第三章　积分及其应用

积分是微积分学的另一重要部分，它是微分运算的逆运算，包括不定积分和定积分. 定积分是对连续变化过程总效果的度量.

本章将由具体问题引入定积分的概念，并逐步介绍求积分方法，最后将积分法应用于实际.

§3.1　定积分的概念

实际生活中许多变量的变化是非均匀变化的，如非匀速直线运动在某时间段内的位移；变力使物体沿直线方向移动所作的功；非均匀线密度的细棒的质量等. 所有这些问题都可以归结为曲边梯形的面积问题.

3.1.1　问题举例

曲边梯形的面积　我们把由一条连续曲线 $y=f(x)$（$f(x)\geqslant 0$）和三条直线 $x=a$，$x=b$，$y=0$围成的图形叫**曲边梯形**. 如图 3-1 所示. 分析其面积.

我们以往的知识能够对规则图形求面积，如果曲边函数 $y=f(x)$是常数，则可以用矩形的面积公式求面积. 但 $y=f(x)\neq C$，显然不能直接用以往的公式求曲边梯形的面积. 如果我们将曲边梯形分割成若干个小曲边梯形，当小曲边梯形的宽度不大时，曲边的变化也就不大（连续函数），我们就可以将小曲边梯形的面积用小矩形的面积近似代替，如图 3-2 所示. 对于第 i 个小曲边梯形而言，面积

$$\triangle A_i\approx f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})\approx f(x_i)(x_i-x_{i-1}),$$

或者以小区间内部任一点 ξ_i 对应的函数值 $f(\xi_i)$为小矩形的高得出小曲边梯形面积 $\triangle A_i\approx f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$. 具体步骤如下：

(1)分割. 在区间$[a,b]$内任意插入 $n-1$ 个分点，使 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 把区间$[a,b]$分成 n 个小区间$[x_{i-1},x_i]$$(i=1,2,\cdots,n)$，小区间的长度为$\triangle x_i=x_i-x_{i-1}$. 则大曲边梯形被分割成 n 个小曲边梯形.

(2)取近似. 在区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，当每个小区间的长度很小时，小曲边梯形的面积$\triangle A_i$ 可以用小矩形的面积近似代替，即$\triangle A_i\approx f(\xi_i)\triangle x_i$.

(3)求和. 将所有的小曲边梯形面积相加，就得出大曲边梯形面积（近似值），即

$$A=\sum_{i=1}^{n}\triangle A_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\triangle x_i$$

(4)取极限. 小区间的宽度越小，近似程度就越高，当分割无限细密，每一个小区间的宽度都是无穷小量时，近似代替产生的误差也是无穷小量. 为了保证每一小区间的宽度都是无穷小量，取最大的一个小区间的长度为 $\lambda=\max\{\triangle x_i\}$$(i=1,2,\cdots,n)$，于是，当 $\lambda\to 0$

时，$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i \to A$，即

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i$$

因此，曲边梯形的面积可表示为一种特定的和式的极限，我们由此抽象出定积分的概念.

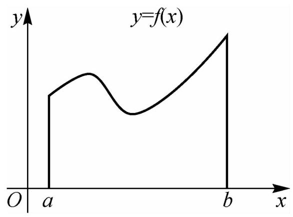

图 3-1

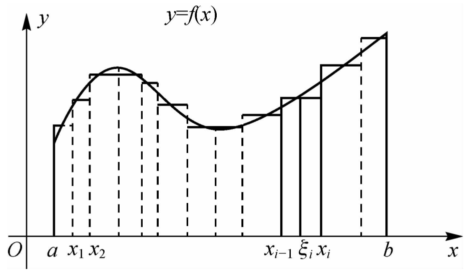

图 3-2

3.1.2　定积分的概念

1. 定积分的定义

设函数 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上有界，用分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 将区间$[a,b]$分成 n 个小区间$[x_{i-1},x_i]$$(i=1,2,\cdots,n)$，每个区间长度为$\triangle x_i=x_i-x_{i-1}$，其中 $\lambda=\max\{\triangle x_i\}$，在每一个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，如果极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i$ 存在，则称函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上是可积的，并称此极限为函数 $f(x)$在$[a,b]$上的定积分，记作$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i$$

其中，$\int$ 称为**积分号**，$f(x)$称为**被积函数**，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**，x 称为**积分变量**，a 称为**积分下限**，b 称为**积分上限**，$[a,b]$称为**积分区间**.

必须注意的是：定积分的值与被积函数和积分区间有关，与积分变量的符号无关，与区间的分割方法及 ξ_i 的取法无关. 例如

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

因此，上述曲边梯形的面积可以表示为 $A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$；对于变速直线运动 $v(t)$在时间段$[t_1,t_2]$内的位移可以表示为 $S=\int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t$；对于变力 $F(s)$作用于物体产生位移变化$[s_1,s_2]$过程中，变力 $F(s)$所作的功为 $W=\int_{s_1}^{s_2} F(s)\mathrm{d}s$.

特别规定：(1)当 $a=b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$；(2)当 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

2. 几何意义

(1)如果在$[a,b]$上被积函数 $f(x)\geqslant 0$,根据定积分的定义及曲边梯形面积的计算过程可知,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在数量上表示由曲线 $y=f(x)$和直线 $x=a,x=b$,以及 $y=0$ 围成的曲边梯形的面积,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A$,如图 3-3 所示.

(2)如果在$[a,b]$上被积函数 $f(x)\leqslant 0$,则积分定义中的和式的每一项 $f(\xi_i)\triangle x_i$ 在数量上与小矩形的面积相反,因此 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i$ 也和曲边梯形面积的近似值相反,即 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i$ 在数量上与曲边梯形面积相反,有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-A$,如图 3-4 所示.

(3)如果函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的函数值在正负之间变化,那么区间$[a,b]$上的定积分在数量上等于各曲边梯形面积的代数和,即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A_1-A_2+A_3$,如图 3-5 所示.

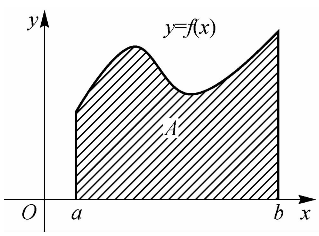

图 3-3

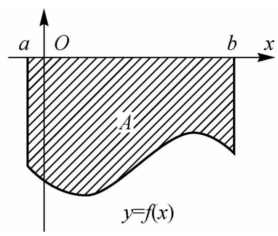

图 3-4

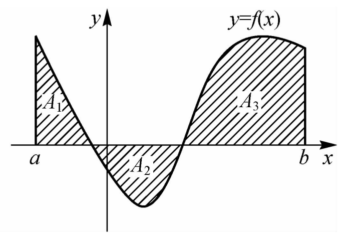

图 3-5

3.1.3　定积分的运算性质

根据定积分的定义及几何意义不难理解和证明如下几个常用的定积分的运算性质:

性质 3-1　$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

性质 3-2　$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

性质 3-3　$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

性质 3-4　如果在区间$[a,b]$上恒有 $f(x)\leqslant g(x)$,则有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

其中对于性质 3-3,如果 $a<c<b$,其几何理解如图 3-6 所示,$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 分别表示两个小阴影部分的面积,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 所示大阴影部分的面积;如果 c 在 a,b 之外,我们不妨设 $a<b<c$,则

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

对于性质 3-4,我们分析 $f(x)\geqslant 0,g(x)\geqslant 0$ 的情况,其几何理解如图 3-7 所示,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示阴影部分的面积,总不大于以 $y=g(x)$为曲边的曲边梯形的面积. 其他情况可得同样的结论.

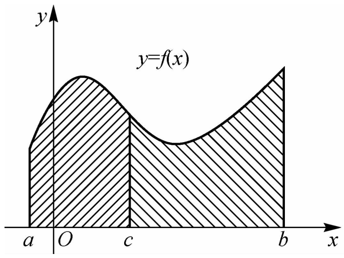

图 3-6

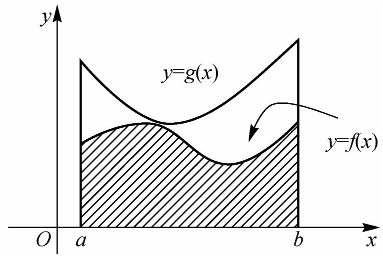

图 3-7

练习 3-1

1. 填空题.

(1)某物体以速度 $v=\dfrac{1}{2}gt$(m/s)作自由落体运动,该物体运动 10 s 后所经过的路程用定积分可以表示为__________.

(2) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^4 \ln x \mathrm{d}x$ 的符号是__________.

(3) 若函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续,且 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 1$,则 $\int_{-1}^{1}[2f(x)+1]\mathrm{d}x = $ ________.

(4) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\sin x| \mathrm{d}x = $ __________ + __________.

2. 选择题.

(1) 定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是__________.

(A) 一个常数　　(B) 一个函数族

(C) $f(x)$ 的一个原函数　　(D) 一个非负常数

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ 的值为__________.

(A) 小于 0　　(B) 大于 0

(C) 等于 0　　(D) 不能确定

(3) 下列不等式中,成立的是__________.

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} x \mathrm{d}x$　　(B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} x \mathrm{d}x$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x$　　(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x$

(4) 设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a$,$x=b$ 及 x 轴所围成的平面图形的面积等于__________.

(A) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$　　(B) $\int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$

(C) $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$　　(D) $f'(\xi)(b-a)$

3. 利用定积分的几何意义说明下列定积分等式.

(1)$\int_0^1 2x\mathrm{d}x = 1$；　　(2)$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}R^2(R > 0)$；

(3)$\int_{-1}^1 x^3\mathrm{d}x = 0$；　　(4)$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x$.

§3.2　微积分学基本公式

定积分定义为一种和式的极限，如果用定义直接求定积分，运算将会相当复杂，对于比较复杂的被积函数，如果用定义直接求定积分几乎是不可能的. 下面我们寻求定积分的计算方法.

根据上一节分析我们知道，变速直线运动 $v(t)$在时间段$[t_1,t_2]$内的位移可以用积分$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t$ 来表示；另一方面，时间段$[t_1,t_2]$内的位移也可以用位移的增量 $s(t_2)-s(t_1)$来表示，即

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t = s(t_2) - s(t_1)$$

根据导数的意义，我们知道 $s'(t)=v(t)$. 即被积函数 $v(t)$在区间$[t_1,t_2]$上的定积分等于它的一个原函数在区间$[t_1,t_2]$上的改变量. 下面我们分析其普遍性.

3.2.1　积分上限函数

定义 3-1　设函数 $f(t)$在区间$[a,b]$上连续，对于$[a,b]$上的任一点 x，由于 $f(t)$在$[a,x]$上连续，则定积分$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 存在. 于是$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是一个关于变量 x 的函数，称为**积分上限函数**，记作 $\Phi(x)$，即 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad (a\leqslant x\leqslant b)$.

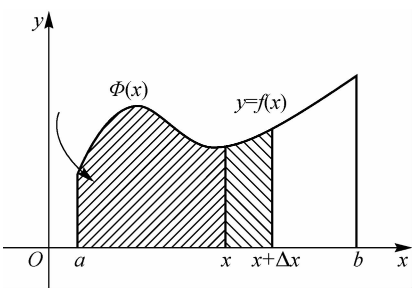

图 3-8

定理 3-1　如果函数 $f(t)$在区间$[a,b]$上连续，则积分上限函数可导，且

$$\Phi'(x)=\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]_x'=f(x) \quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

证　要求 $\Phi(x)$的导数，即是求函数在区间$[a,b]$上任意点处的瞬时变化率 $\lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle \Phi}{\triangle x}$.

如图 3-8 所示，当自变量由 x 变化到 $x+\triangle x$ 时，不妨设$\triangle x>0$，

$$\begin{aligned}\triangle\Phi(x)&=\Phi(x+\triangle x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\triangle x} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_x^{x+\triangle x} f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

如果 $f(t)\geqslant 0$，$\int_x^{x+\triangle x} f(t)\mathrm{d}t$ 表示一个宽度为$\triangle x$ 小曲边梯形的面积，当$\triangle x$ 很小时，可以用小矩形的面积 $f(x)\triangle x$ 近似代替曲边梯形的面积，当$\triangle x\to 0$ 时，$\triangle\Phi(x)=\int_x^{x+\triangle x} f(t)\mathrm{d}t\to f(x)\triangle x$，于是$\frac{\triangle\Phi(x)}{\triangle x}\to f(x)(\triangle x\to 0)$，即

$$\Phi'(x)=\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]'=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle\Phi(x)}{\triangle x}=f(x)$$

这说明，积分上限函数 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是被积函数的一个原函数，如果有 $F'(x)=f(x)$，则一定有 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)+C_0$，当 $x=a$ 时，得 $C_0=-F(a)$，即

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)-F(a)$$

必须注意的是：(1)当 $x\to a$ 时 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)-F(a)\to 0$；(2)如果有 $F'(x)=f(x)$，则有 $\int_a^u f(t)\mathrm{d}t=F(u)-F(a)$. 其中变量 u 可以是自变量，也可以是中间变量.

例 3-1　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t\mathrm{d}t}{x^2}$.

分析　此极限属于$\dfrac{0}{0}$型未定式，可以考虑用罗必达法则求极限. 其中$\left(\int_0^x \sin t\mathrm{d}t\right)'_x=\sin x$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t\mathrm{d}t}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x \sin t\mathrm{d}t\right)'_x}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

3.2.2　微积分学基本公式

根据上述定理，积分上限函数是被积函数的一个原函数，即 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)-F(a)$，如果将变上限取定值 $x=b$，即得**微积分学基本公式：**

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(b)-F(a)=[F(x)]_a^b \tag{3-1}$$

此公式也称为**牛顿-莱布尼兹公式**. 它反映了定积分与被积函数的原函数之间的关系，也为我们计算定积分提供了一条便捷的途径，即要计算连续函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的定积分，只需求出被积函数 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$ 在区间$[a,b]$上的改变量$[F(x)]_a^b$ 即可.

必须注意的是：牛顿－莱布尼兹公式适用的条件，必须是被积函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续.

例 3-2　求函数 $y=\sin x$ 在区间$[0,\pi]$上与 x 轴所围成的图形的面积.

分析　由定积分的几何意义可知，所求面积等于正弦函数在区间$[0,\pi]$上的定积分，即 $A=\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x$ ，因为，$(-\cos x)'=\sin x$，所以定积分可求.

解　$A=\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x=[-\cos x]_0^\pi=-\cos\pi+\cos 0=2$.

例 3-3　计算 $\int_0^1 (x^2+2^x)\mathrm{d}x$.

分析　因为$\left(\dfrac{x^3}{3}\right)'=x^2$，$\left(\dfrac{2^x}{\ln 2}\right)'=2^x$.

解　$\int_0^1 (x^2+2^x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_0^1 2^x\mathrm{d}x=\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\dfrac{2^x}{\ln 2}\right]_0^1=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\ln 2}$.

例 3-4　计算 $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

分析　被积函数 $\frac{x^2}{1+x^2}$ 的原函数不易直接求出，如果作适当的变形，即 $\frac{x^2}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2}$，则能求积分，其中 $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$.

解

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{d}x-\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=[x]_0^1-[\arctan x]_0^1$$

$$=1-\arctan 1+\arctan 0=1-\frac{\pi}{4}.$$

练习 3-2

1. 填空题.

(1) 设函数 $f(x)$ 在 R 内连续，则 $\int f(x)\mathrm{d}x-\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=$ __________.

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^1 \sin x^3\mathrm{d}x=$ __________；$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin x^3\mathrm{d}x=$ __________；$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^0 \sin x^3\mathrm{d}x=$ ________；

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2} \sin x^3\mathrm{d}x=$ __________；$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{x^2} \sin x^3\mathrm{d}x=$ __________.

(4) 若连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\ln(1+x^2)$，则 $f(x)=$ __________.

(5) 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\arctan x\mathrm{d}x$，则 $f'(x)=$ __________.

(6) 若连续函数 $f(x)=x^2-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$ __________.

(7) 设 $\int_0^a x^2\mathrm{d}x=9$，则 $a=$ __________.

2. 选择题.

(1) 不能直接使用微积分学的基本公式的是__________.

(A) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$　　(B) $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^4 \frac{x}{(x^{\frac{3}{2}}-27)^2}\mathrm{d}x$　　(D) $\int_{\mathrm{e}}^3 \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$

(2) 设 $\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x}$，则 $f(x)$ __________.

(A) e^{2x}　　(B) $2\mathrm{e}^{2x}$　　(C) $2x\mathrm{e}^{2x-1}$　　(D) $2x\mathrm{e}^{2x}$

(3) 定积分 $\int_3^6 f'(x)\mathrm{d}x=$ __________.

(A) $f(6)-f(3)$　　(B) $3\left[f(2)-f(1)\right]$

(C) $\frac{1}{3}\left[f(2)-f(1)\right]$　(D) $f'(6)-f'(3)$

3. 求下列各极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t}{\int_0^x \dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{2x}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t}{x^2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t}{x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{2x}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t}{1-\cos x}$.

4. 计算下列定积分.

(1) $\int_1^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

§3.3　不定积分

由牛顿-莱布尼兹公式可知,求连续函数的定积分的便捷方法是求被积函数的一个原函数在积分区间上的改变量,因此,求原函数对定积分计算有着重要意义. 有关原函数的问题,就是本节要讨论的不定积分.

3.3.1　不定积分的概念

由导数运算公式和法则我们知道,在某区间 I 上,如果有 $F'(x)=f(x)$,则有$[F(x)+C]'=F'(x)+C'=f(x)$(C 为常数). 对于函数 $f(x)$,如果它有一个原函数 $F(x)$,则它就有无穷多个原函数 $F(x)+C$,并且这些原函数之间相差一个常数.

1. 不定积分的定义

在区间 I 上,如果 $F'(x)=f(x)$,则称 $F(x)+C$ 为函数 $f(x)$在区间 I 上的**不定积分**,记作$\int f(x)\mathrm{d}x$,即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

其中$\int$ 称为**不定积分号**,$f(x)$称为**被积函数**,$f(x)\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**,x 称为**积分变量**,C 称为**积分常量**.

必须注意的是:(1)不定积分运算和导数(微分)运算互为逆运算;(2)不定积分是被积函数的一个原函数加任意常数.

2. 不定积分的运算性质

性质 3-5　在区间 I 上,如果 $F'(x)=f(x)$,$G'(x)=g(x)$,则有

(1) $\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$.

(2) $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$.

3.3.2　基本积分公式

由基本初等函数的导数公式,我们可以推导出下列基本积分公式表,如表 3-1 所示.

表 3-1

$F'(x)=f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$
$(kx)'=k$	$\int k\mathrm{d}x=kx+C$
$\dfrac{(x^{a+1})'}{a+1}=x^{a}(\alpha\neq -1)$	$\int x^{a}\mathrm{d}x=\dfrac{x^{a+1}}{\alpha+1}+C$
$(\ln\|x\|)'=\dfrac{1}{x}$	$\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln\|x\|+C$
$\dfrac{(a^{x})'}{\ln a}=a^{x}$	$\int a^{x}\mathrm{d}x=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C$
$(\mathrm{e}^{x})'=\mathrm{e}^{x}$	$\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C$
$(\sin x)'=\cos x$	$\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$
$-(\cos x)'=\sin x$	$\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$
$(\tan x)'=\sec^{2}x$	$\int \sec^{2}x\mathrm{d}x=\tan x+C$
$-(\cot x)'=\csc^{2}x$	$\int \csc^{2}x\mathrm{d}x=-\cot x+C$
$(\sec x)'=\sec x\tan x$	$\int \sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$
$-(\csc x)'=\csc x\cot x$	$\int \csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$
$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C$
$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^{2}}$	$\int \dfrac{1}{1+x^{2}}\mathrm{d}x=\arctan x+C$

3.3.3　基本积分法

1. 直接积分法

通过简单的变形和积分运算性质，就能将被积函数变成积分公式的类型求积分，这种方法称为直接积分法.

例 3-5　求 $\int 2^{x}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$.

解　$\int 2^{x}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\int (2\mathrm{e})^{x}\mathrm{d}x=\dfrac{(2\mathrm{e})^{x}}{\ln 2\mathrm{e}}+C.$

例 3-6　求 $\int \dfrac{x^{4}}{1+x^{2}}\mathrm{d}x$.

解

$$\int \frac{x^{4}}{1+x^{2}}\mathrm{d}x=\int \frac{(x^{4}-1)+1}{1+x^{2}}\mathrm{d}x=\int \left(x^{2}-1+\frac{1}{1+x^{2}}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x^{3}}{3}-x+\arctan x+C.$$

例 3-7　求$\int \frac{x^2+3x+1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

解　$$\int \frac{x^2+3x+1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int \frac{(x^2+1)+3x}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int \left(\frac{1}{x}+\frac{3}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\ln|x|+3\arctan x+C.$$

例 3-8　求$\int \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{x}\mathrm{d}x$.

解　$$\int \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{x}\mathrm{d}x=\int \frac{1-x}{x}\mathrm{d}x=\int \left(\frac{1}{x}-1\right)\mathrm{d}x$$
$$=\ln|x|-x+C.$$

例 3-9　求$\int \sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$.

解　$$\int \sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{2}(1-\cos x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int (1-\cos x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\int \mathrm{d}x-\int \cos x\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{1}{2}(x-\sin x)+C.$$

2. 第一换元积分法(凑微分法)

例 3-10　求$\int \cos 2x\mathrm{d}x$.

分析　此积分和公式中的类型$\int \cos u\mathrm{d}u$相似，但有区别，不能直接用公式求积分，应作适当变形，使积分变量变为 $2x$，于是将被积表达式变成公式的类型.

解　$$\int \cos 2x\mathrm{d}x=\int \cos 2x\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}\int \cos 2x\mathrm{d}(2x)$$
$$\xlongequal{\text{令 }2x=u}\frac{1}{2}\int \cos u\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\sin u+C$$
$$\xlongequal{u=2x}\frac{1}{2}\sin 2x+C.$$

检验　$\left(\frac{1}{2}\sin 2x+C\right)'=\cos 2x$.

定理 3-2　如果$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，且 $u=\varphi(x)$可导，则
$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)$$
$$\xlongequal{\text{令 }\varphi(x)=u}\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C$$
$$\xlongequal{u=\varphi(x)}F[\varphi(x)]+C.$$

这种通过凑复合函数 $f[\varphi(x)]$的中间变量 $\varphi(x)$的微分，将被积表达式变成可求积分的类型的方法叫**凑微分法**，也叫**第一换元积分法**.

例 3-11　求$\int \frac{1}{3x+1}\mathrm{d}x$.

分析　此积分和公式中的积分类型$\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u$类似，但有区别，可将 $3x+1$ 当作中间变量，

其微分易凑.

解 $\int \frac{1}{3x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{3x+1}\cdot 3\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{3x+1}\cdot (3x+1)'\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{3x+1}\mathrm{d}(3x+1)$

$$\xlongequal{3x+1=u} \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\ln|u| + C$$

$$\xlongequal{u=3x+1} \frac{1}{3}\ln|3x+1| + C.$$

例 3-12　求 $\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$.

分析　此积分的被积函数因子 e^{x^2} 是复合函数,其中间变量的导数为 $2x$,而另一因子与 $2x$ 有关系.

解 $\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{x^2}\cdot(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{x^2}(x^2)'\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2)$

$$\xlongequal{令\ x^2=u} \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^u\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\mathrm{e}^u + C$$

$$\xlongequal{u=x^2} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + C.$$

当然,如果熟悉了凑微分的过程和形式,可以不作换元,也就无需回代变量 u,从而使运算过程简洁. 如上例

$$\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{x^2}\cdot(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{x^2}(x^2)'\mathrm{d}x \quad (中间变量\ x^2=u\ 不必写出)$$

$$= \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{(x^2)}d(x^2) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + C.$$

例 3-13　求 $\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}(\sqrt{x})'\mathrm{d}x = 2\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}(\sqrt{x}) = 2\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + C.$

从上面的例子中可以看出凑微分法需要较灵活的技巧,对于不同的积分应采用不同的凑法. 下面是凑微分法常用的一些公式:

(1) $\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$　　(其中 a,b 为常数,$a\neq 0$).

(2) $\int xf(x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int f(x^2)\mathrm{d}(x^2)$.

(3) $\int \frac{1}{x}f(\ln x)\mathrm{d}x = \int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)$.

(4) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})\mathrm{d}x = 2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}(\sqrt{x})$.

(5) $\int \frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})\mathrm{d}x = -\int f(\frac{1}{x})\mathrm{d}(\frac{1}{x})$.

(6) $\int \mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x = \int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$.

(7) $\int \sin x f(\cos x)\mathrm{d}x = -\int f(\cos x)\mathrm{d}(\cos x)$.

(8) $\int \cos x f(\sin x)\mathrm{d}x = \int f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x)$.

(9) $\int \frac{1}{\cos^2 x} f(\tan x)\mathrm{d}x = \int f(\tan x)\mathrm{d}(\tan x)$.

(10) $\int \frac{1}{\sin^2 x} f(\cot x)\mathrm{d}x = -\int f(\cot x)\mathrm{d}(\cot x)$.

(11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(\arcsin x)\mathrm{d}x = \int f(\arcsin x)\mathrm{d}(\arcsin x)$.

或 $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(\arccos x)\mathrm{d}x = -\int f(\arccos x)\mathrm{d}(\arccos x)$.

(12) $\int \frac{1}{1+x^2} f(\arctan x)\mathrm{d}x = \int f(\arctan x)\mathrm{d}(\arctan x)$.

或 $\int \frac{1}{1+x^2} f(\operatorname{arccot} x)\mathrm{d}x = -\int f(\operatorname{arccot} x)\mathrm{d}(arc\cot x)$.

总之，凑微分的关键在于将积分 $\int g(x)\mathrm{d}x$ 问题化为 $\int f(u)\mathrm{d}u$ 的形式，再应用积分公式求得积分.

下面我们使用凑微分推导一些常用的积分公式.

例 3-14　求 $\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$.

分析　此积分和公式中的类型 $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 类似，但有区别，不能直接求积分.

解

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\frac{1}{a}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\left(\frac{x}{a}\right)'\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right) \\ &= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.\end{aligned}$$

即

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

同理可得

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a}+C \qquad (a>0).$$

$$\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|+C.$$

$$\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x|+C.$$

$$\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x+\tan x|+C.$$

$$\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x-\cot x|+C.$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C \qquad (a\neq 0).$$

例 3-15 求$\int \sin^3 x\mathrm{d}x$.

分析 此积分可以使用凑微分求解，注意与$\int \sin^2 x\mathrm{d}x$解法的差异.

解 $\int \sin^3 x\mathrm{d}x=\int \sin^2 x\cdot \sin x\mathrm{d}x=-\int (1-\cos^2 x)\mathrm{d}\cos x$

$$=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C.$$

3. 第二换元积分法

例 3-16 求$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

分析 此积分和公式中的类型$\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u$类似，只是分母中含有根式，可以通过变量代换去掉根号，即令$\sqrt{x}=t$，则$x=t^2$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

解 $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x \xlongequal{令\sqrt{x}=t} \int \frac{1}{1+t}\mathrm{d}(t^2)=\int \frac{2t}{1+t}\mathrm{d}t=2\int \frac{t+1-1}{1+t}\mathrm{d}t$

$$=2\int \mathrm{d}t-2\int \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t=2t-2\ln|1+t|+C$$

$$\xlongequal{t=\sqrt{x}}2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C.$$

检验 $\left(2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C\right)'=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{2}{1+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{1+\sqrt{x}}$.

显然，这种求积分的方法是通过变量代换引入一个新的函数，使被积表达式变换成可求积分的类型.

定理 3-3 设$x=\varphi(t)$是单调可导的函数，如果$f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$可积，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t, \qquad (t=\varphi^{-1}(x))$$

其中$t=\varphi^{-1}(x)$是$x=\varphi(t)$的反函数.

这种通过变量代换求积分的方法称为**第二换元积分法**.

必须注意的是：(1)第一换元和第二换元积分法的目的都是为了使被积表达式转化为可求积分的类型；(2)第一换元积分法求积分过程中，如果不写出中间变量，求出积分的结论就无需回代变量；第二换元积分法则不能省略中间变量的代换.

例 3-17 求$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\mathrm{d}x$.

分析 此积分被积表达式中含有根式，可以通过换元去掉根号，即令$\sqrt[3]{3x+1}=t$，则$x=\frac{t^3-1}{3}$，$\mathrm{d}x=t^2\mathrm{d}t$.

解 设$\sqrt[3]{3x+1}=t$，则$x=\frac{t^3-1}{3}$，$\mathrm{d}x=t^2\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int (t^4+2t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left(\frac{t^5}{5}+t^2\right)+C=\frac{t^2}{3}\left(\frac{t^3}{5}+1\right)+C$$

$$=\frac{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}{5}(x+2)+C.$$

例 3-18　求 $\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x.$

分析　此积分被积表达式中含有两个根式，可以通过换元（令 $\sqrt[6]{x}=t$）同时去掉两个根号.

解　设 $\sqrt[6]{x}=t$，则 $x=t^6$，$\sqrt{x}=t^3$，$\sqrt[3]{x}=t^2$，$\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=\int\frac{6t^5}{t^3+t^2}\mathrm{d}t=6\int\frac{t^3}{t+1}\mathrm{d}t=6\int\frac{(t^3+1)-1}{t+1}\mathrm{d}t=6\int(t^2-t+1-\frac{1}{t+1})\mathrm{d}t$$

$$=6(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|)+C=2t^3-3t^2+6t-6ln|t+1|+C$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C.$$

例 3-19　求 $\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\quad(a>0).$

分析　此积分类型公式表中没有类似的形式，我们考虑将根式代换成有理式求积分，利用三角公式 $\sin^2t+\cos^2t=1$ 进行代换.

解　令 $x=a\sin t$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$，那么 $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2t}=a\cos t$，$\mathrm{d}x=\mathrm{d}a\sin t=a\cos t\mathrm{d}t$，于是

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{令 x=a\sin t}\int a\cos t d a\sin t=a^2\int\cos^2t\mathrm{d}t$$

$$=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\left[\int\mathrm{d}t+\int\cos 2t\mathrm{d}t\right]=\frac{a^2}{2}\left[\int\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int\cos 2t d2t\right]$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]+C=\frac{a^2}{2}[t+\sin t\cos t]+C$$

$$\xlongequal{t=\arcsin\frac{x}{a}}\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

关于回代变量 t 的公式，可以借助于直角三角形的边角关系，如图 3-9 所示.

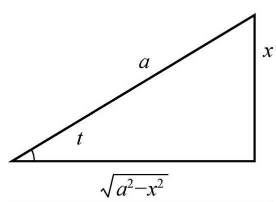

图 3-9

例 3-20　求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}\qquad(a>0).$

分析　利用三角公式 $\tan^2t+1=\sec^2t$ 进行代换，将根式代换成有理式求积分.

解　令 $x=a\tan t$，$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则 $\sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2\tan^2t+a^2}=\sqrt{a^2\sec^2t}=a\sec t$，$\mathrm{d}x=$

$\mathrm{d}a\tan t=a\sec^2 t\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\mathrm{d}t=\int\sec t\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+C_1.$$

由 $\tan t=\dfrac{x}{a}$，得 $\sec t=\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$，所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right|+C_1=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C.$$

例 3-21　求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$　　$(a>0)$.

分析　利用三角公式 $\tan^2 t=\sec^2 t-1$ 进行代换，将根式代换成有理式求积分.

解　当 $x>a$ 时，令 $x=a\sec t$，$0<t<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\sec^2 t-a^2}=\sqrt{a^2\tan^2 t}=a\tan t$，$\mathrm{d}x=\mathrm{d}a\sec t=a\sec t\tan t\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{a\sec t\tan t}{a\tan t}\mathrm{d}t=\int\sec t\mathrm{d}t=\ln(\sec t+\tan t)+C_1$$

由 $\sec t=\dfrac{x}{a}$，得 $\tan t=\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$，所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)+C_1=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$$

当 $x<-a$ 时，令 $x=-u$，则 $u>a$，由上面结果有

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}&=-\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-a^2}}=-\ln(u+\sqrt{u^2-a^2})+C_2\\&=\ln\frac{-x-\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}+C_2\\&=\ln(-x-\sqrt{x^2-a^2})+C\end{aligned}$$

综上所述，有 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C.$

以上三例都是用三角函数进行变量代换而求得的，故称它们为三角代换. 现将其归纳如下：

(1)被积函数含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ 时，令 $x=a\sin t$.

(2)被积函数含有 $\sqrt{a^2+x^2}$ 时，令 $x=a\tan t$.

(3)被积函数含有 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时，令 $x=a\sec t$.

4. 分部积分法

根据积的求导数法则，如果 u，v 可导，则 $(uv)'=u'v+uv'$，移项得 $uv'=(uv)'-u'v$，等式两边变量的不定积分相同，有

$$\int uv'\mathrm{d}x=\int u\mathrm{d}v=\int(uv)'\mathrm{d}x-\int u'v\mathrm{d}x=uv-\int v\mathrm{d}u$$

即

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$$

必须注意的是:(1)分部积分法针对特点是,当被积函数 u 与积分变量 v 互换后的积分易求,即 $\int v\mathrm{d}u$ 比 $\int u\mathrm{d}v$ 易求;(2)对于被积函数为积的类型的积分,如果不能直接求积分或使用凑微分法求积分,可以考虑被积函数的部分因子凑微分,使积分变成 $\int u\mathrm{d}v$ 的形式,再尝试分部积分法.

例 3-22　求 $\int x\cos x\mathrm{d}x$.

分析　被积函数为幂函数与弦函数的乘积的类型,可以使用分部积分法.

解　$$\int x\cos x\mathrm{d}x=\int x(\sin x)'\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}(\sin x)$$
$$=x\sin x-\int\sin x\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C.$$

例 3-23　求 $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

分析　被积函数为幂函数与指数函数的乘积的类型,可以使用分部积分法.

解　$$\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^x=x^2\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x^2=x^2\mathrm{e}^x-2\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x^2\mathrm{e}^x-2\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x$$
$$=x^2\mathrm{e}^x-2(x\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x)=x^2\mathrm{e}^x-2(x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x)+C$$
$$=(x^2-2x+2)\mathrm{e}^x+C.$$
在计算过程中,有时需要多次使用分部积分法.

例 3-24　求 $\int x^2\ln x\mathrm{d}x$.

分析　被积函数为幂函数与对数函数的乘积的类型,可以使用分部积分法.

解　$$\int x^2\ln x\mathrm{d}x=\int\ln x\mathrm{d}\frac{x^3}{3}=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\mathrm{d}\ln x=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}$$
$$=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+C.$$

例 3-25　求 $\int x\arctan x\mathrm{d}x$.

分析　被积函数为幂函数与反三角函数的乘积的类型,可以使用分部积分法.

解　$$\int x\arctan x\mathrm{d}x=\int\arctan x\mathrm{d}\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{x^2}{2}\mathrm{d}\arctan x$$
$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

例 3-26　求 $\int\ln x\mathrm{d}x$.

分析　被积函数为单一对数函数的类型,直接使用分部积分法.

解　$\int \ln x \mathrm{d}x = x\ln x - \int x \mathrm{d}\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x = x\ln x - \int \mathrm{d}x$

$= x\ln x - x + C.$

例 3-27　求 $\int \arcsin x \mathrm{d}x$.

分析　被积函数为单一反三角函数的类型,直接使用分部积分法.

解　$\int \arcsin x \mathrm{d}x = x\arcsin x - \int x \mathrm{d}\arcsin x = x\arcsin x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

例 3-28　求 $\int \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x$.

分析　被积函数为 $\mathrm{e}^{\lambda x}\sin\alpha x$,$\mathrm{e}^{\lambda x}\cos\beta x$ 的类型,可以使用两次分部积分法,通过解方程得到.

解　$\int \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x = \int \sin x \mathrm{d}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}\sin x = \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cos x \mathrm{d}x$

$$= \mathrm{e}^x \sin x - \int \cos x \mathrm{d}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \sin x - \left(\mathrm{e}^x \cos x - \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}\cos x\right)$$

$$= \mathrm{e}^x \sin x - \mathrm{e}^x \cos x - \int \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x$$

等式两边出现所求的 $\int \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x$,移项,得

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + C.$$

在进行积分计算时,往往换元积分法与分部积分法兼用,并无固定模式.

例 3-29　求 $\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

分析　先用换元积分法,再用分部积分法.

解　设 $\sqrt{x}=t$,则 $x=t^2$,$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$,于是

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^t \cdot 2t\mathrm{d}t = 2\int t\mathrm{d}\mathrm{e}^t = 2\left(t \cdot \mathrm{e}^t - \int \mathrm{e}^t \mathrm{d}t\right)$$

$$= 2(t \cdot \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t) + C = 2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C.$$

例 3-30　求 $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$.

解　设 $\ln x=t$,则 $x=\mathrm{e}^t$,$\mathrm{d}x=\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$,于是

$$\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x = \int \sin t \cdot \mathrm{e}^t \mathrm{d}t$$

利用例 3-28 的结果,有

$$\int \sin t \cdot \mathrm{e}^t \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t(\sin t - \cos t) + C$$

从而 $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\ln x}\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + C = \frac{x}{2}\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + C.$

练习 3-3

1. 填空题.

(1)设 x^3 为 $f(x)$的一个原函数,则 $\mathrm{d}f(x)=$__________.

(2) $\int f'(3x)\mathrm{d}x=$ __________.

(3) 已知$\int f(x)\mathrm{d}x=\sin^2 x+C$,则 $f(x)=$ __________.

(4) 设 $f(x)$ 有一原函数$\frac{\sin x}{x}$,则$\int xf'(x)\mathrm{d}x=$ __________.

(5)$\int \sin^3 x\mathrm{d}x=$ __________.

(6)$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$ __________.

(7)$\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x}\mathrm{d}x=$ __________.

(8) 设 $f(x)$ 为连续函数,则$\int f^2(x)f'(x)\mathrm{d}x=$ __________.

(9) 已知$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$,则$\int \frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=$ __________.

2. 选择题.

(1) 设 $f(x)$ 是可导函数,则$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=$ __________.

(A)$f(x)$　　(B)$f(x)+C$

(C)$f'(x)$　　(D)$f'(x)+C$

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数,且$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$,则下列各式正确的是__________.

(A)$\int f(x^2)\mathrm{d}x=F(x^2)+C$　　(B)$\int f(3x+1)\mathrm{d}x=F(3x+1)+C$

(C)$\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=F(\mathrm{e}^x)+C$　　(D)$\int f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=F(\ln x)+C$

(3)$\int \left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\mathrm{d}x=$ __________.

(A) $\frac{1}{1+x^2}$　　(B) $\frac{1}{1+x^2}+C$

(C)$\arctan x$　　(D)$\arctan x+C$

(4) 若 $f'(x)=g'(x)$,则下列式子一定成立的是__________.

(A)$f(x)=g(x)$　　(B)$\int \mathrm{d}f(x)=\int \mathrm{d}g(x)$

(C)$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=\left(\int g(x)\mathrm{d}x\right)'$　　(D)$f(x)=g(x)+1$

(5)$\int \left[f(x)+xf'(x)\right]\mathrm{d}x=$ __________.

(A)$f(x)+C$　　(B)$f'(x)+C$

(C)$xf(x)+C$　　(D)$f^2(x)+C$

3. 已知 $f'(\mathrm{e}^x)=1+x$,求 $f(x)$.

4. 已知 $f(x)$ 的原函数为 $\ln^2 x$,求$\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

5. 某商品的需求量 Q 为价格 P 的函数,该商品的最大需求量为 1 000,已知需求量的变化率为 $Q'(P)=-1\,000\ln 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^P$,求该商品的需求函数.

6. 一物体由静止开始运动,t 秒末的速度是 $3t^2$(m/s),问:

(1) 在 3 s 末物体与出发点之间的距离是多少?

(2) 物体走完 27 000 m 需多少时间?

§3.4　定积分的换元积分法与分部积分法

上节我们讨论了不定积分,解决了被积函数的原函数问题,再结合牛顿—莱布尼兹公式,就可以解决定积分的计算.下面再看两个例子.

例 3-31　求 $\int_{-1}^{2}|x|\mathrm{d}x$.

分析　因为被积函数 $|x|$ 在区间$[-1,2]$上是分段函数,即 $|x|=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x<0\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$,应分段求积分.

解　$$\int_{-1}^{2}|x|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}-x\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}x\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{0}x\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}x\mathrm{d}x=-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2}$$
$$=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}.$$

例 3-32　求 $\int_{0}^{\pi}\sqrt{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

分析　因为被积函数 $\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|$ 也是分段函数,即

$$|\cos x|=\begin{cases}\cos x, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\\ -\cos x, & \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$$

应分段求积分.

解　$$\int_{0}^{\pi}\sqrt{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\pi}|\cos x|\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)\mathrm{d}x$$
$$=\Big[\sin x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2.$$

在第二节中,我们已经看到,牛顿—莱布尼兹公式将定积分的计算问题归结为求原函数(或不定积分)问题,因此,不定积分中用以求原函数的两种方法——换元积分法与分部积分法,同样可以在定积分中应用.下面分别讨论,并请读者注意这两种方法在用法上与不定积分的异同.

3.4.1　定积分的换元积分法

定理 3-4　设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续,函数 $x=(t)$满足以下条件:

(1)$\varphi(a)=\alpha,\varphi(b)=\beta$;

(2)$\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$(或$[\beta,\alpha]$)上具有连续导数,且其对应的值域不超出区间$[a,b]$,则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

必须注意的是:(1)从左边到右边应用上述公式时,相当于不定积分的第二类换元积分法.计算时,用代换 $x=\varphi(t)$把原积分变量 x 换成新变量 t 时,积分上下限必须换成相应于新变量 t 积分上下限,但最后不必像不定积分那样变量回代;(2)从右边到左边应用上述公式时,相当于不定积分的凑微分法.计算时,如果不引入新的积分变量,则原积分上下限不变.

例 3-33　求$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

解　令 $x=a\sin t$,则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$,

当 $x=0$ 时,$t=0$;当 $x=a$ 时,$t=\frac{\pi}{2}$,于是

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x &=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot a\cos t\mathrm{d}t=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t\\ &=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t+\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t+\frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\mathrm{d}2t\\ &=\frac{a^2}{2}[t]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{a^2}{4}[\sin 2t]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}.\end{aligned}$$

事实上,我们可以通过定积分的几何意义得知上述积分在数量上等于半径为 a 的圆的四分之一面积.

例 3-34　求$\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$.

解　令 $\sqrt{2x+1}=t$,则 $x=\frac{t^2-1}{2}$,$\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$.当 $x=0$ 时,$t=1$;当 $x=4$ 时,$t=3$,于是

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x &=\int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}t\,\mathrm{d}t=\int_1^3\frac{t^2+3}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_1^3(t^2+3)\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{2}\int_1^3 t^2\mathrm{d}t+\frac{3}{2}\int_1^3\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^3+\frac{3}{2}[t]_1^3=\frac{22}{3}.\end{aligned}$$

例 3-35　证明:

(1)若 $f(x)$在$[-a,a]$上连续且为偶函数,则$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

(2)若 $f(x)$在$[-a,a]$上连续且为奇函数,则$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=0$.

证明　根据定积分的积分区间具有可加性,得

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

对上式右边第一个积分,令 $x=-t$ 得

$$\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^0 f(-t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(-t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(-x)\mathrm{d}x$$

于是

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(-x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a[f(-x)+f(x)]\mathrm{d}x$$

(1)若 $f(x)$在$[-a,a]$上连续且为偶函数,则 $f(-x)=f(x)$,于是

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

(2)若 $f(x)$在$[-a,a]$上连续且为奇函数,则 $f(-x)=-f(x)$,于是

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0$$

该题的结论,可简化奇函数与偶函数在对称区间上的定积分的计算.

例 3-36 求下列定积分的值.

(1) $\int_{-1}^{1} x^2 \mid x \mid \mathrm{d}x$; (2) $\int_{-1}^{1} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

解 (1)因为被积函数 $x^2|x|$是$[-1,1]$上的偶函数,所以有

$$\int_{-1}^{1} x^2 \mid x \mid \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} x^2 \mid x \mid \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} x^2 \cdot x\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} x^3\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

(2)因为被积函数$\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}}$是$[-1,1]$上的奇函数,所以有

$$\int_{-1}^{1} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = 0$$

3.4.2. 定积分的分部积分法

设函数 $u=u(x)$,$v=v(x)$在区间$[a,b]$上具有连续导数,由乘积求微公式

$$\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$$

移项得

$$u\mathrm{d}v=\mathrm{d}(uv)-v\mathrm{d}u$$

两边在$[a,b]$上积分,用牛顿一莱布尼兹公式得

$$\int_{b}^{a} u\mathrm{d}v = \left[uv\right]_a^b - \int_{a}^{b} v\mathrm{d}u$$

这就是定积分的分部积分法公式.

不定积分的分部积分法和定积分的分部积分法在公式和方法上相同,只是定积分带有积分上下限,而不定积分没有;在求出原函数时,不定积分需加积分常数,而定积分需求改变量.

例 3-37 求 $\int_{1}^{\mathrm{e}} \ln x\mathrm{d}x$.

解
$$\int_{1}^{\mathrm{e}} \ln x\mathrm{d}x = [x\ln x]_1^{\mathrm{e}} - \int_{1}^{\mathrm{e}} x\mathrm{d}(\ln x) = \mathrm{e} - \int_{1}^{\mathrm{e}} x \cdot (\ln x)'\mathrm{d}x = \mathrm{e} - \int_{1}^{\mathrm{e}} x \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$= \mathrm{e} - \int_{1}^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x = \mathrm{e} - [x]_1^{\mathrm{e}} = 1.$$

例 3-38 求 $\int_{0}^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x$.

解
$$\int_{0}^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x = \int_{0}^{\sqrt{3}} \arctan x \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)'\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{0}^{\sqrt{3}} \arctan x\mathrm{d}(x^2)$$
$$= \frac{1}{2}[x^2\arctan x]_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_{0}^{\sqrt{3}} x^2\mathrm{d}(\arctan x)$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{2}\times 3\times\arctan\sqrt{3}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\times 3\times\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left[x-\arctan x\right]_0^{\sqrt{3}}\\
&=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left[\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right]\\
&=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}
$$

练习 3-4

1. 填空题.

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}x\cos x\mathrm{d}x=$ __________.

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\mathrm{d}x=$ __________.

(3) $\int_0^1\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$ __________.

(4) $\int_{-\pi}^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x=$ __________.

2. 计算下列各定积分.

(1) $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos x}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_1^5\frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$；

(5) $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$；　　(6) $\int_0^1 x\arctan x\mathrm{d}x$；

(7) $\int_0^1\arctan\sqrt{x}\mathrm{d}x$；　　(8) $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}|\ln x|\mathrm{d}x$；

(9) $\int_{-1}^1\frac{x^7\cos x+x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　　(10) $\int_0^{\pi^2}\sin\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

3. 已知 $f(0)=1,f(1)=4,f'(1)=7$，求$\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x$.

4. 证明$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

5. 已知 $y=\int_0^x t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$，求该函数的极值.

§3.5　定积分的应用

通过定积分思想和积分方法的学习，我们可以解决一些非均匀变化的改变量的问题，事实上，在实际应用过程中，如何把一个所求量表示为定积分的形式，是我们使用定积分解决

问题的前提.

3.5.1 定积分的元素法

1. 定积分的元素法

我们首先回顾定积分的定义引入过程中求由曲线 $y=f(x)(f(x)\geqslant 0)$ 和直线 $x=a,x=b,y=0$ 围成的曲边梯形面积的四个步骤:

(1)分割在区间 $[a,b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$,则大曲边梯形被分割成 n 个小曲边梯形.

(2)取近似在区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,用小矩形的面积 $f(\xi_i)\triangle x_i$ 近似代替小曲边梯形的面积,即 $\triangle A_i\approx f(\xi_i)\triangle x_i$.

(3)求和将所有的小曲边梯形面积相加,就得出大曲边梯形面积(近似值),即

$$A=\sum_{i=1}^{n}\triangle A_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\triangle x_i$$

(4) 取极限令 $\lambda=\max\{\triangle x_i\}(i=1,2,\cdots,n)$,于是,当 $\lambda\to 0$ 时,$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\triangle x_i\to A$,即

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\triangle x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

在确定积分表达式的四个步骤中,主要是第二步确定小曲边梯形面积的近似值,为了简便起见,我们用 $\triangle A$ 表示任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 上的小曲边梯形的面积,而且取该小区间左端点 x 处对应的函数值 $f(x)$ 为小矩形的高,则小矩形的面积 $f(x)\mathrm{d}x$ 近似等于小曲边梯形的面积 $\triangle A$,即 $\triangle A\approx f(x)\mathrm{d}x$(如图 3-10 中阴影部分),于是将小矩形面积求和并取极限即得曲边梯形的面积,$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 事实上,小矩形的面积 $f(x)\mathrm{d}x$ 就是定积分的被积表达式,我们将该小矩形的面积 $f(x)\mathrm{d}x$ 称为**面积元素**,记作 $\mathrm{d}A=f(x)\mathrm{d}x$,也即

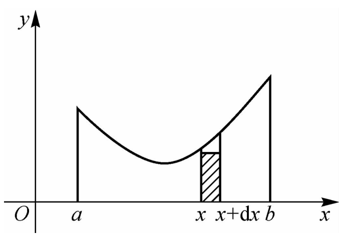

图 3-10

$$A=\int_a^b \mathrm{d}A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

在实际应用过程中,如果所求量的微小增量可以近似表示为一个函数在某一点处的函数值与自变量的增量的积的形式 $f(x)\mathrm{d}x$,我们就把这个积 $f(x)\mathrm{d}x$ 称为所求量的**元素**,对该元素求定积分就得到所求量.

2. 元素法的具体步骤

(1)根据问题的具体情况,选取一个变量(如 x)为积分变量,并确定它的变化区间 $[a,b]$.

(2)选取积分变量 $x\in[a,b]$,在 $[a,b]$ 上任取一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$,以点 x 处对应的函数值 $f(x)$ 与 $\mathrm{d}x$ 的乘积 $f(x)\mathrm{d}x$ 为所求量 A 的元素 $\mathrm{d}A$,即 $\mathrm{d}A=f(x)\mathrm{d}x$.

(3)以所求量 A 的元素 $\mathrm{d}A=f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式,在区间 $[a,b]$ 上求定积分,得

$$A=\int_a^b \mathrm{d}A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

这就是所求量 A 的积分表达式.

3.5.2　定积分在几何上的应用

1. 平面图形的面积

根据定积分的几何意义，我们能够直接将平面直角坐标系中 x 轴上方(或下方)部分的曲边梯形的面积表示为定积分(或定积分的相反数)，对于较为复杂的图形的面积，借助于定积分的元素法，将会使问题的解决更便捷.

我们讨论由连续曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 与直线 $x=a$，$x=b$ 所围成的平面图形的面积($a<b$)(如图 3-11 所示). 取任意 $x\in[a,b]$为积分变量，对于任意小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$，该部分的面积可以用以 $|f(x)-g(x)|$ 为高、$\mathrm{d}x$ 为宽的小矩形的面积(面积元素)近似代替，即 $\mathrm{d}A=|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$，于是 $A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$.

必须注意的是：(1)曲边梯形中，$y=g(x)=0$，$A=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$；(2)如果平面图形由连续曲线 $x=f(y)$，$x=g(y)$ 与直线 $y=a$，$y=b(a<b)$ 围成，则取任意 $y\in[a,b]$为积分变量，面积元素为 $\mathrm{d}A=|f(y)-g(y)|\mathrm{d}y$. 如图 3-12 所示.

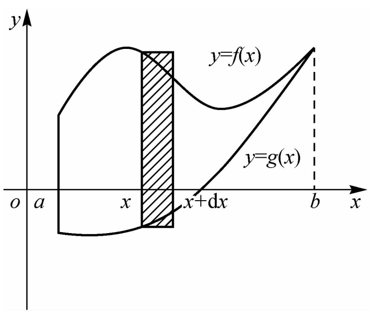

图 3-11

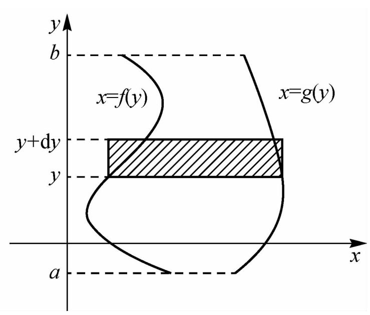

图 3-12

例 3-39　计算由曲线 $y=x^3$ 和直线 $y=x$ 围成的平面图形的面积，如图 3-13 所示.

解　选取 x 为积分变量，则对于任意 $x\in[-1,1]$，在小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$上，其面积元素为$\mathrm{d}A=|x-x^3|\mathrm{d}x$，于是

$$\begin{aligned}A&=\int_{-1}^1 \mathrm{d}A=\int_{-1}^1 |x-x^3|\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 |x-x^3|\mathrm{d}x+\int_0^1 |x-x^3|\mathrm{d}x\\&=\int_{-1}^0 (x^3-x)\mathrm{d}x+\int_0^1 (x-x^3)\mathrm{d}x\\&=\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^0-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

为简化运算，也可以根据图形的对称性求面积 $A=2\int_0^1 |x-x^3|\mathrm{d}x$.

如果选择 y 为积分变量，则对于任意 $y\in[-1,1]$，在小区间$[y,y+\mathrm{d}y]$上，其面积元素为$\mathrm{d}A=|y-\sqrt[3]{y}|\mathrm{d}y$，于是

$$A=2\int_0^1 \left| y-\sqrt[3]{y} \right| \mathrm{d}y=2\int_0^1 (\sqrt[3]{y}-y)\mathrm{d}y=2\left[\frac{3y^{\frac{4}{3}}}{4}\right]_0^1-2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}.$$

例 3-40　求由抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围成的平面图形的面积.

解　如图 3-14 所示,解方程组$\begin{cases} y^2=2x \\ y=x-4 \end{cases}$,得交点坐标为$(2,-2)$,$(8,4)$.

如果选择 x 为积分变量,在不同的小区间,面积元素的解析式不同,需要分区间求面积.如果选择 y 为积分变量,对于任意 $y\in[-2,4]$,在小区间$[y,y+\mathrm{d}y]$上,面积元素为 $\mathrm{d}A=\left|(y+4)-\frac{y^2}{2}\right|\mathrm{d}y$,于是

$$A=\int_{-2}^4 \mathrm{d}A=\int_{-2}^4 \left|(y+4)-\frac{y^2}{2}\right|\mathrm{d}y=\int_{-2}^4 \left(y+4-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y=\left[\frac{y^2}{2}+4y-\frac{1}{6}y^3\right]_{-2}^4=18$$

由此可见,适当选取积分变量可以使计算简便.

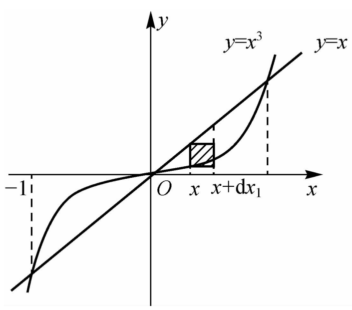

图 3-13

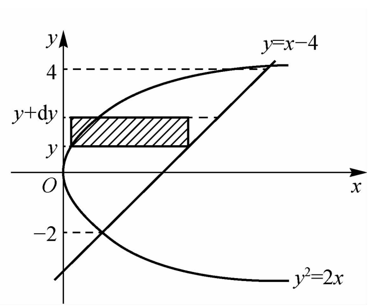

图 3-14

2. 旋转体的体积

旋转体是指平面图形绕平面上某一条直线旋转的空间立体.例如圆柱、圆锥、球体都可以看成是由矩形、三角形、半圆形绕着一直边旋转而成的.这里,我们用定积分的元素法分析由曲线 $y=f(x)$和直线 $x=a$,$x=b$,$y=0$ 围成的曲边梯形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积(如图 3-15 所示),其步骤如下:

(1)选取积分变量.选择 x 为积分变量,则 x 的取值范围是$[a,b]$,该区间的长度就是旋转体的高度.

(2)求体积元素.对于任意 $x\in[a,b]$,在小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$上(小旋转体),可以用小圆柱体的体积近似代替小旋转体的体积,即以 $f(x)$为高、$\mathrm{d}x$ 为宽的矩形绕 x 轴旋转而成的圆柱体积就是旋转体的体积元素,有

$$\mathrm{d}V=\pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$$

(3)求积分.该旋转体的体积就是体积元素 $\mathrm{d}V$ 在区间$[a,b]$上的定积分,即

$$V=\int_a^b \mathrm{d}V=\int_a^b \pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$$

必须注意的是:(1)如果平面图形绕 y 旋转,则应选择 y 为积分变量;(2)灵活选择积分变量的目的是为了使分割后的小立体是旋转体,也就相当于用垂直于旋转轴的平面切割旋转体,使截面面积可求,其体积的近似值可以看作是圆柱体的体积,从而使体积元素易求.

例 3-41　求由椭圆曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$绕 x 轴旋转而成的椭球体的体积.

分析　如图 3-16 所示,由于椭圆是对称图形,所以,我们只需求出椭圆在第一象限内的曲线和坐标轴围成的曲边梯形绕 x 轴旋转而成的半个椭球体的体积 V_1,就得出椭球体的体积$V=2V_1$.

解　选择 x 为积分变量,其取值范围$[0,a]$,对于任意$x\in[0,a]$,在小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$上,将小旋转体的体积近似看作以 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$为高、以 $\mathrm{d}x$ 为宽的矩形绕 x 轴旋转而成的圆柱体的体积,即体积元素为 $\mathrm{d}V_1=\pi y^2\mathrm{d}x=\frac{\pi b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x$,

于是 $V=2V_1=2\int_0^a\mathrm{d}V_1=\frac{2\pi b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{2\pi b^2}{a^2}\times\frac{2a^3}{3}=\frac{4}{3}\pi ab^2$.

显然,当 $a=b$ 时就是半径为 a 的球体的体积 $V=\frac{4}{3}\pi a^3$.

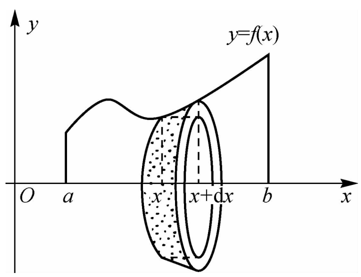

图 3-15

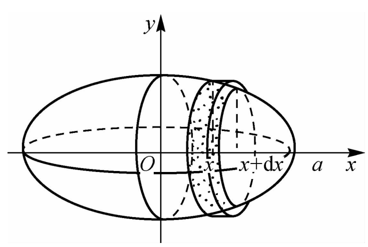

图 3-16

例 3-42　求由两条曲线 $y=x^2$、$y=\sqrt{x}$围成的平面图形绕 x 轴旋转所形成的旋转体的体积.

分析　该立体是一个中空的旋转体,细分后的小旋转体的体积可以近似看作是阴影部分矩形绕 x 轴旋转而成的中空的柱体的体积(体积元素),如图 3-17 所示,该柱体底面积为$\pi y_1^2-\pi y_2^2$,高为 $\mathrm{d}x$.

解　解方程组$\begin{cases}y=x^2\\y=\sqrt{x}\end{cases}$得交点为$(0,0)$,$(1,1)$.

选取 x 为积分变量,其取值范围为$[0,1]$,对于任意$x\in[0,1]$,在小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$上,体积元素为

$$\mathrm{d}V=(\pi y_1^2-\pi y_2^2)\mathrm{d}x=(\pi x-\pi x^4)\mathrm{d}x$$

于是 $V=\int_0^1\mathrm{d}V=\int_0^1(\pi x-\pi x^4)\mathrm{d}x=\pi\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{3}{10}\pi$.

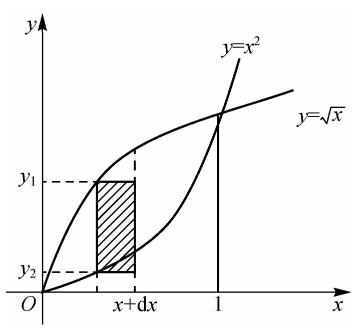

图 3-17

3. 平面曲线的弧长

设曲线 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上一阶导数连续,我们用定积分的元素法分析该段曲线弧的长度.

选择曲线上的点对应的横坐标 x 为积分变量,其取值范围为$[a,b]$. 对于任意的 $x\in[a,b]$,在小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$上,曲线小弧段的长度近似等于曲线在该区间左端点处的切线函数在区间$[x,x+\mathrm{d}x]$上长度(弧长元素 $\mathrm{d}s$)如图 3-18 所示,即

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+y'^2}dx$$

曲线在区间$[a,b]$上的弧线长等于弧长元素在该区间上的定积分为

$$s=\int_a^b ds=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx$$

例 3-43　计算曲线 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$上对应于 x 从a 到b 的一段弧长(见图 3-19).

解　对于任意 $x\in[a,b]$,在小区间$[x,x+dx]$上,弧长元素为

$$ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}dx=\sqrt{1+x}dx$$

于是,弧长为 $s=\int_a^b ds=\int_a^b \sqrt{1+x}dx=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_a^b=\frac{2}{3}\left[(1+b)^{\frac{3}{2}}-(1+a)^{\frac{3}{2}}\right]$.

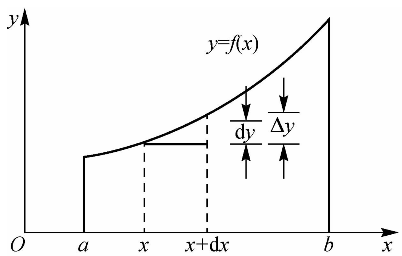

图 3-18

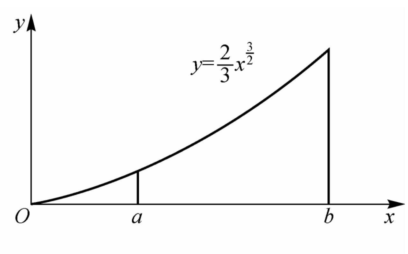

图 3-19

3.5.3　定积分在物理学中的应用

1. 变力沿直线做功

例 3-44　弹簧在静止状态下受外力作用拉伸长度为 4 cm(弹性限度内),设弹性系数为k,求拉伸过程中外力所做的功.

解　由于弹簧的弹力 f 与伸长的长度成正比,方向指向平衡位置,且 $f=-ks$,于是外力

$$F=-f=ks$$

选择弹簧伸长量 s 为积分变量,其取值范围为$[0,4]$,对于任意 $s\in[0,4]$,在位移区间$[s,s+ds]$上,功元素为 $dW=Fds=ksds$,于是

$$W=\int_0^4 ksds=k\int_0^4 sds=k\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^4=8k$$

例 3-45　水下施工前,需将高为 10 m、底圆半径为 4 m 的围堰中的水全部吸出,求外力所做的功.

解　如图 3-20 所示,取水的深度 x 为积分变量,其取值范围为$[0,10]$,对于任意 $x\in[0,10]$,在小区间$[x,x+dx]$上,外力所做的功近似等于将体积为 $\pi\times4^2\times dx(m^3)$的水克服重力移动 x 米所做的功(功元素),即 $dW=\rho\times\pi\times16\times x\times dx=16\pi\rho x dx$,其中水的比重$\rho=9.8\ kN/m^3$,于是

$$W=\int_0^{10} dW=\int_0^{10} 16\pi\rho x dx=156.8\pi\int_0^{10} x dx=156.8\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{10}=7840\pi(kJ).$$

2. 液体的压力

例 3-46　某水库的梯形闸门在水下 8 m 到 12 m,如图 3-21 所示,梯形上底为 6 m,下底 4 m,求闸门所受的压力.

解　根据图形的对称性，只需求出半个梯形面上的液体的压力即可，其中梯形的一条腰对应的函数为 $y=-\frac{x}{4}+5$，取水的深度 x 为积分变量，其取值范围为[8,12]，对于任意 $x\in[8,12]$，在小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$上，小梯形上所受的压强近似看作 ρx，面积近似看作小矩形，则压力元素为

$$\mathrm{d}F=\rho x\times y_1\times \mathrm{d}x=\rho(-\frac{x}{4}+5)x\mathrm{d}x=\rho(5x-\frac{1}{4}x^2)\mathrm{d}x$$

所以，闸门所受的液体的压力为

$$F=2\int_8^{12}\mathrm{d}F=2\int_8^{12}\rho(5x-\frac{1}{4}x^2)\mathrm{d}x=2\rho\left[\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{12}x^3\right]_8^{12}$$
$$=\frac{592}{3}\rho.$$

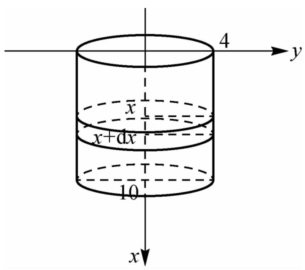

图 3-20

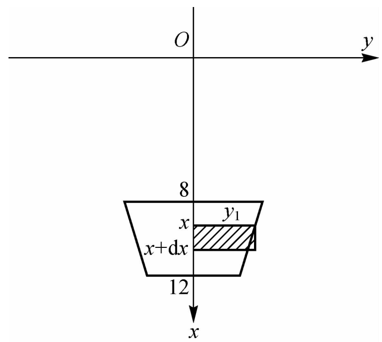

图 3-21

3.5.4　定积分在统计及经济分析中的应用

1. 函数的平均值

函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的平均值，相当于函数曲线在该区间上的平均高度，如图 3-22 所示，当 $f(x)\geqslant 0$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示曲边梯形的面积，该面积一定与某一个与该曲边梯形等宽的矩形面积相等，该矩形的高度就是函数曲线 $f(x)$在区间$[a,b]$上的平均高度，即平均值 $\bar{y}$. 即 $\bar{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

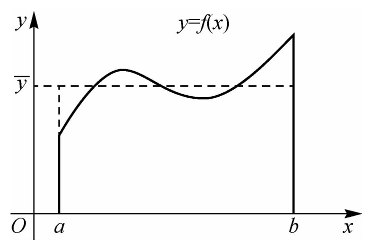

图 3-22

例 3-47　计算从 0 秒到 T 秒这段时间内自由落体的平均速度.

解　自由落体的速度函数为 $v=gt$，所以平均速度为

$$\bar{v}=\frac{1}{T-0}\int_0^T gt\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\left[\frac{gt^2}{2}\right]_0^T=\frac{gT}{2}$$

2. 根据边际函数求总函数

对总收益函数 $R(Q)$、总成本函数 $C(Q)$求导数可得边际收益函数 MR、边际成本函数 MC. 如果已知某产品的边际收益和边际成本函数，则当产量由 a 变到 b 时，总收益、总成本的改变量分别为

$$\int_a^b (MR)\mathrm{d}Q、\int_a^b (MC)\mathrm{d}Q$$

例 3-48 设生产某产品的固定成本 1 万元，边际收益为 $MR=8-Q$，边际成本为$MC=4+\dfrac{Q}{4}$.

(1)求产量为 4 百台时的总收益、总成本、平均成本.

(2)求产量由 4 百台增加到 5 百台时的总收益、总成本增加量及平均成本.

(3)求产量为多少时，总利润最大.

解 (1)产量为 4 百台时的总收益为$\int_0^4 (MR)\mathrm{d}Q=\int_0^4 (8-Q)\mathrm{d}Q=\left[8Q-\dfrac{Q^2}{2}\right]_0^4=24$(万元)，总成本为固定成本与生产成本之和，即

$$1+\int_0^4 (MC)dQ=1+\int_0^4 \left(4+\frac{Q}{4}\right)dQ=1+\left[4Q+\frac{Q^2}{8}\right]_0^4=19(\text{万元})$$

平均成本为 $\overline{C}=\dfrac{190\ 000}{400}=475$(元).

(2)当产量由 4 百台增加到 5 百台时的增加收益为

$$\int_4^5 (MR)\mathrm{d}Q=\int_4^5 (8-Q)\mathrm{d}Q=\left[8Q-\frac{Q^2}{2}\right]_4^5=3.5(\text{万元})$$

成本增加量为$\int_4^5 (MC)\mathrm{d}Q=\int_4^5 \left(4+\dfrac{Q}{4}\right)\mathrm{d}Q=\left[4Q+\dfrac{Q^2}{8}\right]_4^5=5.125$(万元)，增加部分的平均成本为 $\overline{C}=\dfrac{51\ 250}{100}=512.5$(元).

(3)总利润函数为 $L(Q)=R(Q)-C(Q)=8Q-\dfrac{Q^2}{2}-4Q-\dfrac{Q^2}{8}-1=4Q-\dfrac{5Q^2}{8}-1.$

边际利润为 $L'(Q)=4-\dfrac{5Q}{4}$，令 $L'(Q)=0$，得 $Q=3.2$(百台).

所以，当产量为 3.2 百台时，利润最大.

练习 3-5

1. 求由曲线 $y=\ln x$ 与直线 $y=\ln a, y=\ln b, (b>a>0), x=0$ 所围平面图形的面积.

2. 已知直线 $y=ax+b$ 过点(0,1)，问此直线与抛物线 $y=x^2$ 所围图形面积最小时，a，b 应取何值?

3. 求由曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=0, x=1$ 所围平面图形分别绕 x 轴、y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

4. 一圆台形水池，深 15 m，上下口半径分别为 20 m 和 10 m，如果将其中盛满的水全部抽尽，需要作多少功?

5. 有一等腰梯形闸门，它的两条底边长为 10 m 和 6 m，高为 20 m，垂直地放置于水中，较长的底边与水平面相齐，计算闸门的一侧所受的水压力.

6. 求函数 $y=2xe^{-x}$在[0,2]上的平均值.

7. 已知某产品的边际成本函数和边际收益函数分别为：

$$C'(Q)=3+\frac{Q}{3}(\text{万元/百台})$$

$$R'(Q)=7-Q(\text{万元/百台})$$

求:(1)若固定成本 $C(0)=1$ 万元时,总成本函数、总收益函数和总利润函数;

(2)产量为多少时,总利润最大？最大利润为多少？

8.设生产某产品的边际成本为 $C'(Q)=2$(万元/件),固定成本为 0,边际收益为 $R'(Q)=20-0.02Q$(万元/件),若在最大利润的基础上再生产 40 件产品,利润会发生什么变化?

§3.6　常微分方程简介

在实际问题中,有时我们会遇到变量之间的关系并不是直接的,往往只能建立其变量的变化率的条件关系,从中解出所求函数,这就涉及到微分方程知识.

例 3-49　一质量为 m 的质点在重力作用下自由下落,求其运动方程.

解　设向下的方向为位移的正方向,根据前面的知识,我们知道,位移的二阶导数就是加速度,即

$$s''(t)=\frac{d^2s}{dt^2}=g.$$

方程两边积分得 $s'(t)=\int g\mathrm{d}t=gt+C_1$.

再一次积分得 $s(t)=\int(gt+C_1)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$.

其中,C_1,C_2 是两个独立变化的积分常数,如果将条件 $v|_{t=0}=0$,$s|_{t=0}=0$ 代入,则可求出位移函数为 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$.

3.6.1　微分方程的概念

在上述例题中,方程 $s''(t)=\frac{d^2s}{dt^2}=g$,$s'(t)=gt+C_1$ 中,均含有未知量的微分或导数.

一般情况下,我们把含有未知量的导数或微分的方程称为**微分方程**.方程中含有的未知量的导数或微分的最高阶数,称为微分方程的**阶**.例如:$s''(t)=\frac{d^2s}{dt^2}=g$ 是二阶微分方程,$s'(t)=\frac{ds}{dt}=gt+C_1$是一阶微分方程.

在实数方程中,我们把满足方程的实数称为方程的解.在微分方程中,我们把满足微分方程的函数称为**微分方程的解**.如例 3-49 中位移函数 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 就是微分方程 $s''(t)=\frac{d^2s}{dt^2}=g$ 的解,此解中含有两个独立的积分常数,我们也把此解称为**微分方程的通解**.微分方程的通解中的积分常数的个数与微分方程的阶数相同.如果我们考虑条件 $v|_{t=0}=0$,$s|_{t=0}=0$,可求出 $C_1=C_2=0$,则得出位移函数为 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$,此解称为微分方程的**特解**.此处的条件也称为**初始条件**.

例 3-50　已知曲线上任意点 $M(x,y)$处的切线斜率为 $2x$,并且曲线过点 $P(0,1)$,求该曲线的方程.

解　设曲线函数为 $y=f(x)$,根据已知条件有

$$y'=2x \text{ 或} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$$

两边积分得

$$y=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C \text{ 或} \int \mathrm{d}y=\int 2x\mathrm{d}x$$

所以通解为

$$y=x^2+C$$

初始条件 $y|_{x=0}=1$ 代入通解得 $C=1$.

所以满足条件的曲线为

$$y=x^2+1$$

3.6.2 一阶微分方程

1. 可分离变量的微分方程

我们把形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)\cdot g(y)$$

的微分方程称为**可分离变量的微分方程**. 其特点是函数的导数等于 x 的变量式与 y 的变量式的积的形式.

其具体求解步骤为

(1)分离变量将含 x 的变量式与 $\mathrm{d}x$ 写在等式的一边,含 y 的变量式与 $\mathrm{d}y$ 分离在等式的另一边,即 $\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$.

(2)两边积分得通解即 $\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x$,如果 $G'(x)=\frac{1}{g(x)}$,$F'(x)=f(x)$,则通解为 $G(y)=F(x)+C$.

例 3-51 1999 年我国的国民生产总值(GDP)为 80 423 亿元,如果能保持每年 8%的相对增长率,那么到 2010 年我国的国民生产总值是多少?

解 以 $t=0$ 代表 1999 年,设第 t 年我国的国民生产总值为 $P(t)$,由相对增长率为 8%,则 $\frac{P'(t)}{P(t)}=\frac{\frac{dP(t)}{\mathrm{d}t}}{P(t)}=8\%$.

分离变量得 $\frac{\mathrm{d}P(t)}{P(t)}=8\%\mathrm{d}t$,两边积分有 $\int \frac{\mathrm{d}P(t)}{P(t)}=\int 8\%\mathrm{d}t$,得 $\ln P(t)=0.08t+\ln C$,即 $P(t)=C\mathrm{e}^{0.08t}$.

将初始条件 $P|_{t=0}=80\ 423$ 代入通解得 $C=80\ 423$,所以从 1999 年起第 t 年我国的国民生产总值为 $P(t)=80\ 423\mathrm{e}^{0.08t}$,将 $t=2010-1999=11$ 代入上式,就得 2010 年我国的国民生产总值为

$$P(11)=80\ 423\mathrm{e}^{0.08\times 11}\approx 193\ 891.787(\text{亿元})$$

2. 一阶线性微分方程

我们把形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$$

的方程称为**一阶线性微分方程**.其特点是,未知数 y 及其导数均为一次.当 $Q(x)\neq 0$ 时,称为**一阶线性非齐次微分方程**;当 $Q(x)=0$ 时,称为**一阶线性齐次微分方程**.即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$$

它也是可分离变量的微分方程,因此对于一阶线性齐次微分方程,其求解法如下:

分离变量 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x$,两边积分 $\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=-\int P(x)\mathrm{d}x$,得 $\ln|y|=-\int P(x)\mathrm{d}x+\ln C_1$,通解为

$$y=\pm\mathrm{e}^{c_1}\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}=C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

一阶线性齐次微分方程的解与未知数 y 的系数有关系.我们也可以通过直接代入公式 $y=C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$ 求解一阶线性齐次微分方程的通解.

对于一阶线性非齐次方程的求解,可用**"常数变易法"**,就是在其对应的齐次微分方程的通解 $y=C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$ 基础上,将任意积分常数 C 变易为变量函数 $C(x)$,代入一阶线性非齐次微分方程,进一步确定变量函数 $C(x)$,得该一阶线性非齐次方程的通解.

求一阶线性非齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ 通解的具体步骤为:

(1)求出对应的齐次微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$ 的通解为 $y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$.

(2)常数变易　设 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ 的通解为 $y=C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$.

(3)将所设通解代入一阶线性非齐次微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$,其中,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}-C(x)P(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$$

解得 $C'(x)=Q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$.

(4)确定变量函数 $C(x)$,得 $C(x)=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C$.

(5)将变量函数代入所设通解,得一阶线性非齐次方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

当然,求一阶线性非齐次微分方程的通解,也可以直接代入通解公式

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

例 3-52　求微分方程 $y'-y\cos x=2x\mathrm{e}^{\sin x}$ 的通解.

解　先求对应的齐次方程 $y'-y\cos x=0$ 的通解为 $y=C\mathrm{e}^{-\int -\cos x\mathrm{d}x}=C\mathrm{e}^{\int\cos x\mathrm{d}x}=C\mathrm{e}^{\sin x}$.

设所求非齐次方程的通解为 $y=C(x)\mathrm{e}^{\sin x}$,则 $y'=C'(x)\mathrm{e}^{\sin x}+C(x)\mathrm{e}^{\sin x}\cos x$.

将 $y'=C'(x)\mathrm{e}^{\sin x}+C(x)\mathrm{e}^{\sin x}\cos x$, $y=C(x)\mathrm{e}^{\sin x}$ 代入原方程得 $C'(x)\mathrm{e}^{\sin x}=2x\mathrm{e}^{\sin x}$,即 $C'(x)=2x$,积分得 $C(x)=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C$.

所以,原方程的通解为 $y=\mathrm{e}^{\sin x}(x^2+C)$.

3.6.3 二阶微分方程

1. 可降阶的二阶微分方程

这里,我们讨论几种可降阶的二阶微分方程的类型及其求解.

(1)$y''=f(x)$型,该方程的右端是一个仅含自变量 x 的函数式,其解法是逐次积分,每积分一次,方程就降低一阶,最后得通解.

例 3-53 求微分方程 $y''=x\cos x$ 的通解.

解 方程两边积分得 $y'=\int x\cos x\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C_1$,再一次积分得通解为

$$\begin{aligned}y&=\int(x\sin x+\cos x+C_1)\mathrm{d}x=\int x\sin x\mathrm{d}x+\int\cos x\mathrm{d}x+\int C_1\mathrm{d}x\\&=-x\cos x+2\sin x+C_1x+C_2\end{aligned}$$

(2)$y''=f(x,y')$型. 该方程中不含未知函数 y,其解法是变量代换法,令 $y'=p$,则 $y''=p'$,代入原方程得 $p'=f(x,p)$,求出此一阶微分方程的通解 $p=\varphi(x,C_1)$,即 $y'=\varphi(x,C_1)$,进一步积分得原方程的通解 $y=\int\varphi(x,C_1)\mathrm{d}x+C_2$.

例 3-54 求微分方程$(1+x^2)y''=2xy'$满足初始条件 $y|_{x=0}=1,y'|_{x=0}=3$ 的特解.

解 令 $y'=p$,则 $y''=p'$,代入方程并化简得 $p'-\frac{2x}{1+x^2}p=0$.

由一阶线性齐次微分方程的通解公式得 $p=C_1\mathrm{e}^{\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x}=C_1\mathrm{e}^{\ln(1+x^2)}=C_1(1+x^2)$.

将 $y'=p$,代入上述通解得 $y'=C_1(1+x^2)$,两边求积分得原方程的通解为

$$y=\int C_1(1+x^2)\mathrm{d}x=C_1\int(1+x^2)\mathrm{d}x=C_1x+\frac{C_1}{3}x^3+C_2$$

将 $y'|_{x=0}=3$ 代入 $y'=C_1(1+x^2)$,得 $C_1=3$.

将$y|_{x=0}=1,C_1=3$ 代入通解 $y=C_1x+\frac{C_1}{3}x^3+C_2$,得 $C_2=1$.

所以原方程满足初始条件 $y|_{x=0}=1,y'|_{x=0}=3$ 的特解为 $y=3x+x^3+1$.

(3)$y''=f(y,y')$型. 该方程中不含自变量 x. 为了求出它的通解,令 $y'=p$,并利用复合函数的求导法则把 y''化为对 y 的导数,即 $y''=p'=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$.

于是,原二阶微分方程变成为一阶微分方程 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$,如果求出其通解为 $p=y'=\varphi(y,C_1)$,对此一阶微分方程用分离变量法求得通解为$\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2$.

例 3-55 求微分方程 $yy''-y'^2=0$ 的通解.

解 方程中不含自变量 x,设 $y'=p$,则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,代入方程得 $yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p^2=0$.

当 $y\neq0,p\neq0$ 时,约分并分离变量,得$\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mathrm{d}y}{y}$.

两端积分得 $\ln|p|=\ln|y|+C$,即 $p=C_1y$,将 $y'=p$ 代入,则 $y'=C_1y$ 由一阶线性齐次微分方程的通解公式,得通解为

$$y=C_2\mathrm{e}^{\int c_1\mathrm{d}x}=C_2\mathrm{e}^{c_1x}$$

2. 二阶常系数齐次线性微分方程

我们把形如

$$y''+py'+qy=0(p、q\text{ 是常数}) \tag{3-6}$$

的微分方程,称为**二阶常系数齐次线性微分方程**. 如果二阶微分方程有两个解 y_1、y_2,当 $\frac{y_2}{y_1}\neq C$时,则 y_1 和 y_2 称为该微分方程的两个线性无关解,且 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 为该方程的通解.

根据求导数经验,我们知道指数式函数 $y=e^{rx}$的一阶、二阶导数 re^{rx},r^2e^{rx}仍是同类型的指数式函数形式,于是,设 $y''+py'+qy=0$ 的一个解为 $y=e^{rx}$,将其代入方程式(3-6),得 $e^{rx}(r^2+pr+q)=0$,由于 $e^{rx}\neq0$,则必有

$$r^2+pr+q=0 \tag{3-7}$$

由此可见,满足方程 $r^2+pr+q=0$ 的根 r,对应的 $y=e^{rx}$就是方程式(3-6)的解. 我们也把方程式(3-2)称为微分方程式(3-6)对应的**特征方程**,其中,满足特征方程的根称为**特征根**,特征根有三种情况,因此,二阶常系数齐次微分方程式(3-6)的解就有三种形式:

(1)当 $p^2-4q>0$,特征方程式(3-7)有不相等的两个实数根 r_1、r_2,则 $y_1=e^{r_1x}$和 $y_2=e^{r_2x}$是方程式(3-6)的两个线性无关解,所以微分方程式(3-6)的通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$.

(2)当 $p^2-4q=0$ 时,特征方程式(3-7)有相等的实数根 $r_1=r_2=-\frac{p}{2}$,可以证明$y_1=e^{r_1x}$和 $y_2=xe^{r_1x}$ 是微分方程式(3-6)的两个线性无关解,所以微分方程式(3-6)的通解为$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$.

(3)当 $p^2-4q<0$ 时,特征方程式(3-7)有一对互为共轭的虚数根 $r_1=\alpha+\beta i$,$r_2=\alpha-\beta i$ $(\beta\neq0)$,可以证明 $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$ 和 $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$ 是微分方程式(3-6)的两个线性无关解,所以微分方程式(3-6)的通解为 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

通过以上分析可知,求二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解的步骤如下:

(1)写出对应的特征方程 $r^2+pr+q=0$.

(2)求出特征根 r_1,r_2.

(3)根据特征根的特点写出微分方程的通解.

例 3-56　求微分方程 $y''-4y'+3y=0$ 的通解.

解　特征方程为 $r^2-4r+3=0$.

特征根为 $r_1=1$,$r_2=3$.

微分方程 $y''-4y'+3y=0$ 的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$.

例 3-57　求微分方程$\frac{d^2s}{dt^2}+2\frac{ds}{dt}+s=0$ 满足初始条件 $s|_{t=0}=4$,$s'|_{t=0}=-2$ 的特解.

解　特征方程为 $r^2+2r+1=0$,特征根为 $r_1=r_2=-1$.

微分方程$\frac{d^2s}{dt^2}+2\frac{ds}{dt}+s=0$ 的通解为 $s=(C_1+C_2t)e^{-t}$.

将初始条件 $s|_{t=0}=4$ 代入上述通解,得 $C_1=4$.

将上述通解对 t 求导数得 $s'=(C_2-4-C_2t)e^{-t}$.

将初始条件 $s'|_{t=0}=-2$ 代入上式,得 $C_2=2$.

所以,所求微分方程 $\frac{d^2s}{dt^2}+2\frac{ds}{dt}+s=0$ 满足初始条件 $s|_{t=0}=4,s'|_{t=0}=-2$ 的特解为$s=(4+2t)e^{-t}$.

例 3-58 求微分方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解.

解 特征方程为 $r^2-2r+5=0$,特征根为 $r_1=1+2i,r_2=1-2i$.

所以,微分方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解为 $y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

3.6.4 微分方程应用举例

许多实际问题的数学描述将导致求解微分方程的问题.在应用过程中,将形形色色的实际问题转化为微分方程的求解问题,其步骤大致如下:

(1)根据实际要求确定要研究的量(自变量、未知函数、必要的参数等)并确定坐标系.

(2)找出这些量所满足的基本规律(物理的、几何的、化学的或其他学科等等).

(3)运用这些规律列出方程和初始条件.

(4)求解微分方程.

例 3-59 (传染病的流行问题)设总人数 N 不变,t 时刻得病的人数为 $x(t)$,它传染给正常人的传染率为 r.

(1)如果不开展宣传运动,任其自然地流行.

(2)为了预防传染病的流行,从 $t=t_0>0$ 开始持续宣传,使得传染上疾病的人数 $x(t)$减少,减少的速度与总人数 N 成正比,这个比例也叫宣传强度 α.

分析两种情况下传染上疾病的人数.

解 从 t 到 $t+\triangle t$ 时间内的平均传染率为$\frac{x(t+\triangle t)-x(t)}{\triangle t(N-x(t))}$,令$\triangle t\to 0$ 得 t 时刻的传染率为$\frac{1}{N-x}\frac{dx}{dt}=r$,因此:

(1)不采取任何预防措施时,传染人数 $x(t)$所满足的数学模型为$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=r(N-x),\\ x(0)=x_0\end{cases}$求解这个可分离变量的微分方程,得 $x(t)=N\left[1-\left(1-\frac{x_0}{N}\right)e^{-rt}\right]$.

若 $t\to+\infty$,有 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=N$.这说明,如果不采取任何预防措施,最终每个人都会被传染上疾病.

(2)在宣传强度为 α 时,传染人数 $x(t)$所满足的数学模型为

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=r(N-x)-\alpha N\\ x(t_0)=N\left[1-\left(1-\frac{x_0}{N}\right)e^{-rt_0}\right]\end{cases}$$

得 $x(t)e^{rt}=e^{rt_0}x(t_0)+\frac{r-\alpha}{r}N(e^{rt}-e^{rt_0})$,将初始条件 $x(t_0)$代入并整理得

$$x(t)=N\left[1-\left(1-\frac{x_0}{N}\right)e^{-rt}\right]-\frac{\alpha N}{r}(1-e^{-r(t-t_0)})$$

若 $t\to+\infty$,有 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=N(1-\dfrac{\alpha}{r})<N$. 这说明,持续而强有力的宣传能有效控制传染病的流行.

练习 3-6

1. 判断题.

(1)(　　)微分方程的解可以是显函数,也可以是隐函数.

(2)(　　)$\mathrm{d}y=3x\mathrm{d}x$ 是一阶微分方程.

(3)(　　)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$ 是可分离变量的微分方程.

(4)(　　)$y''=f(x,y')$是可降阶的二阶微分方程.

(5)(　　)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2y-4x$ 不是一阶线性微分方程.

2. 选择题.

(1)满足曲线 $y=f(x)$上点(x,y)处的切线斜率等于该点的横坐标的平方的微分方程是__________.

(A)$\mathrm{d}y=x^2$　　(B)$\mathrm{d}y=x^2\mathrm{d}x$

(C)$y'=x^2\mathrm{d}x$　　(D)$y=x^2\mathrm{d}x$

(2)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x}$的通解是__________.

(A)$y=\ln|x|$　　(B)$y=C$

(C)$y=\ln x+C$　　(D)$y=\ln|x|+C$

(3)$y'+2y-2x=0$ 的通解是__________.

(A)$y=x-\dfrac{1}{2}x+C\mathrm{e}^{-2x}$　　(B)$y=x-\dfrac{1}{2}x+\mathrm{e}^{-2x}+C$

(C)$y=x-\dfrac{1}{2}+C\mathrm{e}^{-2x}$　　(D)$y=x-\dfrac{1}{2}+\mathrm{e}^{-2x}+C$

(4)若连续函数 $f(x)$满足关系式 $f(x)=\int_0^{2x}f(\dfrac{t}{2})\mathrm{d}t+\ln 2$,则 $f(x)=$__________.

(A)$\mathrm{e}^x\ln 2$　　(B)$\mathrm{e}^{2x}\ln 2$

(C)$\mathrm{e}^x+\ln 2$　　(D)$\mathrm{e}^{2x}+\ln 2$

(5)下列方程中可降阶的是__________.

(A)$y''+xy+y=1$　　(B)$y''=x\mathrm{e}^x+y$

(C)$(1-x^2)y''=(1+x)y$　　(D)$yy''+(y')^2=5$

3. 填空题.

(1)微分方程中未知函数导数的最高阶数,称为微分方程的__________.

(2)$(y')^2-y^2=0$ 的阶数为______________________________.

(3)不显含未知函数 y 的二阶微分方程 $y''=f(x,y')$,可作代换 $y'=p$,则 $y''=$__________可使原方程降阶;

(4)二阶线性齐次微分方程的形式为______________________________.

(5)$y''-2\sqrt{2}y'+2y=0$ 的特征根为______________________________.

4. 求 $y'\cos x=y$ 满足条件 $y|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$ 的特解.

5. 求 $y''=x\cos x$ 的通解.

6. 求 $yy''=(y')^2$ 的通解.

7. 求 $y''-4y'+3y=0$ 的通解.

8. 求作一条曲线，使之通过点(2，3)，并且曲线上任一点处的切线夹在两坐标轴之间的线段被切点平分.

9. 设某商品的需求价格弹性为 $-p\ln 2$，已知该商品的最大需求量为 2 000，试求该商品的需求函数 $Q=Q(p)$，并求 $p=3$ 时该商品的需求量是多少?

第三章　自测题

一、判断题

1.（　　）$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

2.（　　）牛顿－莱布尼兹公式揭示了积分学中定积分与不定积分之间的联系.

3.（　　）$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

4.（　　）$\csc x\cot x$ 的原函数是 $-\csc x$.

5.（　　）$\left[\int_1^{5x}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t\right]'=5\mathrm{e}^{5x}$.

二、选择题

6. $\int\tan^2 x\mathrm{d}x=$ __________.

(A) $\sec x+x+C$　　(B) $\tan x-x+C$

(C) $\sec x-x+C$　　(D) $\tan x+x+C$

7. $\int_{-1}^1\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=$ __________.

(A) $\dfrac{\pi}{8}$　　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　　(D) π

8. $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=$ __________.

(A) $f(x)$　　(B) $f(x)+C$　　(C) $\mathrm{d}f(x)$　　(D) $f(x)\mathrm{d}x$

9. $\int_0^{\pi}x\cos x\mathrm{d}x=$ __________.

(A) -2　　(B) -1　　(C) 1　　(D) 2

10. $\int_0^1\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$ __________.

(A) -2　　(B) -1　　(C) 1　　(D) 2

三、填空题

11. $x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}$ __________.

12. $\int x\sqrt{x^2-3}\mathrm{d}x=$ __________.

13. 若$\int f(x)\mathrm{d}x = \cos 3x + \sqrt{x} + C$，则 $f(x) =$ __________.

14. 若函数 $f(x) = \int_0^{2x}(t-1)^2\mathrm{d}t$，令 $\varphi(x) = f'(x)$，当 $\varphi(x) = 0$ 时，$x =$ __________.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2} =$ __________.

四、解答题

16. 求$\int\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

17. 求$\int x\arctan x\mathrm{d}x$.

18. 求$\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$.

19. 求曲线 $y^2 = 2x$ 及直线 $y = x - 4$ 所围成的平面图形面积.

20. 求$\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的右半支曲线及直线 $y = 0$、$y = 1$、$x = 0$ 所围成的平面图形分别绕 y 轴、x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

21. 设有一长为 l、质量为 M 的均匀细杆 AB，另有一质量为 m 的质点 P 和细杆在一条直线上，它到细杆的近端 A 的距离为 a，求细杆 AB 对质点 P 的引力.

22. 设某产品的边际成本为 $C'(Q) = 4 + \dfrac{Q}{4}$(万元 / 百台)，固定成本 $C_o = 1$(万元)，边际收益 $R'(Q) = 8 - Q$(万元 / 百台)，求：

(1) 产量从 100 台增加到 500 台的成本增量；

(2) 总成本函数 $C(Q)$ 和总收益函数 $R(Q)$；

(3) 产量为多少时，总利润最大?最大利润是多少?