ 轴旋转，求速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{w}$ 在空间点 $M(x,y,z)$ 和已知时刻 $t$ 的散度和旋度.

**解** 由题意，速度 $\boldsymbol{v}$ 的向量为

$$\boldsymbol{v}=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\boldsymbol{i}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\boldsymbol{j},$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\frac{y\cdot x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{yx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0,$$

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0\end{vmatrix}=\boldsymbol{k}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=2\omega\boldsymbol{k},$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{w}=-2\omega^2,\mathbf{rot}\ \boldsymbol{w}=0.$$

4. 求下列向量场的旋度：

(1) $\boldsymbol{A}=(x+\sin y)\boldsymbol{i}+(y+\sin z)\boldsymbol{j}+(z+\sin x)\boldsymbol{k}$；

(2) $\boldsymbol{A}=(x-2y)\boldsymbol{i}+(y-3z)\boldsymbol{j}+(z-2x)\boldsymbol{k}$.

**解** (1) $\mathbf{rot}\ \overline{\boldsymbol{A}}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x+\sin y & y+\sin z & z+\sin x\end{vmatrix}=-\cos z\boldsymbol{i}-\cos x\boldsymbol{j}-\cos y\boldsymbol{k}.$

(2) $\mathbf{rot}\ \overline{\boldsymbol{A}}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x-2y & y-3z & z-2x\end{vmatrix}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}.$

5. 求向量场 $\boldsymbol{A}=(y^2-z^2)\boldsymbol{i}+(2z^2-x^2)\boldsymbol{j}+(3x^2-y^2)\boldsymbol{k}$，沿闭曲线 $\Gamma$：$\begin{cases}x+y+z=2,\\ |x|+|y|=1\end{cases}$（从 $z$ 轴的正方向看去，$\Gamma$ 为逆时针方向）的环流量.

**解**　环流量可表示为

$$\oint_{\Gamma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\oint_{\Gamma}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z.$$

由题意，将 $|x|+|y|=1$ 分为四段，如图 11-5 所示.

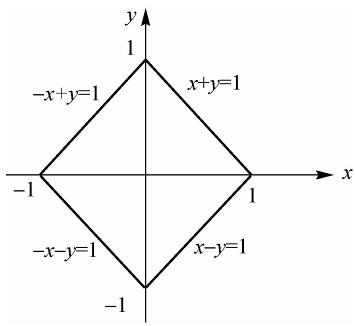


图 11-5

①$y+x=1(0\leqslant x\leqslant 1)$，此时 $z=1,\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0$；

②$y-x=1(-1\leqslant x\leqslant 0)$ 此时 $z=1-2x,\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-2$；

③$x-y=1(0\leqslant x\leqslant 1)$，此时 $z=3-2x,\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-2$；

④$-x-y=1(-1\leqslant x\leqslant 0)$，此时 $z=3,\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0$.

故有

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=&\int_1^0\{y^2(2-x-y)^2+[2(2-x-y)^2-x^2]\cdot(-1)\}\cdot(-2)\mathrm{d}x\\&+\int_0^{-1}\{y^2-(2-x-y)^2+[2(2-x-y)^2-x^2]\cdot 1+(3x^2-y^2)\cdot(-2)\}\mathrm{d}x\\&+\int_{-1}^0\{y^2-(2-x-y)^2+[2\cdot(2-x-y)^2-x^2]\cdot(-1)\}\mathrm{d}x\\&+\int_0^1\{y^2-(2-x-y^2)+[2\cdot(2-x-y)^2-x^2]\cdot 1+(3x^2-y^2)\cdot(-2)\}\mathrm{d}x\\=&-24.\end{aligned}$$

6. 证明若 $\boldsymbol{A}$ 是向量场，则 $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$.

**证明**　$\nabla(\nabla\times\boldsymbol{A})=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z},\dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x},\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)=0.$

## 总复习题十一

1. 填空题：

(1) 设 $L$ 为直线 $3x+4y-12=0$ 在第一象限的部分，则$\int_L \ln(12x+16y+1)\mathrm{d}s=$ ________.

(2) 设 $L$ 是折线 $y=1-|x-1|$ 上由点(0，0)至点(2，0)的一段，则$\int_L xy\mathrm{d}y=$ ________.

(3) 已知$\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$为某函数的全微分，则 $a=$ ________.

(4) 设 $\Sigma$ 为椭球$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$的上半部分，已知 $\Sigma$ 的面积为 $A$，则第一类曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(4x^2+9y^2+36z^2+xyz)\mathrm{d}S=$ ________.

(5) 设 $u=xy\cos z$，则 $\operatorname{div}(\mathbf{grad}\ u)\big|_{(2,-1,0)}=$ ________.

**解** (1) 因 $y=\dfrac{12-3x}{4}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{3}{4}$，故

$$\begin{aligned}\int_L \ln(12x+16y+1)\mathrm{d}s &= \int_0^3 \ln(12x+48-12x+1)\cdot\sqrt{1+\frac{9}{16}}\mathrm{d}x \\ &= 10\ln 7.\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int_L xy\mathrm{d}y=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_1^2 \cdot x\cdot(2-x)(-1)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}$.

(3) 因$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{-y\cdot 2(x+y)}{(x+y)^4}$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{a\cdot(x+y)^2-(x+ay)\cdot 2(x+y)}{(x+y)^4}$，则由$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$可得

$$-2xy-2xy^2=ax^2+ay^2+2axy-2x^2-2xy-2axy-2ay^2,$$

故 $a=2$.

(4) 由对称性知$\oiint\limits_{\Sigma}xyz\mathrm{d}s=0$，故$\oiint\limits_{\Sigma}(4x^2+9x^2+36z^2)\mathrm{d}s=\oiint\limits_{\Sigma}36\mathrm{d}s=36A$.

(5)
$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{grad}u)\Big|_{(2,-1,0)} &= \operatorname{div}(y\cos z, x\cos z, -xy\sin z)\Big|_{(2,-1,0)} \\ &= 0+0-xy\cos z\Big|_{(2,-1,0)} \\ &= 2.\end{aligned}$$

2. 选择题：

(1) 设 $L$ 为曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z=0, \end{cases}$ 则 $\oint_L (x^2+z)\mathrm{d}s=($　　$)$.

A. 0　　B. $\dfrac{2\pi}{3}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\pi$

(2) 设 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$，$\Sigma_1$ 为 $\Sigma$ 在第一卦限的部分，则有(　　).

A. $\iint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1} x\,\mathrm{d}S$　　B. $\iint\limits_{\Sigma} y\,\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1} x\,\mathrm{d}S$

C. $\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1} x\,\mathrm{d}S$　　D. $\iint\limits_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}S$

(3) 设 $\Sigma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上半部分的上侧，则不正确的是(　　).

A. $\iint\limits_{\Sigma} x^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$　　B. $\iint\limits_{\Sigma} y\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$

C. $\iint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$　　D. $\iint\limits_{\Sigma} y^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$

(4) 向量 $\boldsymbol{A}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}\boldsymbol{i}+\dfrac{x}{x^2+y^2}\boldsymbol{j}$ 沿着闭曲线 $L$($L$ 围绕 $z$ 轴)的环流量为(　　).

A. $2\pi$　　B. $\pi$　　C. $-2\pi$　　D. 0

(5) 设 $L$ 的方程为 $x=t, y=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}t^{\frac{3}{2}}, z=\dfrac{1}{2}t^2(0\leqslant t\leqslant 1)$，则 $\int_L xyz\,\mathrm{d}s=($　　$)$.

A. $-\dfrac{2\sqrt{2}}{33}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{2}}{33}$　　C. $-\dfrac{16}{143}\sqrt{2}$　　D. $\dfrac{16}{143}\sqrt{2}$

**解**　(1) 由对称性知

$$\begin{aligned}\oint_L (x^2+z)\mathrm{d}s &= \frac{1}{3}\oint_L (x^2+y^2+z^2+x+y+z)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{3}\oint_L \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

又因 $L$ 全长为 $2\pi$，故

$$\oint_L (x^2+z)\mathrm{d}s=\frac{2\pi}{3},$$

选 B.

(2) 由对称性 $\oiint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}s=\oiint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}s$，而 $\Sigma_1$ 为 $\Sigma$ 在第一卦限部分，故

$$\oiint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}s=4\oiint\limits_{\Sigma_1} x\,\mathrm{d}s.$$

选 C.

(3) 球面关于 $z$ 轴，$y$ 轴均对称，故 $\oiint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 中 $f(x,y,z)$ 若关于 $y$ 轴或 $z$ 轴对称，则 $\oiint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$，C 不符合条件.

选 C.

(4) 环流量为

$$\oint_L -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y=\iint\limits_D \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

选 D.

(5)
$$\begin{aligned}\int_L xyz\,\mathrm{d}s&=\int_0^1 t\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot t^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}t^2\sqrt{1+(\sqrt{2}t^{\frac{1}{2}})^2+t^2}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\frac{\sqrt{2}}{3}t^{\frac{9}{2}}(1+t)\mathrm{d}t\\&=\frac{16}{143}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

选 D.

3. 求下列曲线积分：

(1) $\oint_L x\,\mathrm{d}s$，其中 $L$ 为直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成区域的整个边界；

(2) $\oint_L \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中 $L$ 是由 $y^2=2(x+2)$ 及 $x=2$ 所围区域的边界曲线，取逆时针方向；

(3) $\oint_L \mathrm{e}^x[(1-\cos y)\mathrm{d}x-(y-\sin y)\mathrm{d}y]$，其中 $L$ 是区域 $0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant \sin x$ 的正方向的围线；

(4) $\int_{\widehat{AmB}}[\varphi(y)\cos x-\pi y]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)-\pi]\mathrm{d}y$，其中 $A(\pi,2)$，$B(3\pi,4)$，$\varphi'(y)$ 连续，$\widehat{AmB}$ 为任意曲线，它与 $AB$ 围成的面积为 2.

**解** (1) 如图 11-6 所示：

$$\oint_L x\,\mathrm{d}s=\int_0^1 x\cdot\sqrt{1+1}\mathrm{d}s+\int_1^0 x\cdot\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1).$$

(2) 如图 11-7 所示：

$$\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\iint\limits_D\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D 0 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= 0.$$

(3) 如图 11-8 所示：

$$\oint_L \mathrm{e}^x[(4-\cos y)\mathrm{d}x-(y-\sin y)]\mathrm{d}y = \iint_D -\mathrm{e}^x(y-\sin y)-\mathrm{e}^x \cdot \sin y \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint_D -\mathrm{e}^x y \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x} -\mathrm{e}^x y \mathrm{d}y = \frac{1}{5}(1-\mathrm{e}^{\pi}).$$

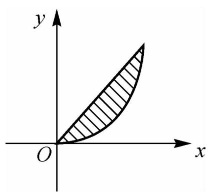


图 11-6

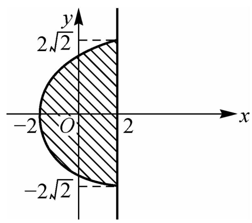


图 11-7

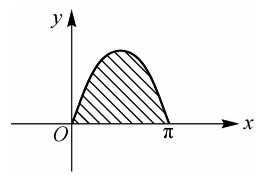


图 11-8

(4) 因为

$$\oint_{\widehat{AmB}+AB}[\varphi(y)\cos x-\pi y]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)-\pi]\mathrm{d}y = \iint_D[-\varphi'(y)\cos x+\pi]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$AB$ 的方程为

$$y-2=\frac{1}{\pi}(x-\pi),$$

$$\int_{AB}[\varphi(y)\cos x-\pi y]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)-\pi]\mathrm{d}y$$
$$= \int_2^4[\pi \cdot \varphi(y)\cos(\pi y-2\pi+\pi)-\pi^2 y+\varphi'(y)-\pi]\mathrm{d}y$$
$$= 2\pi,$$

所以

$$\oint_{\widehat{AmB}}[\varphi(y)\cos x-\pi y]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)-\pi]\mathrm{d}y = \iint_D -\varphi'(y) \cdot \cos x\mathrm{d}y$$
$$=-6\pi^2.$$

4. 计算下列曲面积分：

(1) $\iint_{\Sigma}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma$ 是介于 $z=0$ 及 $z=1$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=1$；

(2) $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\mathrm{d}S$,其中 $\Sigma$ 是旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 夹在平面 $z=1$ 及 $z=2$ 之间的部分；

(3) $\iint\limits_{\Sigma}4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}x\mathrm{d}z+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $\Sigma$ 是 $yOz$ 面上的曲线 $z=\mathrm{e}^y(0\leqslant y\leqslant a)$ 绕 $z$ 轴旋转而成的曲面的下侧；

(4) $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,其中 $\Sigma$ 是椭球面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$ 的外侧.

**解** (1) 将 $\Sigma$ 投影到 $zOx$ 面上,得投影区域为

$$D_{zx}=\{(x,z)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1\},$$

因此

$$\begin{aligned}\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s&=\oiint\limits_{D_{zx}}\frac{1}{x^2+(1-x^2)+z^2}\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\&=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{1+z^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2}\pi^2.\end{aligned}$$

(2)$\Sigma$ 在 $xOy$ 面的投影区域为 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$. 因 $z_x=2x,z_y=2y$,故

$$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\mathrm{d}s=\oiint\limits_{D}\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi.$$

(3)$\Sigma$ 是 $yOz$ 面上的曲线绕 $z$ 轴旋转而得,则 $\Sigma$ 为 $z=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}$,故

$$\oiint\limits_{\Sigma}4xz\cdot\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}z=0,$$

因此

$$\begin{aligned}\oiint\limits_{\Sigma}4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}x\mathrm{d}z+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\oiint\limits_{\Sigma}(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(1-\mathrm{e}^{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=(\mathrm{e}^{2a}-1)\pi a^2.\end{aligned}$$

(4) 原式$=\iiint\limits_{\Omega}\left[\dfrac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2^2+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3}+\right.$

$\left.\dfrac{-\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2y^2+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$= \iiint_{\Omega} \{3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= 4\pi.$$

5. 求 $a,b$，使$\dfrac{(y^2+2xy+ax^2)\mathrm{d}x-(x^2+2xy+by^2)\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}$为某一函数 $u=u(x,y)$ 的全微分，并求 $u(x,y)$.

**解** $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{-(2x+2y)\cdot(x^2+y^2)^2+2(x^2+y^2)\cdot 2x(x^2+2xy+by^2)}{(x^2+y^2)^4}$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(2y+2x)\cdot(x^2+y^2)-2(x^2+y^2)\cdot 2y\cdot(y^2+2xy+ax^2)}{(x^2+y^2)^4}.$$

由$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial p}{\partial y}$可得

$$(-2x+2y)\cdot(x^2+y^2)+2(x^2+y^2)\cdot 2x\cdot(x^2+2xy+by^2)$$
$$=(2x+2y)\cdot(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)\cdot 2y\cdot(y^2+2xy+ax^2),$$

从而得 $a=-1, b=-1$，故

$$u(x,y)=\int_0^x P(x,y)\mathrm{d}x+\int_0^y Q(0,y)\mathrm{d}y=\frac{x-y}{x^2+y^2}+C.$$

6. 已知 $\varphi'(x)$ 在 $x>0$ 时连续，$\varphi(\pi)=1$，试确定 $\varphi(x)$，使线积分$\int_A^B[\sin x-\varphi(x)]\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y$与路径无关，并求当$A,B$两点分别为$(1,0)$，$(\pi,\pi)$时这线积分的值.

**解** 由题意 $\varphi'(x)=[\sin x-\varphi(x)]\cdot\dfrac{1}{x}$，故

$$x\varphi'(x)=\sin x-\varphi(x),$$

可得

$$\varphi(x)=\frac{1}{x}(-\cos x+\pi-1)+C.$$

而 $\varphi(\pi)=C=0$，故

$$\varphi(x)=\frac{1}{x}(-\cos x+\pi-1).$$

取积分路径$(1,0)\rightarrow(\pi,0)\rightarrow(\pi,\pi)$，则积分的值为

$$\int_1^\pi[\sin x-\varphi(x)]\cdot\frac{0}{x}\mathrm{d}x+\int_0^\pi\varphi(x)\mathrm{d}y=\int_0^\pi 1\mathrm{d}y=\pi.$$

7. 设位于点$(0,1)$处的质点 $A$ 对质点$M$ 的引力大小为$\dfrac{K}{r^2}$(常数 $K>0$，$r$ 为质点 $A$ 与$M$之间的距离). 现质点 $M$沿曲线$y=\sqrt{2x-x^2}$自点 $B(2,0)$ 运动到 $O(0,0)$，

求在此运动过程中质点 $A$ 对质点 $M$ 的引力所做的功.

**解** 由题意得

$$W=\int_L \frac{K}{r^2}\mathrm{d}s=\int_L \frac{K}{x^2+(y-1)^2}\mathrm{d}s.$$

如图 11-9 所示,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}\times\frac{2-2x}{\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}},$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\frac{1-2x+x^2}{2x-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x,$$

因此

$$W=\int_2^0 \frac{k}{x^2+(\sqrt{2x-x^2}-1)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x=k\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{5}}).$$

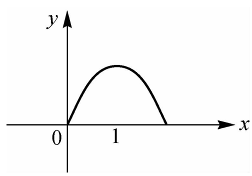


图 11-9

8. 求向量场 $A=x(1+x^2z)\boldsymbol{i}+y(1-x^2z)\boldsymbol{j}+z(1-x^2z)\boldsymbol{k}$,通过由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围闭曲面外侧的流量.

**解** 由题意得流量为

$$\begin{aligned}\oiint_\Sigma \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s&=\iiint_\Omega(1+x^2z+2x^2z+1-x^2z+1-x^2z-x^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\iiint_\Omega 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

$\Omega$ 在 $xOy$ 面的投影区域为 $x^2+y^2\leqslant 1$,故

$$\oiint_\Sigma \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_\rho^1\mathrm{d}z=\pi.$$

9. 曲面 $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$ 的面密度 $\mu$ 为常数,求该曲面在 $0\leqslant z\leqslant\dfrac{3}{2}$ 之间部分的质心.

**解** 由对称性知 $\overline{x}=\overline{y}=0$. 曲面在 $xOy$ 面上投影区域为 $x^2+y^2\leqslant 3$,则

$$M=\iint_\Sigma \mu\mathrm{d}s=\iint_{D_{xy}}\mu\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \mu \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \rho \cdot \sqrt{1+\rho^2} d\rho$$

$$= \pi\mu \cdot (1+\rho^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{14}{3}\pi\mu,$$

$$M_z = \oiint_{\Sigma} z\,ds = \oiint_{D_{xy}} \mu \cdot \frac{x^2+y^2}{2} \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx dy$$

$$= \mu \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \rho \cdot \frac{\rho^2}{2} \cdot \sqrt{1+\rho^2} d\rho$$

$$= \frac{87}{490}\pi\mu.$$

故 $\bar{z} = \frac{M_z}{M} = \frac{29}{35}$，质心为$\left(0,0,\frac{29}{35}\right)$.

10. 设 $f(x)$ 为正值连续函数，区域 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$，$L$ 为 $D$ 的正向边界，求证：

(1) $\oint_L xf(y)dy - \frac{y}{f(x)}dx = \oint_L -yf(x)dx + \frac{x}{f(y)}dy$；

(2) $\oint_L xf(y)dy - \frac{y}{f(x)}dx \geqslant 2\pi$.

**证明** (1) 因$\oint_L xf(y)dy - \frac{y}{f(x)}dx = \iint_D \frac{1}{f(x)} + f(y)dxdy$,

$$\oint_L -yf(x)dx + \frac{x}{f(y)}dy = \iint_D \frac{1}{f(y)} + f(x)dxdy,$$

故由 $x,y$ 的对称性知

$$\iint_D \frac{1}{f(x)} + f(y)dxdy = \iint_D \frac{1}{f(y)} + f(x)dxdy,$$

因此

$$\oint_L xf(y)dy - \frac{y}{f(x)}dx = \oint_L -yf(x)dx + \frac{x}{f(y)}dy.$$

(2)$\oint_L xf(y)dy - \frac{y}{f(x)}dx = \iint_D f(y) + \frac{1}{f(x)}dxdy = \iint_D f(x) + \frac{1}{f(y)}dxdy.$

因 $f(x)$ 为正值连续函数，区域 $D$ 的面积为 $\pi$，故

$$f(y) + \frac{1}{f(x)} \geqslant 2.$$

从而$\iint_D f(y) + \frac{1}{f(x)}dxdy \geqslant 2\oiint_D dxdy = 2\pi.$

# 第十二章

# 无穷级数

## 习题 12-1

1. 判断下列说法是否正确(若正确,则给予证明,若不正确,则举出反例):

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 发散;

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 发散;

(3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛;

(4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则 $\{u_n\}$ 必有界.

**解** (1) 正确.

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散,故当 $n\to\infty$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}$ 的极限不存在.

因此当 $n\to\infty$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}(v_n+u_n)$ 的极限也不存在,则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 发散.

(2) 不正确 .

例如,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}$ 都是发散的,但 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n})$ 显然收敛 .

(3) 不正确.

例如,$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n})$ 收敛的(见教材第 239 页),但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的.

(4) 正确.

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则$\{u_n\}$ 存在极限,故$\{u_n\}$ 有界.

2.判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$;

(2) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{16}+\cdots$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

(4) $\dfrac{4}{3}+\dfrac{4^2}{3^2}+\dfrac{4^3}{3^3}+\cdots$;

(5) $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4^2}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4^3}\right)+\cdots$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{2^n}+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right]$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\dfrac{1}{n}$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$.

**解** (1) 因 $\ln(1+\dfrac{1}{n})=\ln\dfrac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln n$,故

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})&=\lim_{n\to\infty}\ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\cdots+\ln(n+1)-\ln n\\&=\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)-\ln 1\\&=\lim_{n\to\infty}\ln(n+1),\end{aligned}$$

因该极限不存在,故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\dfrac{1}{n})$ 发散.

(2) 原式 $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n}$,属于调和级数,因而是发散的.

(3) 原式$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1})$

$$\begin{aligned}&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3}(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1})\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3}\cdot(1-\frac{1}{3n+1})=\frac{1}{3},\end{aligned}$$

因而是收敛的.

(4) 原式 $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{4}{3})^n$,由于$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{4}{3})^n$ 不存在,因此级数是发散的.

(5) 原式 $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\dfrac{1}{n}+(-1)^n\cdot\dfrac{1}{4^n}]$,由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{1}{4^n}$ 收敛,因此级数发散.

(6) 由于等比级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 收敛,和为 1;$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-\dfrac{1}{3})^n$ 也收敛,和为 $-\dfrac{1}{4}$,因此级数

收敛于$\frac{3}{4}$.

(7) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}=1\neq 0$,故原级数发散.

(8) 由于$\lim\limits_{n\to\infty} n^2(1-\cos\frac{1}{n})=\lim\limits_{n\to\infty} n^2\cdot 2\sin^2\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\neq 0$,故原级数发散.

3. 设有数列$\{u_n\}$,且$\lim\limits_{n\to\infty} nu_n=0$. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)(u_{n+1}-u_n)$收敛的充要条件是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

**证明**　充分性:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(u_{n+1}-u_n)=\lim_{n\to\infty}2u_2-2u_1+3u_3-3u_2+\cdots+(n+1)(u_{n+1}-u_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}-2u_1-u_2-u_3-\cdots-u_n+(n+1)u_{n+1}.$$

又因$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,设其和为 $s$,而$\lim\limits_{n\to\infty} nu_n=0$,故

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)u_{n+1}=0.$$

因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)(u_{n+1}-u_n)$收敛于$-\mu_1-s$.

必要性:

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)(u_{n+1}-u_n)$收敛于 $s$.

同样,由于$\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)u_{n+1}=0$,故数列$\{u_n\}$收敛,收敛于$-\mu_1-s$.

4. 一个篮球每次落下后,反弹的高度都是原来高度的$\frac{3}{4}$. 问球从高为 $h$ 处落下直到停止,它反弹的总距离是多少?

**解**　反弹的总距离$s=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{4})^n\cdot h$,此为等比级数,其收敛于$\frac{3}{4}\cdot\dfrac{h}{1-\frac{3}{4}}=3h$,故反弹的总距离为 $3h$.

*5. 利用柯西收敛准则判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$;(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{4^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}$.

**解** (1) $|s_{n+p}-s_n|=|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{u+p}|$

$$=\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(u+p)^2}\right|,$$

由于 $n-1\leqslant x<n,\frac{1}{n^2}<\frac{1}{x^2}$,所以

$$\frac{1}{n^2}=\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^2}\mathrm{d}x<\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x.$$

从而 $|s_{n+p}-s_n|<\frac{1}{(n+1)^2}+\int_{n+1}^{n+2}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}+\int_{n+2}^{n+3}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}+\cdots+\int_{n+p-1}^{n+p}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$,即

$\frac{1}{(n+1)^2}+(-\frac{1}{3})\cdot\left[\frac{1}{(n+p)^3}-\frac{1}{(n+1)^3}\right]<\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{3(n+1)^3}<\frac{1}{n}+\frac{1}{3n}<\frac{2}{n}$,

故对任意给定正函数 $\varepsilon$,取 $N=[\frac{2}{\varepsilon}]$,则当 $n>N$ 时,对任何自然数 $p$ 恒有

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon,$$

因此级数收敛.

(2) $|s_{n+p}-s_n|=\left|\frac{\sin(n+1)}{4^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)}{4^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{4^{n+p}}\right|$

$$\leqslant\frac{1}{4^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{4^{n+p}}<\frac{1}{4^n},$$

故对任意给定的正数 $\varepsilon$,取 $N\geqslant\log_4\frac{1}{\varepsilon}$,当 $n>N$ 时,对任何 $p$ 有

$$|s_{n+p}-s_n|<\varepsilon,$$

因此原级数收敛.

(3) $|s_{n+p}-s_n|=\left|\frac{1}{n+1}\cos\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\cos\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\cos\frac{1}{n+p}\right|$,

显然 $\cos\frac{1}{n}\geqslant\cos1(n=1,2\cdots)$,所以

$$|s_{n+p}-s_n|>\cos1\cdot(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p})>\cos1\cdot\frac{p}{n+p}.$$

如果取 $p=3n$,则 $|s_{n+p}-s_n|>\frac{3}{4}\cos1$,对 $\varepsilon_0=\frac{3}{4}\cos1$,不论 $N$ 是任何正整数,当 $n>N$,且 $p=3n$ 时,$|s_{n+p}-s_n|>\varepsilon_0$,故原级数发散.

## 习题 12-2

1. 用比较判别法或其极限形式判别下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+3)(n+6)}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^3-3n^2+n+4}}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\frac{5}{4}}}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n+3)}$；　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}(a>0)$.

**解**　(1) 因$\dfrac{1}{(n+3)(n+6)}<\dfrac{1}{n^2}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+3)(n+6)}$ 收敛 .

(2) 因$\lim\limits_{x\to\infty}n^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{n^3-3n^2+n+4}=1$，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^3-3n^2+n+4}}$ 与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{\frac{2}{3}}$敛散性相同，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{\frac{2}{3}}$ 收敛，因此原级数收敛 .

(3) 因$\dfrac{\ln n}{n^{\frac{5}{4}}}<\dfrac{n}{n^{\frac{5}{4}}}=n^{-\frac{1}{4}}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{1}{4}}$ 收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\frac{5}{4}}}$ 收敛 .

(4) 因当$n\to\infty$时$\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n^3}})\to\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}$收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n^3}})$收敛.

(5) 因$\dfrac{1}{\ln(n+3)}>\dfrac{1}{n+3}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+3}$ 发散，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n+3)}$ 发散 .

(6) 当$a\leqslant 1$时，$\dfrac{1}{1+a^n}\geqslant\dfrac{1}{2}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}$ 发散，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}$ 发散；

当$a>1$时，$\dfrac{1}{1+a^n}<\dfrac{1}{a^n}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a^n}$ 收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}$ 收敛 .

2. 用比值判别法判别下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{9^n}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n\cdot(2n+1)!}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n n!}{(2n-1)!!}$；　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\tan\dfrac{1}{3^n}$.

**解**　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\dfrac{n^n}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n+1)^n}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，故级数收敛 .

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}\cdot\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=\dfrac{1}{4}$,故级数收敛.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)}{9^{n+1}}\cdot\dfrac{9^n}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{9}$ 不存在,故级数发散.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n\cdot(2n+1)!}{(2n+2)\cdot(2n+3)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{(2n+2)(2n+3)}=0$,故级数收敛.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{(2n+1)!}\cdot\dfrac{(2n-1)!!}{3^n n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3(n+1)}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$,故级数发散.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\tan\dfrac{1}{3^{n+1}}}{n\tan\dfrac{1}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)3^n}{n\cdot 3^{n+1}}=\dfrac{1}{3}$,故级数收敛.

3. 用根值判别法判别下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{3n+4}\right)^n$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n-1}{4^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n\cdot 2^n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^n+2}{3^n}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{[\ln(n+3)]^n}$.

**解**　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{n+1}{3n+4}\right)^n}=\dfrac{1}{3}$,故级数收敛.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n-1}{4^n}}=\dfrac{1}{4}$,故级数收敛.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3^n}{(\dfrac{n+1}{n})^{n^2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{(\dfrac{n+1}{n})^n}=\dfrac{3}{e}$,故级数发散.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3^n}{n\cdot 2^n}}=\dfrac{3}{2}$,故级数发散.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{e^n+2}{3^n}}=\dfrac{e}{3}$,故级数收敛.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{[\ln(n+3)]^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln(n+3)}=0$,故级数收敛.

4. 用积分判别法判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p}(p>0)$ 的收敛性.

**解**　因 $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^p}$ 单调递减,且

$$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{1-p}\cdot(\ln x)^{1-p}\Big|_1^{+\infty}$$
$$= \begin{cases}\infty, p \leqslant 1\\ 0, p > 1\end{cases},$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^p}$ 在 $p \leqslant 1$ 时发散，$p > 1$ 时收敛.

5.用适当方法判断下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n \tan \dfrac{1}{4^n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(\sqrt{2}-1)^n n^2}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\arcsin \dfrac{1}{n}\right)^n$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a+nb}(a>0, b>0)$；　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\int_1^n \sqrt[4]{1+x^4}\mathrm{d}x}$.

**解**　(1) 因 $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n \tan \dfrac{1}{4^n} \to \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3^n}{4^n}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\dfrac{3}{4})^n$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n \tan \dfrac{1}{4^n}$ 收敛 .

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt{2}-1)^n \cdot n^2}{(\sqrt{2}-1)^{n+1} \cdot (n+1)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{(\sqrt{2}-1)\cdot(n+1)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} > 1$，故级数发散 .

(3) 因 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n(\arcsin \dfrac{1}{n})^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \arcsin \dfrac{1}{n} = 0$，故级数收敛 .

(4) 因 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^{n+!}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \dfrac{n^n}{2^n \cdot n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = \dfrac{2}{\mathrm{e}}$，故级数收敛 .

(5) 因 $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{a+bx}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{b}\ln(a+bx)\Big|_1^{+\infty}$ 不存在，故级数发散 .

(6) 因 $\int_1^n \sqrt[4]{1+x^4}\mathrm{d}x > \int_1^n x\mathrm{d}x = \left(\dfrac{n^2-1}{2}\right)$，所以 $\dfrac{1}{\int_1^n \sqrt[4]{1+x^4}\mathrm{d}x} < \dfrac{2}{n^2-1}$ 收敛

($\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^2-1}$ 收敛)，故级数收敛 .

6.设 $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n (n = 1,2,3,\cdots)$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛.

**证明** 因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛，则它们的部分和均存在．$b_n - c_n$，$c_n - a_n$ 均为单调递增正项数列，而 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 均有界，因此 $\{c_n\}$ 有界，即 $\{b_n - c_n\}$ 有界，故 $\{b_n - c_n\}$ 收敛. 因此 $\{b_n - c_n\}$，$\{b_n\}$ 均收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛．

7. 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}(\lambda > 0)$ 收敛.

**证明** 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\tan^n x \big|_0^{\frac{\pi}{4}}}{1} = 1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^\lambda} \to \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\lambda+1}}$.

又因 $\lambda > 0$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda+1}}$ 收敛，故原级数收敛．

## 习题 12-3

1. 判别下列级数是否收敛？如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛？

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$；

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n^2}{n!}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$；

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{2^n}$.

**解** (1) 显然级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1} \right|$ 是发散的．令 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}(x \geqslant 2)$，$u_n = \frac{\sqrt{n}}{n-1}$ 显然 $f(x)$ 单调递减，则 $u_n > u_{n+1}$.

又因 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1} = 0$，故原级数条件收敛．

(2) 显然级数 $\lim\limits_{n\to\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1} \right|$ 是发散的．令 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}(x \geqslant 1)$，显然 $f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} < 0$，$f(x)$ 单调递减，则 $u_n > u_{n+1}$.

又因 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$，故原级数条件收敛．

(3) 因 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^n = \frac{e}{2} > 1$，故原级数发散．

(4) 因$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)^2}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n^2}=0$,故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{2n^2}{n!}\right|$收敛,故原级数绝对收敛.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\right|=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$$=\sqrt{n+1}-1$$

是发散的.

令 $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$,则 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}<0$,故 $f(x)$ 单调递减,$u_n>u_{n+1}$. 而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=0$,因此原级数条件收敛.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{2^{n+1}}\cdot\dfrac{2^n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}<1$,故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{2n+1}{2}\right|$收敛,故原级数绝对收敛.

2. 设正项数列$\{a_n\}$单调递减,且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散,试问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a_n+1}\right)^n$是否收敛并说明理由.

**解** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{1}{a_n+1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n+1}<1$,故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{a_n+1})^n$收敛.

3. 下列级数 $x$ 在什么范围内收敛?在什么范围内发散?

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 3^n}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$.

**解** (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{x}{3})^n\cdot\dfrac{1}{n}$,于是:

当 $|x|<3$ 时,因$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(\dfrac{x}{3})^n\cdot\dfrac{1}{n}\right|$收敛;

当 $x=-3$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{1}{n}$条件收敛,故数列绝对收敛;

当 $x=3$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散;

当 $|x|>3$ 时,数列发散;

故 $|x|<3$ 时绝对收敛;

$x=-3$ 时条件收敛;

$|x|>3$ 或 $x=3$ 时发散.

(2) 当 $x=1$ 时,数列发散;

当 $x=-1$ 时，数列为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2}$，也发散；

当 $|x|\neq-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^n}+x^n}$ 绝对收敛．

故 $|x|\neq 1$ 时绝对收敛，$|x|=1$ 时发散.

4.若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n-u_{n-1}|$ 和正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 收敛.

**证明**　因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n-u_{n-1}|$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n-u_{n-1}$ 绝对收敛，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_nu_n-v_nu_{n-1}$ 也绝对收敛.

由收敛极数的基本性质知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_nu_n$ 收敛．

## 习题 12-4

1.求下列幂级数的收敛半径和收敛域：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}x^{2n-2}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n+3^n}$；　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n}$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x+1)^n$；　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}x^{2n-1}$.

**解**　(1) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(-1)^n}{n!}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$，故 $R=+\infty$，则收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{2n+1}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{2n-1}\right|=\frac{1}{3}$，故 $R=\sqrt{3}$，

当 $x=\pm\sqrt{3}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}x^{2n-2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)\cdot\frac{1}{3}$ 发散，故收敛域为 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

(3) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{1}\right|=1$，故 $R=1$.

当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{1}{n^2}$ 收敛；当 $x=3$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故收敛域为$[1,3]$.

(4) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\dfrac{n^n}{n!}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n+1)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

故 $R=\mathrm{e}$.

当 $x=\pm\mathrm{e}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}x^n$ 均发散，故收敛域为$(-\mathrm{e},\mathrm{e})$.

(5) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}\right|=\dfrac{1}{3}$，故 $R=3$.

当 $x=\pm 3$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^n+3^n}$ 均发散，故收敛域为$(-3,3)$.

(6) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\dfrac{2^n}{n}\right|=\dfrac{1}{2}$，故 $R=\sqrt{2}$.

当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}\cdot x^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$ 发散，故收敛域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

(7) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{n}\right|=1$，故 $R=1$.

当 $x=-2$ 和 $x=0$ 时，数列均发散，故收敛域为$(-2,0)$.

(8) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\cdot\dfrac{2n-1}{(-1)^n}\right|=1$，故 $R=1$.

当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\cdot x^{2n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{3n-1}\dfrac{1}{2n-1}$ 收敛；

当 $x=1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\cdot x^{2n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{1}{2n-1}$ 收敛，故收敛域为$[-1,1]$.

2. 求下列幂级数的和函数：

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n-1)}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$；

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

**解**　(1) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n(n-1)}{n(n+1)}\right|=1$，故 $R=1$.

令 $s(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n-1)}$，则当 $x=1$ 时，由于

$$s(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n},$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})=1=s(x)$. 因此 $x=1$ 时数列收敛;当 $x=-1$ 时数列收敛,收敛域为$[-1,1]$.

因为

$$s(x)=(1-\frac{1}{2})x^2+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})x^3+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})x^4+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})x^n+\cdots,$$

$$s'(x)=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots,$$

故 $s'(x)=-\ln(1-x)$,则

$$s(x)=\begin{cases}x+(1-x)\ln(1-x), & x\in[-1,1).\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{4n+1}{4n+5}\right|=1$,故 $R=1$, $x=\pm 1$ 时级数均发散,故收敛域为$(-1,1)$. 于是令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$,则

$$s(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^9}{9}+\frac{x^{13}}{13}+\cdots+\frac{x^{4n+1}}{4n+1}+\cdots,$$

$$s'(x)=x^4+x^8+x^{12}+\cdots+x^{4n}+\cdots=\frac{x^4}{1-x^4},$$

可求得 $s(x)=x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x, x\in(-1,1)$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$,故 $R=1$, $x=\pm 1$ 时级数均发散,收敛域为$(-1,1)$. 于是令 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$,则

$$s(x)=1+3x+5x^2+7x^3+\cdots+(2n+1)x^n+\cdots$$

$$s(x)-\frac{s(x)}{x}=-\frac{1}{x}-2-2x-2x^2-\cdots-2x^n-\cdots=-\frac{1}{x}-2\cdot\frac{1}{1-x},$$

故 $s(x)=\frac{1+x}{(1-x)^2}, x\in(-1,1)$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$, $R=1$, $x=\pm 1$ 时,级数均发散,故收敛域为$(-1,1)$,于是令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$,则

$$s(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots,$$

$$s'(x)=1+x^2+x^4+\cdots x^{2n-2}+\cdots=\frac{1}{1-x^2},$$

可求得 $s(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, x\in(-1,1)$.

## 习题 12-5

1. 将下列函数展成 $x$ 的幂级数，并求展开式成立的区间：

(1) $f(x)=\ln(a+x)(a>0)$； (2) $f(x)=\sin^2 x$；

(3) $f(x)=\ln(4-3x-x^2)$； (4) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

(5) $f(x)=e^{-x^2}$； (6) $f(x)=2^x$.

**解** (1) $\ln(a+x)=\ln(1+\frac{x}{a})+\ln a$.

因 $\ln(1+\frac{x}{a})=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}(\frac{x}{a})^n, x\in(-a,a]$，故

$$\ln(a+x)=\ln a+\sum_{a=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{a}\right)^n, x\in(-a,a].$$

(2) $\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!}, x\in(-\infty,+\infty).$$

(3) $f(x)=\ln(4+x)(1-x)$

$$=\ln(1+\frac{x}{4})+\ln(1-x)+\ln 4$$

$$=\ln 4+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\frac{x}{4})^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}, x\in[-1,1].$$

(4) 因为 $\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$，所以

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}, x\in(-1,1).$$

(5) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}, x\in(-\infty,\infty)$.

(6) $f'(x)=2^x\ln 2, f''(x)=2x(\ln 2)^2$，故有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln 2)^n}{n!}, x\in(-\infty,+\infty).$$

2. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数.

**解**
$$f(x)=\frac{1}{(1+\frac{x-2}{2})^2}\cdot\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^{n-1}}\cdot(x-2)^{n-1}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^{n+1}}(x-2)^{n-1},(0<x<4).$$

3. 将函数 $f(x)=\cos x$ 展开成 $\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的幂级数.

**解**
$$f(x)=\cos(x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3})$$
$$=\frac{1}{2}\cos(x+\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x+\frac{\pi}{3})$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(x+\frac{\pi}{3})^{2n}}{(2n)!}+\sqrt{3}\cdot\frac{(x+\frac{\pi}{3})^{2n+1}}{(2n+1)!}\right],(-\infty<x<\infty).$$

4. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$ 展开为 $(x+2)$ 的幂级数.

**解**
$$f(x)=\frac{1}{(x-3)(x+1)}$$
$$=\frac{1}{4}(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1})$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{-5+(x+2)}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{-1+(x+2)}$$
$$=-\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+2}{5}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-(x+2)}$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(x+2)^n(1-\frac{1}{5^{n+1}}),(-3<x<-1).$$

5. 将函数 $f(x)=\ln\sqrt{1+x-2x^2}$ 展开成 $x$ 的幂级数.

**解** $f(x)=\ln\sqrt{1+2x}+\ln\sqrt{1-x}$

$$=\frac{1}{2}\ln(1+2x)+\frac{1}{2}\ln(1-x)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n}-1}{n}x^{n},x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}].$$

## 习题 12-6

1. 利用函数的幂级数展开式求下列各数的近似值：

(1) e(误差不超过 0.000 01)； (2) $\sqrt[9]{522}$(误差不超过 0.000 01).

**解** (1)$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}+\cdots$

令 $x=1$,则可得

$$e=1+1+\frac{1}{2^{1}}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

取前 5 项,则 $e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$,截断误差小于 $10^{-5}$,因此

$$e\approx1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\approx2.718\ 33.$$

(2) $\sqrt[9]{522}=\sqrt[9]{2^{9}+10}=2(1+\frac{10}{2^{9}})^{\frac{1}{9}}$,因为

$$(1+x)^{m}=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)}{n!}x^{n}+\cdots$$

所以

$$\sqrt[9]{522}=2\left[1+\frac{1}{9}\cdot\frac{10}{2^{9}}+\frac{\frac{1}{9}(\frac{1}{9}-1)}{2!}\frac{10^{2}}{2^{18}}+\cdots+\frac{\frac{1}{9}(\frac{1}{9}-1)\cdots(\frac{1}{9}-n+1)}{n!}\cdot\frac{10^{n}}{2^{9n}}+\cdots\right]$$

$$=2+\frac{2}{9}\cdot\frac{10}{2^{9}}-\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10^{2}}{2^{18}}+\cdots$$

又因$|r_{3}|\leqslant u_{4}=\frac{8\cdot17}{3\cdot9^{3}}\cdot\frac{10^{3}}{2^{27}}<10^{-6}$,则取前 3 项的和可得

$$\sqrt[9]{522}\approx2+\frac{2}{9}\cdot\frac{10}{2^{9}}-\frac{8}{9^{2}}\cdot\frac{10^{2}}{2^{18}}\approx2.004\ 30.$$

2. 求下列定积分的近似值：

(1) $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\arctan x}{x}dx$(误差不超过 $10^{-3}$)； (2) $\int_{0}^{0.1}\cos\sqrt{t}dt$(误差不超过 $10^{-4}$).

**解** (1) 因 $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots (-1 < x < 1)$,故

$$\int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx = \int_0^{0.5} (1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{2n+1} + \cdots) dx$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{2^5} - \frac{1}{49} \cdot \frac{1}{2^7} + \cdots,$$

由于 $|v_3| \leqslant u_4 = \dfrac{1}{49} \cdot \dfrac{1}{2^7} \approx 0.000\,2 < 0.001$,则取前 3 项的和可得

$$\int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx \approx 0.487.$$

(2) 因 $\cos\sqrt{x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^n}{(2n)!}$,故

$$\int_0^{0.1} \cos\sqrt{t} dt = \int_0^{0.1} 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^n}{(2n)!} + \cdots dx$$

$$= (x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 4!} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot (2n)!} + \cdots) \Big|_0^{0.1}$$

$$= 0.1 - \frac{0 \cdot 1^2}{2 \cdot 2!} + \frac{0.1^3}{3 \cdot 4!} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{0.1^{n+1}}{(n+1) \cdot (2n)!} + \cdots$$

由于 $|r_4| < 10^{-4}$,则取前 4 项的和可得

$$\int_0^{0.1} \cos\sqrt{t} dt = 0.097\,5.$$

3. 求下列数项级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2n-1}{2^n}$;  (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)2^n}$.

**解** (1) 构造函数

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) \cdot x^n = x + 3x^2 + 5x^3 + \cdots + (2n-1)x^n$$

则

$$\frac{s(x)}{x} - s(x) = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \cdots + 2x^{n-1} + \cdots$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{1}{1-x},$$

故 $s(x) = (\dfrac{1-x+2}{1-x}) \cdot \dfrac{x}{1-x}$,因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = s(\frac{1}{2}) = \frac{1 - \frac{1}{2} + 2}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 5.$$

(2) 构造函数

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

则

$$s(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

于是

$$s'(x)=1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}+\cdots=\frac{1}{1-x^2}.$$

因 $s(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$,故 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^n}=s(\frac{1}{\sqrt{2}})\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$

4. 试用幂级数求下列微分方程的解：

(1) $(1-x)y'+y=1+x, y|_{x=0}=0$;　　　　(2) $y''=xy(-\infty<x<+\infty)$.

**解**　(1) 因 $y|_{x=0}=0$,故设 $y=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 是方程的特解,则 $y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$,代入方程有

$$(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=1+x,$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=1+x,$$

比较系数得

$$a_1=1,a_2=\frac{1}{2},a_{n+1}=\frac{n-1}{n+1}a_n.$$

因此 $y=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}x^n+\cdots$.

(2) 设方程的解为 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,则

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2},$$

$$y''-xy=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0,$$

比较系数得 $a_2,a_3,a_3\cdots$ 均为 0.

因此 $y=a_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{3n\cdot(3n-1)\cdots3\cdot2}\right]+a_1\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{(3n+1)\cdot3n\cdots4\cdot3}\right]$.

## 习题 12-7

1.填空题：

(1) 设 $f(x)$ 以 $2\pi$ 为周期，在$[-\pi,\pi]$上 $f(x)=x^2$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=4\pi$ 处收敛于________.

(2) 设 $f(x)$ 以 $2\pi$ 为周期，在$[-\pi,\pi]$上 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x<\pi,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数为________.

**解** (1) $f(0)=0$，故 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=4\pi$ 收敛于 0.

(2) 在间断点 $x=-\pi$ 处，$s(-\pi)=\dfrac{\pi+0}{2}=\dfrac{\pi}{2}$；在 $x=\pi$ 处，$s(\pi)=\dfrac{\pi+0}{2}=\dfrac{\pi}{2}$，故

$$s(x)=\begin{cases}f(x), x\neq(2k+1)\pi,\\ \dfrac{\pi}{2}, x=(2k+1)\pi.\end{cases}$$

2.将下列周期为 $2\pi$ 的函数展开成傅里叶级数，如果 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上的表达式为：

(1) $f(x)=3x^2, -\pi\leqslant x<\pi$；　　(2) $f(x)=\begin{cases}2, & -\pi\leqslant x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<\pi;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ e^x, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$

**解** (1) $f(x)$ 是偶函数，故

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}3x^2\,dx=2\pi^2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}3x^2\cos nx\,dx=\frac{12(-1)^n}{n^2},$$

因此 $f(x)=\pi^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{12(-1)^n}{n^2}\cos nx,(x\neq k\pi,k=0,\pm1,\pm2\cdots)$.

(2) $a_0=\dfrac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}0\,dx+\int_{-\pi}^{0}2\,dx\right)=2$,

$a_n=\dfrac{1}{\pi}(\int_0^{\pi}0\cos nx\,dx+\int_{-\pi}^{0}2\cos nx\,dx)=0$,

$b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}2\sin nx\,dx=-\dfrac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}$,

因此

$$f(x)=1-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x.\ (x\neq 2k, k=0,\pm1,\pm2\cdots)$$

(3) $a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{\pi}$,

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}-1}{n^2+1}$,

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{n[1-(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}]}{n^2+1}$,

因此

$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}-1}{n^2+1}\cos nx+\frac{n[1-(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}]}{n^2+1}\sin nx\right\}$, $(x\neq k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

3. 将下列各周期函数展开成傅里叶级数，如果 $f(x)$ 在一个周期内的表达式为：

(1) $f(x)=|x|\ (-1<x<1)$；　　(2) $f(x)=\begin{cases}0, & -2\leqslant x<0,\\ 2, & 0\leqslant x<2;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}x(1+x), & -1<x\leqslant 0,\\ x(1-x), & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$

**解**　(1) 因 $f(x)$ 是偶函数，且

$$a_0=2\int_0^1 x\mathrm{d}x=1,\quad b_n=0,$$

$$a_n=2\cdot\int_0^1 x\cdot\cos n\pi x\mathrm{d}x=-\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(2k-1)^2},$$

所以

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x, (-\infty<x<+\infty).$$

(2) $a_0=\frac{1}{2}\cdot\int_0^2\mathrm{d}x=2$,

$a_n=\frac{1}{2}\int_0^2 2\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=0$,

$b_n=\frac{1}{2}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{(2k-1)}$,

因此

$$f(x)=1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\frac{\sin(2n-1)\pi x}{2}, (x\neq 2k, k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

(3) $f(x)$ 是有函数，且

$$a_0=\int_{-1}^{0}x(1+x)\mathrm{d}x+\int_0^1 x(1-x)=0,$$

$$b_n=\int_{-1}^{0}(1+x)\sin n\pi x\mathrm{d}x+\int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x\mathrm{d}x=\frac{8}{\pi^3}\cdot\frac{1}{(2k-1)^3},$$

因此

$$f(x)=\frac{8}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)\pi x,(-\infty<x<+\infty).$$

*4. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的偶函数,它在 $[0,2]$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$$

试将 $f(x)$ 展开成复数形式的傅里叶级数.

**解** 因 $a_0=\frac{2}{2}\int_0^1 1\mathrm{d}x=1, a_n=\frac{2}{2}\int_0^1\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$,故

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\cos n\frac{\pi x}{2},(x\neq\pm1,\pm2,\cdots).$$

## 习题 12-8

1. 将下列函数展开成傅里叶级数:

(1) $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\leqslant x<0,\\ -x, & 0\leqslant x<\pi;\end{cases}$　(2) $f(x)=\pi^2-x^2(-\pi<x\leqslant\pi)$;

(3) $f(x)=x^2-x(-2\leqslant x\leqslant 2)$;　(4) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & -3\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<1.\end{cases}$

**解** (1) $a_0=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}-x\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{\pi}\cdot(\pi-\frac{\pi^2}{2})=1-\frac{\pi}{2}$,

$$a_n=\frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}\cos nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}-x\cos nx\mathrm{d}x)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{(2n-1)^2},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}\sin nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}-x\sin nx\mathrm{d}x)=-\frac{(-1)^n(1+\pi)-1}{n\pi},$$

因此

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+\pi)-1}{n\pi}\sin nx.$$

(2) $f(x)$ 为偶函数,且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2},$$

因此

$$f(x) = \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx.$$

(3) $a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(x^2 - x)\mathrm{d}x = \frac{8}{3}$,

$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(x^2 - x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n \cdot 16}{\pi^2 n^2}$,

$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(x^2 - x)\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n \cdot 4}{n\pi}$,

因此

$$f(x) = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{16 \cdot (-1)^n}{\pi^2 n^2}\cos\frac{n\pi x}{2} + (-1)^n \cdot \frac{4}{n\pi} \cdot \sin\frac{n\pi x}{2}\right].$$

(4) 将 $f(x)$ 补充为 $1 \leqslant x \leqslant 3$ 时,当 $f(x) = 1$ 时,则

$$a_0 = \frac{1}{3}\left(\int_{-3}^{0}(2x+1)\mathrm{d}x + \int_0^3 \mathrm{d}x\right) = -1,$$

$a_n = \frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x+1)\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x + \int_0^3\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x\right] = \frac{6 \cdot [1-(-1)^n]}{\pi^2 n^2}$,

$b_n = \frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x+1)\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x + \int_0^3\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x\right] = (-1)^{n+1}\frac{6}{n\pi}$,

因此

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{6}{\pi^2 n^2}[1-(-1)^n]\cos\frac{n\pi x}{3} + (-1)^{n+1}\frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right\}.$$

2. 将下列函数展开成正弦级数和余弦级数:

(1) $f(x) = x^2 (0 \leqslant x \leqslant 2)$;　　(2) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < \frac{l}{2}, \\ l - x, & \frac{l}{2} \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$

**解**　(1) 正弦级数:

作奇延拓得

$$f(x) = -x^2, (-2 \leqslant x < 0),$$

$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x^2 \sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x = \frac{8}{\pi} \cdot \left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^3\pi^2} \cdot [(-1)^n - 1]\right\}$,

因此

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^3\pi^2}[(-1)^n - 1]\right\}\sin\frac{n\pi x}{2}, (0 \leqslant x \leqslant 2).$$

余弦级数：

作偶延拓得

$$y = x^2, (-2 \leqslant x < 0),$$

则

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 \mathrm{d}x = \frac{8}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x = \frac{16}{\pi^2}\cdot\frac{(-1)^n}{n^2},$$

因此

$$f(x) = \frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}, (0 \leqslant x \leqslant 2).$$

（2）正弦级数：

作奇延拓得

$$f(x) = \begin{cases} -x, -\dfrac{l}{2} \leqslant x < 0, \\ x - l, -l \leqslant x < \dfrac{l}{2}, \end{cases}$$

则

$$b_n = \frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x + \int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\right]$$
$$= \frac{4l}{\pi^2}\cdot\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2},$$

因此

$$f(x) = \frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{l}, (0 \leqslant x \leqslant l).$$

余弦级数：

作偶延拓得

$$f(x) = \begin{cases} x, -\dfrac{l}{2} \leqslant x < 0, \\ l - x, -l \leqslant x < \dfrac{l}{2}, \end{cases}$$

则

$$a_0 = \frac{2}{l}(\int_0^{\frac{l}{2}} x\mathrm{d}x + \int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\mathrm{d}x = \frac{l}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{l}\left(\int_0^{\frac{l}{2}} x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x + \int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\right) = -\frac{2l}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(2k-1)^2},$$

因此

$$f(x)=\frac{l}{4}-\frac{2l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{l},(0\leqslant x\leqslant l).$$

3. 将 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展成正弦级数，并由此求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的和.

**解** 作奇延拓得

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n},$$

故

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx,(0\leqslant x\leqslant\pi),$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

## 总复习题十二

1. 填空题：

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于 $a$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$ 收敛于________.

(2) 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $\frac{1}{3}$，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2a_n(x-1)^n$ 的收敛区间为________.

(3) $\mathrm{e}^x$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数为________.

(4) 设函数 $f(x)=\pi x+x^2(-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数展开式为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，其中 $b_5$ 的值为________.

(5) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛，则 $p\in$ ________，若 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 绝对收敛，则 $p\in$ ________.

**解** (1) 因 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1}$ 收敛于 $a$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$ 收敛于 $2a$.

(2) 由题意知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=3$，可求得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2\cdot a_{n+1}}{n^2\cdot a_n}\right|=3$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2a_n(x-1)$

收敛半径也为$\frac{1}{3}$，收敛区间为$\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$.

(3) $e^x = e^{x-3+3} = e^3 \cdot e^{x-3} = e^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}, (-\infty < x < +\infty)$.

(4) $b_5 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi x + x^2)\sin 5x \mathrm{d}x = \frac{2\pi}{5}$.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛，则有 $p \leqslant 1$，且 $p > 0$，故 $p \in (0,1]$；

若$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ 绝对收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛，故 $p \in (1,+\infty)$.

2. 选择题：

(1) 设 $0 \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n}(n = 1,2,3,\cdots)$，则下列级数中一定收敛的是(　　).

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

C. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$

(2) 若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^2$ 在 $x = -1$ 处收敛，则此级数在 $x = 2$ 处(　　).

A. 条件收敛　　B. 绝对收敛

C. 发散　　D. 收敛性不确定

(3) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则以下条件中，能推出级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛的是(　　).

A. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$　　B. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$

C. $\sum_{n\to\infty}^{\infty} n(a_n - b_n) = 1$　　D. $\sum_{n\to\infty}^{\infty} n^2(a_n - b_n) = 1$

(4) 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2 x^n$ 的和函数为(　　).

A. $\frac{1+x}{(1-x)^3}(|x| < 1)$　　B. $\frac{1+x}{(1-x)^2}(|x| < 1)$

C. $1-x(|x| < 1)$　　D. $1+x(|x| < 1)$

(5) 设 $f(x) = \begin{cases} 2x, & -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ 4x, & 0 < x \leqslant \pi, \end{cases}$ 则将 $f(x)$ 作周期延拓，展开所得傅里叶级数在点 $x = \pi$ 收敛于(　).

A. $2\pi$　　B. $4\pi$　　C. $\pi$　　D. 0

**解** (1) 因 $0 \leqslant a_n \leqslant \dfrac{1}{n}$，故 $0 \leqslant a_n^2 \leqslant \dfrac{1}{n^2}$，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$ 绝对收敛.

选 D.

(2) 因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(-2)^n$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是绝对收敛的.

选 B.

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(a_n - b_n) = 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛.

选 D.

(4) 令 $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)^2 x^n$，因 $\int s(x)\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{n+1} = 2x^2 + 3x^3 + \cdots + (n+1)x^{n+1}$，故

$$\frac{\int s(x)\,\mathrm{d}x}{x} - \int s(x)\,\mathrm{d}x = 2x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + \cdots = 2x + \frac{x^2}{1-x},$$

因此可得 $s(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$.

选 A.

(5) $f(\pi) = \dfrac{f(\pi - 0) + f(\pi + 0)}{2} = \dfrac{4\pi - 2\pi}{2} = \pi$.

选 C.

3. 判定下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}} \sqrt[n]{n}}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2^n + 5^n}{5^n + 1}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2[\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2\sqrt{n}}}{n}$.

**解** (1) 因 $n^{\frac{4}{3}} \sqrt[n]{n} > n^{\frac{4}{3}}$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}} \sqrt[n]{n}} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 收敛，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}} \sqrt[n]{n}}$ 收敛.

(2) 因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \dfrac{2^n}{5^n + 1}$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n}{5^n + 1}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2^n + 5^n}{5^n + 1}$ 发散.

(3) 因为

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2[\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{2}{n}} \cdot [\sqrt{2} + (-1)^n]}{3} < 1,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$ 收敛.

(4) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2\sqrt{n}}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{2n^{\frac{3}{2}}}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi}{2n^{\frac{3}{2}}}$，收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2\sqrt{n}}}{n}$ 也收敛.

4. 判别下列级数的收敛性，若收敛，是条件收敛还是绝对收敛：

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!!}{(2n-1)!!}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{1}{n}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

**解** (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\neq 0$，且其值为无穷大，故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!!}{(2n-1)!!}$ 是发散的.

(2) 先判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 的收敛性：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+2}}\cdot\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}=\frac{1}{\mathrm{e}}<1,\end{aligned}$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 收敛，因此原级数绝对收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n}$ 是发散的，但由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{n}\to\dfrac{1}{n}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 收敛，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{1}{n}$ 条件收敛.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 是发散的，但由于 $\sin(\pi\cdot\sqrt{n^2+1})$ 是一个周期函数，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 条件收敛.

5. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2 2^n}x^{n-1}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2nx^{2n-1}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2(2x-1)^{2n}}{(2n)!}$.

**解** (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n^2 2^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}\right| = \dfrac{1}{2}$,故 $R = 2$.

当 $x = \pm 2$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2 2^n}x^{n-1}$ 均收敛,故收敛域为$[-2,2]$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)n}{(n+1)(n+2)}\right| = 1$,故 $R = 1$.

当 $x = \pm 1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 均收敛,故收敛域为$[-1,1]$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2n+1}{2n}\right| = 1$,故 $R = 1$.

当 $x = \pm 1$ 时,均有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2nx^{2n-1}$ 发散,故收敛域为$(-1,1)$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\dfrac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}\right| = \dfrac{1}{4}$,故 $R = \dfrac{4}{2^2} = 1$.

当 $x = -\dfrac{1}{2}$ 和 $x = \dfrac{3}{2}$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}(2x-1)^{2n}$ 均发散,故收敛域为$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$.

6.求下列幂级数的和函数:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2 x^{n-1}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{n}x^{2n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[1+\dfrac{1}{n(2n-1)}\right]x^{2n}$.

**解** (1) 令 $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2 x^{n-1}$,则

$$\int s(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots$$

因此

$$\frac{\int s(x)\mathrm{d}x}{x} - \int s(x)\mathrm{d}x = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + nx^n + \cdots = \frac{1}{1-x},$$

故可得

$$\int s(x)\mathrm{d}x = \frac{x}{(1-x)^2},\ s(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3},(-1 < x < 1).$$

(2) 易求得收敛域为$(-1,1)$,于是令 $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{2n+1}{n}x^{2n}$,则

$$s(x)=3x^2-\frac{5}{2}x^4+\frac{7}{3}x^6-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n}x^{2n}+\cdots$$

则

$$\begin{aligned}s'(x)&=6x-10x^3+14x^5-\cdots+2\cdot(-1)^{n+1}\cdot(2n+1)x^{2n-1}+\cdots\\&=4x-8x^3+12x^5-\cdots+(-1)^{n+1}\cdot 4nx^{2n-1}+\cdots+2x-2x^3+2x^5-\cdots+\\&\quad(-1)^{n+1}\cdot 2\cdot x^{2n-1}+\cdots\end{aligned}$$

令 $g(x)=4x-8x^3+12x^5-\cdots+(-1)^{n+1}\cdot 4n\cdot x^{2n-1}$,则

$$\begin{aligned}\frac{g(x)}{x^2}+g(x)&=\frac{4}{x}-4x+4x^3-4x^5+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot 4x^{2n+1}+\cdots\\&=\frac{4}{x}+\frac{-4x}{1+x^2},\end{aligned}$$

故有 $s'(x)=g(x)+2\cdot\dfrac{x}{1+x^2}$,从而可得

$$s(x)=\ln(1+x^2)+\frac{2x^2}{1+x^2},(-1<x<1).$$

(3) 易求得收敛域为$[-2,2)$,$x=0$ 时,级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1}=\dfrac{1}{2}$.

当 $x\neq 0$ 时,令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1}$,

$$s(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}x+\frac{1}{3\cdot 2^3}x^2+\cdots+\frac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1}+\cdots$$

故有

$$\begin{aligned}[x\cdot s(x)]'&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}x+\frac{1}{2^3}x^2+\cdots+\frac{1}{2^n}x^{n-1}+\cdots\\&=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}\cdot x},\end{aligned}$$

从而可得

$$s(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-\frac{x}{2}).$$

$$\text{综上所述},s(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}\ln(1-\dfrac{x}{2}),-2\leqslant x<0,\ 0<x<2,\\ \dfrac{1}{2},x=0.\end{cases}$$

(4) 易求得收敛域为$(-1,1)$,于是令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}[1+\dfrac{1}{n(2n-1)}]x^{2n}$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot x^{2n}=x^2-x^4+x^6-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot x^{2n}=\frac{x^2}{1+x^2}.$$

令 $t(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n(2n-1)}x^{2n}$，则

$$t'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{2}{2n-1}\cdot x^{2n-1}$$

$$\begin{aligned}t''(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot 2\cdot x^{2n-2}\\&=2\cdot(1-x^2+x^4-\cdots+x^{2n-2}-\cdots)\\&=2\cdot\frac{1}{1+x^2},\end{aligned}$$

故得 $t(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$，从而

$$s(x)=\frac{x^2}{1+x^2}+2x\arctan x-\ln(1+x^2),(-1<x<1).$$

7. 求下列数项级数的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$； (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^{n-1}n!}$.

**解** (1) 构造函数 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\cdot x^{2n-1}$，于是

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{2n-2}=-1+x^2-x^4+\cdots-x^{2n-2}-\cdots=-\frac{1}{1+x^2},$$

故 $s(x)=-\arctan x$，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}=s(1)=-\frac{\pi}{4}$.

(2) 构造函数

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2^n}\cdot n^2\cdot x^n-\frac{(-1)^n\cdot n}{2^n}\cdot x^n+\frac{(-1)^n}{2^n}\cdot x^n\right].$$

令 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{2^n}x^n$，则

$$\int\frac{g(x)}{x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\cdot x^n=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2^2}x^2-\frac{1}{2^3}x^3+\cdots+\frac{(-1)^n}{2^n}x^n+\cdots$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}x}{1+\frac{1}{2}x}.$$

而$[g(x)]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n^2}{2^n}x^{n-1}$,故可得

$$s(x)=x\cdot[g(x)]'-g(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\cdot x^n,$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(n^2-n+1)}{2^n}=s(1)=\frac{22}{27}.$$

(3) 构造函数

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\cdot x^n.$$

令 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-1}\cdot\frac{x^n}{2^{n+1}}$, 则$\left[\frac{g(x)}{x}\right]'=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{2^{n+1}}$;

令 $h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{x^n}{2^{n+1}}$, 则$[h(x)\cdot x]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}$;

故可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=s(1)=g(1)-h(1)=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln2.$$

(4) 由于 $e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$,故有

$$e^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n!},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^{n-1}n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}(n-1)!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n\cdot n!}.$$

令 $s(x)=e^{\frac{1}{2}}\cdot x^{n+1}$,则

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n\cdot n!}x^n,$$

故可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^{n-1}n!}=1+s'(1)=\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}.$$

8. 将下列函数展开成 $x$ 的幂级数:

(1) $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$;　　(2) $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$.

**解**　(1) $f(x)=\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1-x)+\frac{1}{2}\arctan x-x$,故

$$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} - 1$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n} - 1$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n},$$

则可得

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}, (-1 < x < 1).$$

(2) 因为

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}.$$

$$= \frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2} = \frac{2}{2+2x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n},$$

$$f(0) = \frac{\pi}{4},$$

所以

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, (-1 < x < 1).$$

9. 求$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$.

**解** 因 $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}(1+\frac{1}{k})^{k^2}$ 是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$ 的部分和,$(1+\frac{1}{n})^n < \mathrm{e}$,故

$$\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2} < \frac{1}{3^n}\mathrm{e}^n = \left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^n.$$

又因$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^n$ 收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$ 收敛,于是 $s_n$ 有界,故$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = 0$.

10. 将函数 $f(x) = x(\pi - x)$ 在$[0,\pi]$上展开为正弦级数,并由此证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^2}{32}.$$

**解** 作奇延拓:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cdot (\pi - x) \cdot \sin nx = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1}{(2n-1)^3},$$

从而有

$$f(x)=x(\pi-x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3},$$

故可得

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\cdot(-1)^{n-1}\cdot\pi.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\cdot(-1)^{n-1}=\frac{\pi^2}{32}.$$

11. 设有方程 $x^n+nx-1=0$,其中 $n$ 为正整数,证明此方程存在唯一正实根 $x_n$,并证明当 $\alpha>1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.

**证明**　令 $f(x)=x^n+nx-1$,则

$$f'(x)=nx^{n-1}+n=n(x^{n-1}+1),f(0)=-1.$$

假设方程存在负实根 $x_n$,则

$$x_n^n=1-nx_n>1,$$

故 $n$ 为偶数且 $|x_n|>1$,但当 $x<-1$ 时,$f'(x)<0$.因此

$$f(-1)=(-1)^n-n-1<0,$$

与方程存在负实根矛盾,所以方程不存在负实根.

又因 $x>0$ 时,$f'(x)>0$,因此

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{1}{n}\right)^n+1-1>0,$$

故可知在$\left(0,\frac{1}{n}\right)$上存在方程的唯一正实根 $x_n$.

又因 $0<x_n<\frac{1}{n}$,所以

$$0<x_n^{\alpha}<\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}.$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.