

结构分析有限元法

结构力学是研究工程结构力学性能的学科,是工程结构设计的基础。对于复杂的工程问题,一般需借助计算机进行分析,有限元法在此得以广泛应用。

本章从虚功原理出发,介绍用能量原理求解结构力学问题的基本思路,推导结构分析有限元法的一般形式,详细介绍杆件有限元法——矩阵位移法的实施步骤和技巧。

1.1 虚功原理

功能原理是自然界普遍存在的基本定理,在不同领域有不同的表现形式。理论力学中曾经讨论过刚体的虚位移原理,结构力学位移计算中讨论过变形体的单位荷载法。实际工程中,结构一般是变形体,本节以单根杆件介绍变形体虚功原理,并将其推广到杆系结构。

1.1.1 实功与虚功

功是指力在位移上所作用的效果。力在自身引起的位移上所做的功为实功,此时位移是由做功的力产生的。如果位移与做功的力彼此独立无关,则表示力在此位移上所做的功为虚功,即力在由其他原因产生的位移上所做的功是虚功。

图 1-1(a)所示的简支梁受一静力荷载的作用,荷载由零逐渐增至最终值 F_{P1} 。与此相应, F_{P1} 作用点的位移也由零逐渐增至最终值(Δ_{11})。 Δ_{ij} 的第一个脚标表示位移发生的位置和方向,即 Δ_{ij} 是 F_{Pi} 的作用点沿 F_{Pi} 的方向的位移;第二个脚标表示产生位移的原因,即 Δ_{ij} 是由 F_{Pj} 引起的位移。对于线弹性体系,荷载与位移成线性关系,如图 1-1(b)所示。因此,在加载过程中 F_{P1} 所做的功为实功(W_{11}),即

$$W_{11} = \int F_P d\Delta = \int_0^{\Delta_{11}} k\Delta d\Delta = \frac{1}{2}k\Delta_{11}^2 = \frac{1}{2}F_P\Delta_{11} \quad (1-1)$$

W_{11} 等于图 1-1(b)中 $\triangle OAB$ 的面积。由于在位移过程中 F_{P1} 是变力,所以在功的计算式中有系数“1/2”。实功的值恒为正。

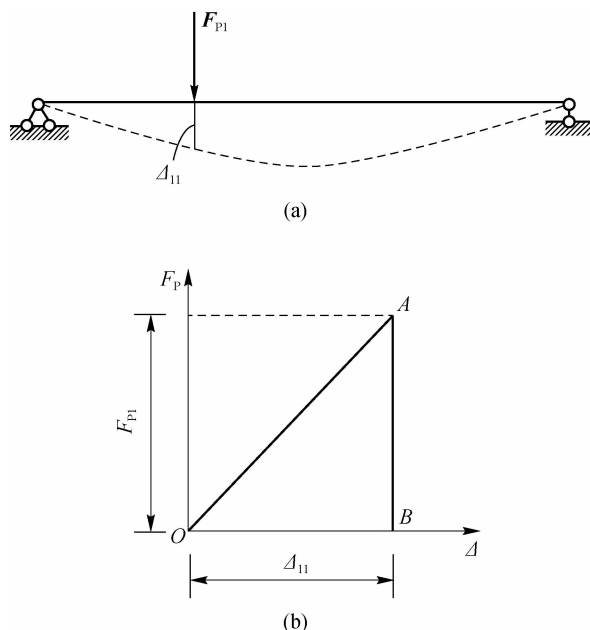


图 1-1 简支梁受荷载做功示意图

设在 F_{P1} 加完之后,梁变形到图中虚线 I 所示的平衡位置,然后再加荷载 F_{P2} (也是静力加载),梁又继续变形到图中虚线 II 所示的平衡位置[见图 1-2(a)]。 F_{P2} 的作用点由 F_{P2} 产生的位移为 Δ_{22} ,由于 F_{P2} 在此位移过程中是改变的,所以 F_{P2} 在 Δ_{22} 上所做的功为实功,即

$$W_{22} = \frac{1}{2} F_{P2} \Delta_{22}$$

在 F_{P2} 的加载过程中, F_{P1} 的作用点沿 F_{P1} 方向又产生了新的位移 Δ_{12} (Δ_{12} 是由 F_{P2} 引起的 F_{P1} 作用点的位移,与 F_{P1} 无关),所以, F_{P1} 在 F_{P2} 所产生的位移 Δ_{12} 上做的功为虚功,即

$$W_{12} = F_{P1} \Delta_{12} \quad (1-2)$$

由于做虚功时,力的值保持不变,是常力做功,所以在虚功计算公式(1-2)中没有系数“1/2”。当力与位移同向时,虚功的值为正,反向时为负。

在研究 F_{P1} 在 F_{P2} 产生的位移 Δ_{12} 上所做的虚功时,一般不把受力和位移画在一个图上[见图 1-2(a)],而把做虚功的力 F_{P1} 和位移 Δ_{12} 分别画在两个图上[见图 1-2(b)、(c)],称为同一结构的两种状态。将 F_{P1} 在位移 Δ_{12} 上做的虚功称为“状态 1 的力在状态 2 的位移上所做的虚功”,即 $W_{12} = F_{P1} \Delta_{12}$ 。同样状态 2 的力在状态 1 的位移上所做的虚功为

$$W_{21} = F_{P2} \Delta_{21}$$

虚功表达式涉及两方面因素:一是与力有关的因素,二是与位移有关的因素。与力有关的因素不仅可以是单个力,而且可以是一个力偶,或者是一个力系。为了简便,概括地称这些做功的与力有关的因素为广义力。这些广义力将在相应的有关位移的因素上做虚功。这些有关位移的因素称为与广义力相应的广义位移。例如,单个集中力 F_P 相应的广义位移是该力作用点的位移在力 F_P 方向上的投影 Δ ,与单个集中力偶 M 相应的广义位移是它所作用的截面的转角 θ ,等等。

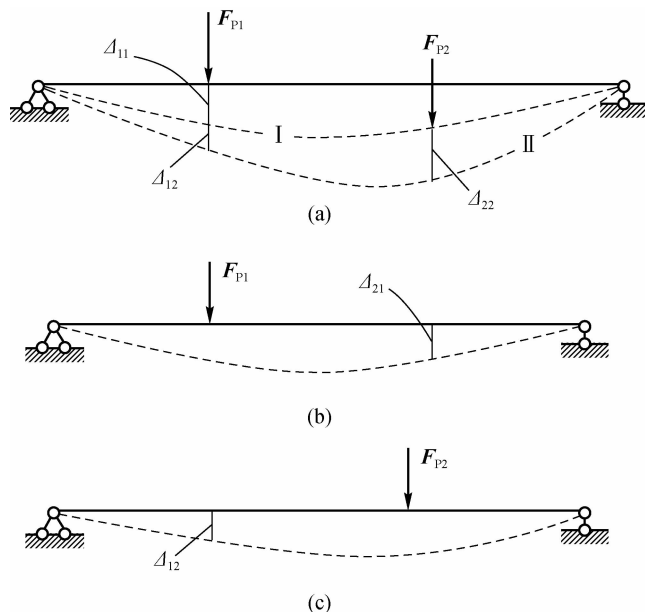


图 1-2 同一结构的两种状态

1.1.2 变形体虚功原理

在理论力学中已学过刚体虚功原理。按照这个原理,当给平衡力系以任何满足约束条件的微小的刚体位移时,作用于体系上的所有外力所做虚功的总和等于零,即 $W_e = 0$ 。

变形体虚功原理可表述为:受给定外力作用的变形体处于平衡状态的充分、必要条件是,对一切可能的几何位移和变形,外力所做总虚功恒等于变形体所接受的总虚变形功,即恒有如下虚功方程成立:

$$W_e = W_i \quad (1-3)$$

变形体虚功原理的必要性是说:当变形体处于平衡状态时,虚功方程(1-3)恒成立。虚功原理的充分性是说:当对一切虚位移,虚功方程(1-3)恒成立时,变形体一定平衡。

这里几何可能的位移和变形指的是微小的,且满足变形连续条件的位移和变形。需要指出:虚功原理要求的可能位移是完全任意的,即一切可能的位移,在此条件下,虚功方程等价于平衡条件,因此虚功原理也称为虚位移原理。

如图 1-3 所示的杆件受外荷载作用,设轴向荷载为 p 、横向荷载为 q ,引起杆端力(简化为轴向力、横向力和弯矩)。

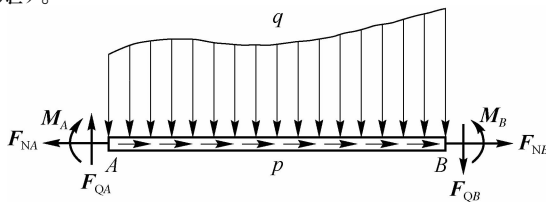


图 1-3 杆件外力

假设杆件发生的可能位移有:轴向位移 u 、横向位移 v 和弯曲(转角)变形 θ , 则平衡力系在可能位移上所做的外力虚功为

$$W_e = M_B \theta_B + F_{NB} u_B + F_{QB} v_B - (M_A \theta_A + F_{NA} u_A + F_{QA} v_A) + \int_A^B (pu + qv) dx$$

对于平面杆件, 内力有轴力 F_N 、剪力 F_Q 和弯矩 M , 如图 1-4(a) 所示。微段的变形有轴向变形 $d\lambda_1 = \epsilon dx$ (微段两端的相对轴向位移)、剪切变形 $d\lambda_2 = \gamma_0 dx$ (微段两端的相对剪切位移) 和弯曲变形 $d\theta = \kappa dx$ (微段两端的相对转角), 如图 1-4(b) 所示, 则内力虚功为

$$W_i = \int M \kappa dx + \int F_Q \gamma_0 dx + \int F_N \epsilon dx$$

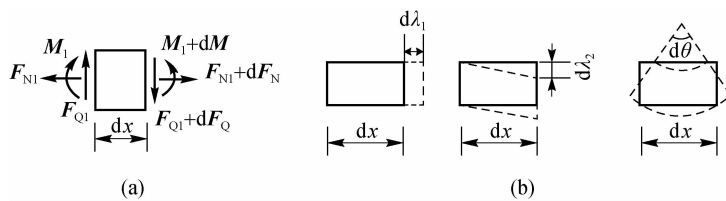


图 1-4 杆件内力及变形

根据变形体虚功原理, 下列虚功方程成立:

$$\begin{aligned} & M_B \theta_B + F_{NB} u_B + F_{QB} v_B - (M_A \theta_A + F_{NA} u_A + F_{QA} v_A) + \int_A^B (pu + qv) dx \\ &= \int_l (F_N \epsilon + F_Q \gamma_0 + M \kappa) dx \end{aligned} \quad (1-4)$$

由变形体虚功原理的必要性可知, 当杆件处于平衡状态时, 虚功方程(1-4)恒成立。证明如下:

由杆件平衡方程

$$\left. \begin{aligned} dF_N + p dx &= 0 \\ dF_Q + q dx &= 0 \\ dM + F_Q dx &= 0 \end{aligned} \right\}$$

可推得下列方程成立:

$$\int_l (dF_N + p dx) u + \int_l (dF_Q + q dx) v + \int_l (dM + F_Q dx) \theta = 0$$

整理, 得

$$\int_l (u dF_N + v dF_Q + \theta dM) + \int_l (pu + qv + F_Q \theta) dx = 0$$

第一项分部积分, 得

$$(u F_N + v F_Q + \theta M) \Big|_A^B - \int_l (F_N du + F_Q dv + M d\theta) + \int_l (pu + qv + F_Q \theta) dx = 0$$

代入几何方程

$$\begin{cases} \epsilon = \frac{du}{dx} \\ \gamma_0 = \frac{dv}{dx} - \theta \\ \kappa = \frac{d\theta}{dx} \end{cases}$$

得

$$\begin{aligned} & (uF_N + vF_Q + \theta M) \Big|_A^B - \int_l [F_N \epsilon + F_Q (\gamma_0 + \theta) + M \kappa] dx + \int_l (pu + qv + F_Q \theta) dx \\ &= (uF_N + vF_Q + \theta M) \Big|_A^B - \int_l (F_N \epsilon + F_Q \gamma_0 + M \kappa) dx + \int_l (pu + qv) dx = 0 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} W_e &= M_B \theta_B + F_{NB} u_B + F_{QB} v_B - (M_A \theta_A + F_{NA} u_A + F_{QA} v_A) + \int_A^B (pu + qv) dx \\ &= \int_l (F_N \epsilon + F_Q \gamma_0 + M \kappa) dx = W_i \end{aligned}$$

变形体虚功原理的必要性得证。

由变形体虚功原理的充分性可知, 当对一切虚位移, 虚功方程(1-4)恒成立时, 杆件一定平衡。假设杆件不平衡, 则体内存在加速度, 由此产生惯性力 $-\rho \ddot{u}$ (ρ 为材料的密度)。由达朗贝尔原理可知, 在杆件上加上这种体积力后, 杆件处于瞬时平衡状态, 利用变形体虚功原理的必要性, 对一切虚位移式(1-4)恒成立。从两种情况相减可知: $-\rho \ddot{u} = 0$ 。也就是说, 当对一切虚功方程都成立时, 如果杆件不平衡, 则其加速度必等于零。因此, 变形体不可能不平衡, 至此原理的充分性证毕。

需要说明的是: 变形体虚功方程是基于两点得到的, 即力状态是平衡的, 位移状态是协调的, 在推导过程中没有涉及材料的物理性质, 因此变形体虚功方程不涉及材料特性。

1.1.3 虚功方程的推广

1. 杆系结构的虚功方程

由于虚功原理对任意杆件均成立, 将其叠加, 注意到作用在杆件节点上的集中力, 则杆系结构的虚功方程为

$$\begin{aligned} & \sum (uF_N + vF_Q + \theta M) \Big|_A^B + \sum \int_l (pu + qv) dx + \sum F_{Pj} \Delta_j \\ &= \sum \int_l (F_N \epsilon + M \kappa + F_Q \gamma_0) dx \end{aligned} \quad (1-5)$$

式中, F_{Pj} 、 Δ_j 为节点集中力及其对应的位移, 作用在节点上的集中力包括集中荷载和支座反力。值得注意的是, 在叠加时, 杆件端截面上的力总是成对出现的, 所做虚功互相抵消, 式(1-5)写为

$$\sum F_R \Delta_R + \sum F_P \Delta + \sum \int_l (pu + qv) dx = \sum \int_l (F_N \epsilon + M \kappa + F_Q \gamma_0) dx \quad (1-6)$$

式中, F_R 为支座反力。需要指出: 如果集中荷载作用在杆件内部, 一般将其视为杆件微段上的分布荷载进行处理; 也可以将作用点视为节点, 将杆件分为两段, 此时式(1-6)中的 F_P 为作用在节点上的集中荷载。

2. 虚位移原理

由于力状态和位移状态是两个彼此无关的状态, 因此对于实际力状态, 可以通过虚设可能位移状态, 来建立虚功方程(此时等价于平衡方程), 从而求出未知力。

$$\sum F_R \Delta_R^* + \sum F_P \Delta^* + \sum \int_l (p u^* + q v^*) dx = \sum \int_l (F_N \epsilon^* + M \kappa^* + F_Q \gamma_0^*) dx$$

式中, Δ_R^* 、 Δ^* 、 u^* 、 v^* 、 ϵ^* 、 κ^* 、 γ_0^* 为虚位移及对应的变形。对于平面杆件体系, 一般略去剪切变形虚功, 只考虑杆件的轴向变形和弯曲变形, 虚功方程为

$$\sum F_R \Delta_R^* + \sum F_P \Delta^* + \sum \int_l (p u^* + q v^*) dx = \sum \int_l (F_N \epsilon^* + M \kappa^*) dx \quad (1-7)$$

3. 虚力原理

对于实际的位移状态, 则可以利用虚设的平衡力系建立虚功方程(此时等价于几何方程), 求未知位移。

$$\sum F_R^* \Delta_R + \sum F_P^* \Delta + \sum \int_l (p^* u + q^* v) dx = \sum \int_l (F_N^* \epsilon + M^* \kappa + F_Q^* \gamma_0) dx$$

式中, F^* 、 p^* 等为虚设平衡力系。在需要计算位移的地方加一虚设的单位荷载, 则有

$$1 \cdot \Delta + \sum F_R^* \Delta_R = \sum \int_l (F_N^* \epsilon + M^* \kappa + F_Q^* \gamma_0) dx \quad (1-8)$$

式(1-8)为单位荷载法的一般形式(见结构力学位移计算)。

1.2 最小势能原理

最小势能原理可由虚位移原理导出, 推导过程中用到泛函的概念。用函数做自变量以积分形式定义的函数, 称为泛函。自变量称为自变函数。泛函对自变函数的“微分”称为变分, 变分算子用符号 δ 表示。根据泛函分析, 变分运算的方法与微分运算类同。

1.2.1 结构的势能

对于弹性结构, 当其受到外荷载作用时将发生弹性变形, 外荷载消失时变形也消失。由此可知, 结构在受到外界作用发生变形时存在功能转换。内力在结构变形过程中(应变从零开始增加)所做的功称为应变能。

单位长度杆件的内力在变形过程中(从变形为零开始)所做的功为应变能密度(\bar{U}), 即

$$\bar{U} = \int_0^\epsilon F_N d\epsilon + \int_0^\gamma F_Q d\gamma + \int_0^\kappa M d\kappa$$

由于 $F_N = EA\epsilon$, $F_Q = \alpha GA\gamma$, $M = EI\kappa$, 所以

$$\bar{U} = \frac{1}{2} EA\epsilon^2 + \frac{1}{2} \alpha GA\gamma^2 + \frac{1}{2} EI\kappa^2 \quad (1-9)$$

杆件的应变能(U)一般为轴向变形能(U_N)和弯曲变形能(U_b)之和,略去剪切变形功,即

$$U=U_N+U_b$$

代入几何方程 $\epsilon=\frac{\partial u}{\partial x}$, $\kappa=\frac{d^2 v}{dx^2}$, 则式(1-9)变为

$$\bar{U}=\frac{1}{2}EA\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}EI\left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)^2$$

杆件应变能为

$$U_e=\frac{1}{2}\int_0^l EA\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx+\frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)^2 dx$$

结构的应变能记为 U , 即

$$U=\sum\frac{1}{2}\int_l(EA\epsilon^2+EI\kappa^2)dx \quad (1-10)$$

仿照重力,外力从位移状态退回到无位移的初始状态时所做的功为外力势能,记作 V 。

$$V=-\sum F_P\Delta-\sum\int_l(pu+qv)dx \quad (1-11)$$

应变能(U)和外力势能(V)的和称为总势能,记作 Π 。

$$\Pi=\sum\frac{1}{2}\int_l(EA\epsilon^2+EI\kappa^2)dx-\sum F_P\Delta-\sum\int_l(pu+qv)dx \quad (1-12)$$

结构的总势能为

$$\Pi=\sum_e\left[\frac{1}{2}\int_l EI\left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)^2+\int_l EA\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx-\int_l(pu+qv)dx\right]-\sum_j F_{Pj}\Delta_j \quad (1-13)$$

1.2.2 结构最小势能原理

由虚位移原理可以看出,外力虚功和内力虚功以位移函数作为自变量的泛函。根据泛函分析的记法,将虚位移看成位移的变分,则虚功方程为

$$\sum F_R\delta\Delta_R+\sum F_P\delta\Delta+\sum\int_l(p\delta u+q\delta v)dx=\sum\int_l(F_N\delta\epsilon+M\delta\kappa)dx \quad (1-14)$$

对于弹性杆件,以位移为自变函数,由几何方程可求得应变,由本构方程可求得应力,因此内力是位移的函数,即 $F_N=EA\epsilon$, $M=EI\kappa$ 。由于虚位移满足位移约束条件($\delta\Delta_R=0$),所以虚功方程(1-14)可以写成

$$\sum F_P\delta\Delta+\sum\int_l(p\delta u+q\delta v)dx=\sum\int_l(EA\epsilon\delta\epsilon+EI\kappa\delta\kappa)dx \quad (1-15)$$

由于外力是给定的,它与虚位移无关,因此由泛函分析可知虚功方程(1-15)可写为

$$\delta\left[\sum F_P\Delta+\sum\int_l(pu+qv)dx\right]=\delta\sum\frac{1}{2}\int_l(EA\epsilon^2+EI\kappa^2)dx$$

根据虚位移原理,虚功方程可写为

$$\delta\Pi=\delta\sum\frac{1}{2}\int_l(EA\epsilon^2+EI\kappa^2)dx-\delta\left[\sum F_P\Delta+\sum\int_l(pu+qv)dx\right]=0 \quad (1-16)$$

式(1-16)表示,根据虚位移原理,可能位移状态(u)为真实位移状态的充分、必要条件是:对应位移(u)的总势能的一阶变分为零,即对应位移(u)的总势能取驻值。进一步可以证

明,对于弹性问题,总势能为最小值,这就是最小势能原理。

需要指出的是,真实位移是满足平衡条件的位移,是既平衡又协调的位移。最小势能原理和虚位移原理等价,前者以能的形式来表达,后者用功的形式来表达。当应变能按材料本构关系写出时,势能原理也适用于任何力学行为的材料,此时只是一个驻值原理;只有当本构关系成线性时,才是最小值原理。

1.2.3 里兹法

利用能量原理(虚位移原理、最小势能原理)可以解决一些简单的力学问题,所采用的基本方法为里兹法。基本步骤如下:

- (1)选择一组满足给定位移边界条件的、独立的函数作为基函数(试函数)。
- (2)以基函数的线性组合作为假定位移场。组合系数称为广义坐标。
- (3)通过假定位移场将其他物理量表示成广义坐标的函数。
- (4)由能量原理建立广义坐标的线性代数方程组。
- (5)解方程求得广义坐标,得到近似位移场,然后由位移求得其他物理量。

下面以图 1-5 所示的结构为例,说明里兹法的应用方法。

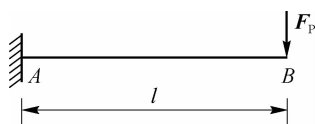


图 1-5 悬臂梁

对于图 1-5 所示悬臂梁,总势能为

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_l EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx - F_P \Delta_B$$

选择满足位移边界条件的基函数。设梁的挠曲线为

$$v = \alpha_1 x^2$$

式中, \$\alpha_1\$ 为广义坐标。

由此,将本来是无限自由度的问题化成一个广义坐标的有限自由度问题。根据设定的挠曲线虚位移,求得总势能为

$$\Pi = U + V = 2EI\alpha_1^2 l - F_P \alpha_1 l^2$$

由最小势能原理可知, \$\delta\Pi = 0\$。由 \$\frac{d\Pi}{d\alpha_1} = 0\$, 推得 \$4EI\alpha_1 - F_P l^2 = 0\$, 由此解得

$$\alpha_1 = \frac{F_P l}{4EI}$$

代回挠曲线方程,得 \$v = \frac{F_P l x^2}{4EI}\$, 故

$$v_B = \frac{F_P l^3}{4EI}$$

对于本题这样的静定问题,用图乘法计算 \$B\$ 点的挠度为 \$\Delta_B = F_P l^3 / 3EI\$, 误差为 25%。

先由几何方程求出曲率,然后再由本构关系求得杆端弯矩为 $M=EIv''$,则

$$M_A = EIv_A'' = F_P l / 2$$

如果直接计算,则杆端弯矩为 $M_A = F_P l$,误差为 50%。

若设梁的挠曲线方程为

$$v = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^3$$

则将无限自由度问题化成两个广义坐标的问题,此时

$$\Pi = U + V = 2EI\alpha_1^2 l + 6EI\alpha_1\alpha_2 l^2 + 6EI\alpha_2^2 l^3 - F_P\alpha_1 l^2 - F_P\alpha_2 l^3$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_1} = 4EI\alpha_1 l + 6EI\alpha_2 l^2 - F_P l^2 = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_2} = 6EI\alpha_1 l^2 + 12EI\alpha_2 l^3 - F_P l^3 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\alpha_1 = \frac{F_P}{2EI}, \quad \alpha_2 = -\frac{F_P}{6EI}$$

由此得

$$v = \frac{F_P x^2}{2EI} - \frac{F_P x^3}{6EI}, \quad M = F_P x - \frac{F_P x^2}{2EI}$$

故

$$v_B = F_P l^3 / 3EI, \quad M_A = F_P l$$

显然计算结果是精确的。

一般情况下,用里兹法求得的解往往是近似解。由上述例子可知,计算精度与所选位移有关,且位移的精度比弯矩的精度高。广义坐标越多越精确,但计算工作量也越大。理论上说,只要选取完备的基函数集合,里兹法的结果就是精确的。当所设位移场包含精确解时,取有限项就可以求得精确解。

1.3 杆件结构有限元分析方法

由上面的算例可以看出,用里兹法求解结构问题,首先要将位移模拟出来,结果的精度随模拟位移的“好坏”而定。对于一般的结构分析问题,可能位移的选取会很复杂。另外,在里兹法中,利用级数模拟位移,其系数为待求量(广义坐标),一般情况下,广义坐标并不是工程中所需的参数。

1.3.1 由最小势能原理推导位移法方程

为克服上述两方面的缺点,可将结构由节点分割成若干个单元(杆件),每一个单元的位移(u, v)可通过适当选取函数,由杆端(节点)位移 $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ 表示出来。因此,结构的位移可通过参数 Δ_i 的线性组合得到,进而计算出结构的总应变能(U)。由于杆件位移是节点位移 Δ_i 的线性表达式,由应变能 U 的计算公式(1-10)可知其一定是节点位移 Δ_i 的二次型,即

$$U = \sum_e \left[\frac{1}{2} \int_l EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 + \int_l EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \right] = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j k_{ij} \Delta_i \Delta_j \quad (1-17)$$

类似的分析,从外力势能的定义可知, V 必然是 Δ_i 的线性表达式,可表示为

$$V = - \sum \left[F_P \Delta + \int_l (pu + qv) dx \right] = \sum_i F_{Pi}^* \Delta_i \quad (1-18)$$

式中, F_{Pi}^* 的物理意义是由荷载引起的 Δ_i 方向固端广义力的总和。可以直接根据这一物理意义来求 F_{Pi}^* , 从而建立外力总势能表达式。结构总势能为

$$\Pi = U + V = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j k_{ij} \Delta_i \Delta_j + \sum_i F_{Pi}^* \Delta_i \quad (1-19)$$

令总势能对位移的变分等于零,即偏导数 $\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_i} = 0$, 可得

$$\sum_j k_{ij} \Delta_j + F_{Pi}^* = 0 \quad (1-20)$$

可见这一结果与结构力学的位移法方程完全相同。

如图 1-6 所示的两跨连续梁,将其分为 2 个单元,分别以 3 个节点上的转角为参数。在单元内,以两端点的转角位移为参数,则单元挠度方程为

$$v_1(x) = \theta_1 x(1-x/l)^2 - \theta_2 x^2(1-x/l)/l$$

$$v_2(x) = \theta_2 x(1-x/l)^2 - \theta_3 x^2(1-x/l)/l$$

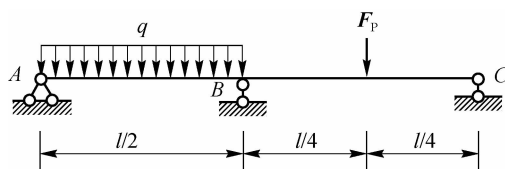


图 1-6 两跨连续梁

结构变形能为

$$U = \sum \frac{1}{2} \int_l EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{EI}{l} (4\theta_1^2 + 4\theta_1\theta_2 + 8\theta_2^2 + 4\theta_2\theta_3 + 4\theta_3^2)$$

结构外力势能为

$$V = - \int_l qv dx - F_P \Delta_d = - \frac{ql^2}{12} \theta_1 + \left(\frac{ql^2}{12} - \frac{F_P l}{8} \right) \theta_2 + \frac{F_P l}{8} \theta_3$$

式中, Δ_d 为集中荷载作用点的位移。根据最小势能原理,总势能对参数求变分, $\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_i} = 0$, 得

$$\begin{cases} 4 \frac{EI}{l} \theta_1 + 2 \frac{EI}{l} \theta_2 - \frac{ql^2}{12} = 0 \\ 2 \frac{EI}{l} \theta_1 + 8 \frac{EI}{l} \theta_2 + 2 \frac{EI}{l} \theta_3 + \frac{ql^2}{12} - \frac{F_P l}{8} = 0 \\ 2 \frac{EI}{l} \theta_2 + 4 \frac{EI}{l} \theta_3 + \frac{F_P l}{8} = 0 \end{cases}$$

显然,此即位移法方程,与传统做法不同的是,这里需要计算 3 个节点的转角位移。

1.3.2 有限元法分析思路——分片里兹法

对于大型复杂结构,需要借助电子计算机进行分析。“电算”和“手算”的基础理论相同,但由于人脑与计算机的不同,在做法和步骤上将有很大区别。手算需要将问题尽量简化,避免过多重复性的运算,电算则需要根据计算机的特点,将计算过程程序化,避免出现不确切因素。

根据 1.2 节中的推导,利用里兹法的分析思路,选取所有节点位移为参数,采用分片插值的方法模拟位移,利用能量原理导出基本方程,这就形成了有限元法。为叙述方便,利用矩阵理论进行运算,此即结构力学中的矩阵位移法。

由于选取所有节点位移为参数,解方程可直接求出基本未知量,所以用有限元法进行结构分析,关键是列出以节点位移为未知量的位移法基本方程: $\mathbf{K}\mathbf{\Delta} = \mathbf{F}$ 。具体分析过程如下:

首先,将结构分成若干个单元,以节点位移为参数进行插值,单元内位移为

$$\mathbf{u} = N_1\Delta_1 + N_2\Delta_2 + N_3\Delta_3 + \cdots = \mathbf{N}\mathbf{\Delta}^e \quad (1-21)$$

式中, \mathbf{N} 为插值函数; $\mathbf{\Delta}^e$ 为单元 e 的节点位移向量。

其次,利用几何方程求出变形,由本构关系求出内力,进而计算出单元总势能。

$$\begin{aligned} \Pi^e &= \frac{1}{2} \int_l EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx + \int_l EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \left[\int_l (pu + qv) dx + \sum F_P \Delta_d \right] \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{\Delta}^{eT} \mathbf{k}^e \mathbf{\Delta}^e - \mathbf{\Delta}^{eT} (\mathbf{F}_E + \mathbf{F}_d)^e = \frac{1}{2} \mathbf{\Delta}^{eT} \mathbf{k}^e \mathbf{\Delta}^e - \mathbf{\Delta}^{eT} \mathbf{F}^e \end{aligned} \quad (1-22)$$

式中, \mathbf{k}^e 为单元刚度矩阵; \mathbf{F}_E 为单元等效荷载矩阵; \mathbf{F}_d 为杆端力矩阵; \mathbf{F}^e 为单元的综合节点荷载矩阵。对于杆件内部的集中荷载,可将其视为杆件微段上的分布荷载进行处理,因此式(1-22)中的 F_P 为杆端力。

再次,叠加所有单元的总势能,并考虑节点上外力的外力势能,杆系结构的总势能为

$$\Pi = \sum_e \Pi^e - \sum_j F_{Pj} \Delta_j = \sum_e \left[\frac{1}{2} \mathbf{\Delta}^{eT} \mathbf{k}^e \mathbf{\Delta}^e - \mathbf{\Delta}^{eT} (\mathbf{F}_E + \mathbf{F}_d)^e \right] - \sum_j F_{Pj} \Delta_j \quad (1-23)$$

叠加时注意到杆端力总是成对出现的,外力势能互相抵消,故结构中所有单元杆端力的外力势能之和为零,则

$$\Pi = \sum_e \left(\frac{1}{2} \mathbf{\Delta}^{eT} \mathbf{k}^e \mathbf{\Delta}^e - \mathbf{\Delta}^{eT} \mathbf{F}_E^e \right) - \mathbf{\Delta}^T \mathbf{F}_{Pj} \quad (1-24)$$

式中, $\mathbf{\Delta}$ 为结构的节点位移向量。将单元节点位移向量变换为结构节点位移向量,即 $\mathbf{\Delta}^e = \mathbf{G}\mathbf{\Delta}$, 其中 \mathbf{G} 为反映位移协调的位移变换矩阵,则

$$\Pi = \sum_e \left(\frac{1}{2} \mathbf{\Delta}^T \mathbf{G}^T \mathbf{k}^e \mathbf{G}\mathbf{\Delta} - \mathbf{\Delta}^T \mathbf{G}^T \mathbf{F}_E^e \right) - \mathbf{\Delta}^T \mathbf{F}_{Pj} = \frac{1}{2} \mathbf{\Delta}^T \mathbf{K}\mathbf{\Delta} - \mathbf{\Delta}^T \mathbf{F} \quad (1-25)$$

最后,根据最小势能原理,总势能对参数求变分,得

$$\mathbf{K}\mathbf{\Delta} = \mathbf{F} \quad (1-26)$$

上述分析过程主要有两个基本步骤:一是单元分析,二是整体分析。单元分析是以节点位移为参数模拟单元位移场,分析单元特性,进而形成单元刚度矩阵 \mathbf{k}^e 和单元等效荷载矩

阵 \mathbf{F}_E^e 。整体分析是将单元集成成整体,按照刚度集成规则由单元刚度矩阵形成整体刚度矩阵 \mathbf{K} ,由单元等效荷载矩阵形成结构节点荷载向量 \mathbf{F} 。

1.3.3 有限元法的主要步骤

有限元法的主要步骤如下:

(1)结构离散。将结构离散成有限的单元结合体,此处的“有限”有两方面的含义,一是数量有限;二是单元大小有限,各单元之间由节点联结。

(2)单元分析。在单元内利用一般原理分析,以节点位移为参数模拟单元位移场,利用几何关系求单元变形,进而计算单元体的能量,最后利用能量原理建立节点位移和节点力之间的关系(单元刚度方程)。

(3)整体分析。将所有单元的总势能累加起来,并考虑节点上外力的外力势能,得出杆系结构的总势能,利用能量原理得出结构节点位移和外力之间的关系(总体刚度方程)。

(4)求解方程组,得到节点位移,并由节点位移求其他工程中有用的量。

对杆件结构问题,一般选取单根杆件为分析单元,离散较易;后三步因结构形式而异,下面分别介绍具体做法。

1.4 连续梁结构分析

下面以图 1-6 所示的连续梁为例,分析结构刚度方程的建立过程。首先将连续梁分为 2 个单元,分别以 3 个节点上的转角 Δ_1 、 Δ_2 、 Δ_3 为参数。

1.4.1 连续梁结构的单元分析

设梁单元长度为 l ,线刚度为 $i=EI/l$,分布荷载集度为 $q(x)$ 。因为连续梁单元端点无侧向位移,每个节点只有一个转角位移,梁单元有 2 个节点位移 Δ_1 、 Δ_2 。设梁的挠度曲线为

$$\begin{aligned} v(x) &= x\left(1-\frac{x}{l}\right)^2 \Delta_1 + \frac{x^2}{l}\left(\frac{x}{l}-1\right) \Delta_2 \\ &= N_1(x)\Delta_1 + N_2(x)\Delta_2 = \begin{Bmatrix} N_1 & N_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\Delta^e \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta^e &= \{\Delta_1 \quad \Delta_2\}^T = \{\theta_1 \quad \theta_2\}^T \\ \mathbf{N} &= [N_1 \quad N_2] \\ N_1(x) &= x\left(1-\frac{x}{l}\right)^2, \quad N_2(x) = \frac{x^2}{l}\left(\frac{x}{l}-1\right) \end{aligned}$$

式中, Δ^e 为单元杆端位移矩阵; N_1 、 N_2 为仅发生单位杆端(转角)位移时所引起的单元变形形式,因此称为形函数; \mathbf{N} 为形函数矩阵。

梁的曲率为

$$\kappa = \frac{d^2 v}{dx^2} = \left(\frac{6x}{l^2} - \frac{4}{l}\right)\Delta_1 + \left(\frac{6x}{l^2} - \frac{2}{l}\right)\Delta_2 = B_1(x)\Delta_1 + B_2(x)\Delta_2 = \mathbf{B}\Delta^e$$

其中, $B_1 = \frac{6x}{l^2} - \frac{4}{l}$, $B_2 = \frac{6x}{l^2} - \frac{2}{l}$, $\mathbf{B} = [B_1 \quad B_2]$ 。

由式(1-22)计算出单元的总势能为

$$\begin{aligned} \Pi^e &= \frac{1}{2} \int_l EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)^2 dx - \int_l qv dx - \sum F_P \Delta_d = \Delta^{eT} \frac{1}{2} \int_l EI \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx \Delta^e - \Delta^{eT} \left\{ \int_l \mathbf{N}^T q dx + \mathbf{F}_d \right\} \\ &= \frac{1}{2} \Delta^{eT} \mathbf{k}^e \Delta^e - \Delta^{eT} (\mathbf{F}_E + \mathbf{F}_d)^e = \frac{1}{2} \Delta^{eT} \mathbf{k}^e \Delta^e - \Delta^{eT} \mathbf{F}^e \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{k}^e = \frac{1}{2} \int_l EI \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx = \begin{bmatrix} 4i & 2i \\ 2i & 4i \end{bmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (1-27)$$

$$\mathbf{F}_E^e = \int_l \mathbf{N}^T q dx \quad (1-28)$$

对单元利用最小势能原理,总势能一阶变分等于零,也即对 Δ^e 的偏导数等于零,可得杆端力和杆端位移间的关系——单元刚度方程。

$$\mathbf{k}^e \Delta^e = \mathbf{F}_E^e + \mathbf{F}_d^e = \mathbf{F}^e \quad (1-29)$$

式(1-29)为杆件单元节点力和节点位移间的关系,称为单元刚度方程。

单元刚度矩阵的物理意义:单元刚度矩阵中的每个元素称为刚度系数,表示单位杆端位移所引起的杆端力。具体说,第 i 行第 j 列元素 k_{ij} 代表当第 j 个杆端位移分量 Δ_j 等于 1(另一个位移分量为零)时所引起的第 i 个杆端力分量 F_i 的值。 \mathbf{k} 中任意一列的元素分别表示当某个杆端位移分量等于 1(另一个位移分量为零)时所引起的杆端力。

由反力互等定理可知,单元刚度矩阵是对称矩阵,即 $k_{ij} = k_{ji}$ 。

需要指出的是,单元内任意一点位移由单元节点位移唯一确定,单元位移场的任意性只体现在单元节点位移的任意性上。有限元分析中不直接考虑单元平衡,而用单元位移场求得单元的总势能,用最小势能原理建立单元刚度方程,使单元“平衡”。一般来说,变分等于零的结果只能使单元达到一种积分意义下的“弱平衡”。

若梁中无荷载,单元刚度方程为

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i & 2i \\ 2i & 4i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

此即位移法中的转角位移方程。若梁受分布荷载作用,则单元等效荷载矩阵为

$$\mathbf{F}_E^e = \int_l \mathbf{N}^T q dx = \int_l \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} q dx = \begin{bmatrix} \frac{ql^2}{12} \\ -\frac{ql^2}{12} \end{bmatrix} \quad (1-30)$$

若梁受中点集中荷载作用,将其表示成 δ 函数,即 $q(x) = F_P \delta(x)$,则单元等效荷载矩阵为

$$\mathbf{F}_E^e = \int_l \mathbf{N}^T F_P \delta(x_i) dx = \begin{bmatrix} N_1(x_i) \\ N_2(x_i) \end{bmatrix}$$

若集中荷载作用在梁中点($x_i=1/2$),则

$$\mathbf{F}_E^e = \begin{bmatrix} \frac{F_P l}{8} \\ -\frac{F_P l}{8} \end{bmatrix} \quad (1-31)$$

由式(1-30)和式(1-31)可知,单元等效节点荷载为等截面直梁载常数的负值。

1.4.2 连续梁结构的整体分析

结构总势能为所有单元的总势能与所有节点集中力的外力势能之和。设结构被离散化为 m 个单元,总共有 n 个节点,由式(1-23)可得结构的总势能为

$$\begin{aligned} \Pi &= \text{各单元总势能之和} + \text{节点的外力势能} \\ &= \sum_e \Pi^e - \sum_j F_{Pj} \Delta_j = \sum_e \left[\frac{1}{2} \Delta^{eT} \mathbf{k}^e \Delta^e - \Delta^{eT} (\mathbf{F}_E + \mathbf{F}_d)^e \right] - \sum_j F_{Pj} \Delta_j \end{aligned}$$

注意到累加时杆端力总是成对出现,外力势能互相抵消,故结构的总势能为

$$\Pi = \sum_e \left(\frac{1}{2} \Delta^{eT} \mathbf{k}^e \Delta^e - \Delta^{eT} \mathbf{F}_E^e \right) - \Delta^T \mathbf{F}_{Pj}$$

为便于计算,需将单元的节点位移向量变换为结构的节点位移向量,即 $\Delta^e = \mathbf{G}\Delta$ 。故结构的总势能以 Δ 表示为

$$\Pi = \sum_e \left[\frac{1}{2} \Delta^T \mathbf{G}^T \mathbf{k}^e \mathbf{G} \Delta - \Delta^T \mathbf{G}^T \mathbf{F}_E^e \right] - \Delta^T \mathbf{F}_{Pj} = \frac{1}{2} \Delta^T \mathbf{K} \Delta - \Delta^T \mathbf{F}$$

由最小势能原理,得

$$\mathbf{K}\Delta = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_P = \mathbf{F}$$

其中

$$\mathbf{K} = \sum \mathbf{G}^T \mathbf{k}^e \mathbf{G} \quad (1-32)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_{Pj}, \quad \mathbf{F}_E = \sum \mathbf{G}^T \mathbf{F}_E^e \quad (1-33)$$

式中, \mathbf{K} 为结构刚度矩阵; \mathbf{F} 为结构综合节点荷载矩阵; \mathbf{F}_E 为结构等效节点荷载矩阵。

由式(1-32)可知,连续梁整体刚度矩阵可分两步计算:先将单元节点位移向量 Δ^e 转换为结构整体节点位移向量 Δ ,计算出以结构整体节点位移向量表示的单元刚度矩阵 \mathbf{K}^e ,再将其叠加,即

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{G}^T \mathbf{k}^e \mathbf{G}$$

$$\mathbf{K} = \sum \mathbf{K}^e$$

\mathbf{K}^e 可称为单元贡献矩阵。对图 1-6 所示的连续梁,有

$$\mathbf{G}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{\textcircled{1}} = \mathbf{G}^{\textcircled{1}\text{T}} \mathbf{k}^{\textcircled{1}} \mathbf{G}^{\textcircled{1}} = \begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & 4i_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{\textcircled{2}} = \mathbf{G}^{\textcircled{2}\text{T}} \mathbf{k}^{\textcircled{2}} \mathbf{G}^{\textcircled{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4i_2 & 2i_2 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & 4i_1 + 4i_2 & 2i_2 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix}$$

在位移法中,分别考虑每个节点转角 Δ_1 、 Δ_2 、 Δ_3 独自引起的节点力(见图 1-7),得

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & 4i_1 + 4i_2 & 2i_2 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix}$$

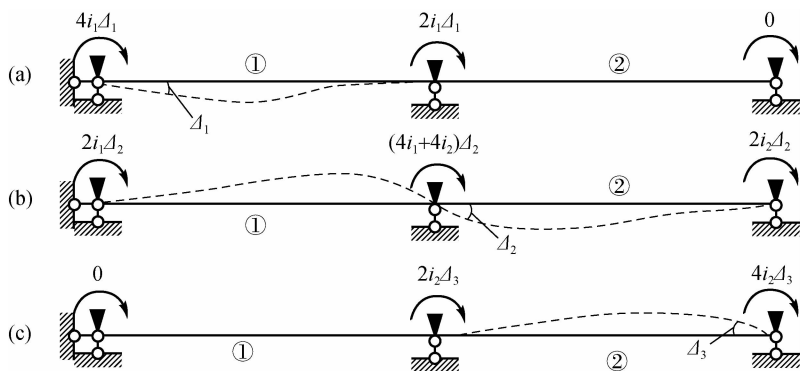


图 1-7 连续梁的变形

可见,利用逐个单元分析可获得结构原始刚度矩阵 \mathbf{K} 。整体刚度矩阵的元素 K_{ij} 为结构刚度系数,其物理意义为:当且仅当结构发生第 j 个位移分量单位位移时,所需施加的第 i 个位移分量方向的(广义)力。

整体刚度矩阵具有如下性质:

(1) 对称性。结构整体刚度矩阵是由单元刚度矩阵集合而成的,而单元刚度矩阵是对称的,所以结构整体刚度矩阵也必然是对称的,即 $K_{ij} = K_{ji}$ 。

(2) 稀疏带状性。结构中的任意一节点 i 通过单元只与其邻近的两个节点相关联,与 i 节点无单元相连的其他节点由集成规则可知其元素必然为零。因此,结构整体刚度矩阵是一个稀疏矩阵,它的绝大多数元素都是零,非零元素只集中在主对角线的两侧。

1.4.3 直接刚度法

对于大型结构,按上述整体分析方法需要处理很多零元素,很不实用,为提高效率,有限元程序中一般采用“直接刚度法”,即直接由单元刚度矩阵的贡献来获得结构刚度矩阵,由单元等效节点荷载矩阵的贡献来获得结构等效节点荷载矩阵。下面来推证单元贡献的集装规则。

对梁单元,与单元局部编码 1、2 对应的整体节点编号为 r 、 $s=r+1$ 。单元 e 的杆端位移矩阵为

$$\mathbf{\Delta}^e = \{\Delta_r \quad \Delta_s\}^T$$

$$\mathbf{G}^e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

将单元刚度矩阵写为

$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

则有

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{G}^T \mathbf{k}^e \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & k_{11} & k_{12} & \vdots \\ & k_{21} & k_{22} & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ r \\ s \\ n \end{matrix} \quad (1-34)$$

式(1-34)证明单元对整体贡献的规则如下:

$$k_{11} \Rightarrow K_{rr}, \quad k_{12} \Rightarrow K_{rs}$$

$$k_{21} \Rightarrow K_{sr}, \quad k_{22} \Rightarrow K_{ss}$$

即将单元刚度矩阵元素 k_{11} 送到结构原始刚度矩阵第 r 行第 r 列的位置并累加, 将元素 k_{12} 送到结构原始刚度矩阵第 r 行第 s 列的位置并累加, 其余类推。

矩阵位移法中, 节点位移的单元局部编码与对应的整体编码之间的对应关系由单元定位向量确定, 由单元的节点位移总码组成的向量称为单元定位向量, 记为 λ^e 。

注意到单元刚度矩阵 \mathbf{k}^e 和单元贡献矩阵 \mathbf{K}^e 中元素的排列方式: 在 \mathbf{k}^e 中元素按局部码排列, 在 \mathbf{K}^e 中元素按总码排列, 即由 \mathbf{k}^e 到 \mathbf{K}^e , 只是将 \mathbf{k}^e 的元素“重新排列”:

$$k_{(i)(j)}^e \rightarrow K_{\lambda_i \lambda_j}^e \quad (1-35)$$

单元集成法分两步进行: 第一步将 \mathbf{k}^e 中的元素按照单元定位向量 λ^e 在 \mathbf{K}^e 中定位, 第二步将 \mathbf{K}^e 中的各元素进行累加。这样做的目的是便于理解, 实际上可以将两步合并为一步: 将每个 \mathbf{k}^e 的元素按单元定位向量 λ^e 定位并直接在 \mathbf{K} 中累加, 即“边定位、边累加”, 由 \mathbf{k}^e 直接形成 \mathbf{K} 。计算程序为: 先将 \mathbf{K} 置零, 即 $\mathbf{K}=0$, 再将每个单元刚度矩阵 \mathbf{k}^e 的元素在 \mathbf{K} 中按 λ^e 定位并进行累加, 循环进行, 最后即得到 $\mathbf{K} = \sum \mathbf{K}^e$ 。

按上述程序, 连续梁整体刚度的集成过程及阶段结果如下:

- (1) 将 \mathbf{K} 置零, 这时 $\mathbf{K}=0$ 。
- (2) 将 $\mathbf{k}^{\textcircled{1}}$ 的元素在 \mathbf{K} 中按 $\lambda^{\textcircled{1}}$ 定位并进行累加, 这时 $\mathbf{K}=\mathbf{K}^{\textcircled{1}}$ 。
- (3) 将 $\mathbf{k}^{\textcircled{2}}$ 的元素在 \mathbf{K} 中按 $\lambda^{\textcircled{2}}$ 定位并进行累加, 这时 $\mathbf{K}=\mathbf{K}^{\textcircled{1}}+\mathbf{K}^{\textcircled{2}}$ 。

对于图 1-7 中的单元 11 和单元 22, 有

$$\lambda^{\textcircled{1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda^{\textcircled{2}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & 4i_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & 4i_1 + 4i_2 & 2i_2 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix}$$

同理, 结构等效荷载矩阵也可以由单元定位向量定位且累加得到。设

$$\mathbf{F}^e = \{F_1 \quad F_2\}^T$$

则

$$F_1 \Rightarrow F_{Er}, \quad F_2 \Rightarrow F_{Es}$$

即分别送到第 r 行、 s 行位置进行累加。对图 1-6 所示的连续梁, 有

$$\mathbf{F}_E^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{ql^2}{12} \\ -\frac{ql^2}{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_E^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{F_P l}{8} \\ -\frac{F_P l}{8} \end{bmatrix}$$

结构等效荷载矩阵为

$$\mathbf{F} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{ql^2}{12} \\ -\frac{ql^2}{12} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{ql^2}{12} \\ -\frac{ql^2}{12} + \frac{F_P l}{8} \\ -\frac{F_P l}{8} \end{bmatrix}$$

代入得图 1-6 所示连续梁结构的基本方程(结构刚度方程)为

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI_1}{l_1} & \frac{2EI_1}{l_1} & 0 \\ \frac{2EI_1}{l_1} & \frac{4EI_1}{l_1} + \frac{4EI_2}{l_2} & \frac{2EI_2}{l_2} \\ 0 & \frac{2EI_2}{l_2} & \frac{4EI_2}{l_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ql^2}{12} \\ -\frac{ql^2}{12} + \frac{F_P l}{8} \\ -\frac{F_P l}{8} \end{bmatrix}$$

1.4.4 连续梁结构刚度方程的求解及杆件内力计算

建立起结构整体刚度方程后, 解方程即可求得结构的全部节点位移, 并进行结构的刚度分析。实际工程设计中, 还应分析结构内力。假设结构节点位移矩阵 Δ 已经求得, 杆系结构各单元杆端力和单元上任意一截面内力可由单元刚度方程求得。

根据单元节点信息可知单元节点位移向量, 即可从结构节点位移矩阵 Δ 中取出该单元的节点位移矩阵 Δ^e 。根据单元刚度方程 $k^e \Delta^e = (\mathbf{F}_E + \mathbf{F}_d)^e$, 可得

$$\mathbf{F}_d^e = k^e \Delta^e - \mathbf{F}_E^e \quad (1-36)$$

式(1-36)即为单元杆端内力的计算公式。由此可见, 单元杆端力包含两部分: 一部分为杆端位移所引起的杆端力, 即 $k^e \Delta^e$; 另一部分为等效节点荷载所引起的杆端力, 也就是杆端位移为零时的杆端力, 即固端力。

【例 1-1】 作出如图 1-8 所示三跨连续梁的弯矩图。

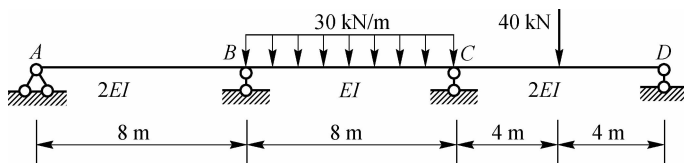


图 1-8 【例 1-1】用图

【解】 (1) 编码: 3 个单元, 4 个节点, 4 个节点位移分量。

单元定位向量为

$$\lambda^{①} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda^{②} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \lambda^{③} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(2) 单元刚度矩阵为

$$\bar{k}^{①} = \bar{k}^{③} = \begin{bmatrix} 4i & 2i \\ 2i & 4i \end{bmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\bar{k}^{②} = \begin{bmatrix} 4i & 2i \\ 2i & 4i \end{bmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(3) 形成整体刚度矩阵 \mathbf{K} 。

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 8+4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

(4) 计算等效节点荷载 \mathbf{F} 。

$$\mathbf{F}_E^{②} = \begin{bmatrix} 160 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ -160 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_E^{③} = \begin{bmatrix} 40 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ -40 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 160 \\ -160+40 \\ -40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 160 \\ -120 \\ -40 \end{bmatrix}$$

(5) 解方程。由

$$\frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 160 \\ -120 \\ -40 \end{bmatrix}$$

解得

$$\begin{pmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -75 \\ 150 \\ -110 \\ 15 \end{pmatrix} \frac{l}{8EI} (\text{rad})$$

(6) 求杆端力。

$$\mathbf{F}^{\text{①}} = \mathbf{k}^{\text{①}} \mathbf{\Delta}^{\text{①}} - \mathbf{F}_E^{\text{①}} = \frac{EI}{l} \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -75 \\ 150 \end{pmatrix} \frac{l}{8EI} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 112.5 \end{pmatrix} (\text{kN} \cdot \text{m})$$

$$\mathbf{F}^{\text{②}} = \mathbf{k}^{\text{②}} \mathbf{\Delta}^{\text{②}} - \mathbf{F}_E^{\text{②}} = \frac{EI}{l} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 150 \\ -110 \end{pmatrix} \frac{l}{8EI} - \begin{pmatrix} 160 \\ -160 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -112.5 \\ 142.5 \end{pmatrix} (\text{kN} \cdot \text{m})$$

$$\mathbf{F}^{\text{③}} = \mathbf{k}^{\text{③}} \mathbf{\Delta}^{\text{③}} - \mathbf{F}_E^{\text{③}} = \frac{EI}{l} \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -110 \\ 15 \end{pmatrix} \frac{l}{8EI} - \begin{pmatrix} 40 \\ -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -142.5 \\ 0 \end{pmatrix} (\text{kN} \cdot \text{m})$$

(7) 利用各跨杆端弯矩,即可作出三跨连续梁的弯矩图,如图 1-9 所示。

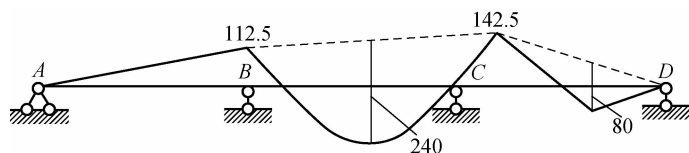


图 1-9 三跨连续梁的弯矩图

1.5 桁架结构分析

桁架结构是工程中的常用结构,本节按有限元法思路分析桁架。一般情况下,桁架结构的杆件较多,且各单元方位不同,分析时须选用两套坐标系:单元分析中使用单元局部坐标系,整体分析时使用统一的整体坐标系。

1.5.1 桁架结构的单元分析

桁架结构的单元分析仍是建立单元杆端力和杆端位移之间的关系,即单元刚度方程。分析过程是先建立单元位移场(位移模式),再计算单元总势能,最后由最小势能原理建立单元刚度方程和进行坐标变换。

1. 建立单元位移场(位移模式)

设拉(压)杆单元长度为 l ,横截面积为 A ,材料弹性模量为 E ,所受轴向分布荷载集度为 $p(x)$ 。单元的两个端点分别标明 1 和 2,由端点 1 到端点 2 的方向规定为杆轴的正方向,则端点 1 称为始端,端点 2 称为末端,在图 1-10 中用箭头标明。在杆件上建立坐标系 $\bar{x}\bar{y}$,其中 \bar{x} 轴与杆轴重合。这个单元坐标系称为局部坐标系,局部坐标系下的物理量用加上划线标记,如 $\bar{\mathbf{\Delta}}$ 、 $\bar{\mathbf{F}}^e$ 等。

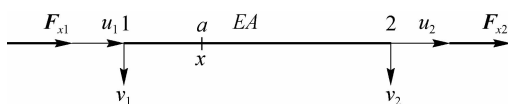


图 1-10 拉(压)杆单元

拉(压)杆件中,只考虑轴向变形。设两个端点的轴向位移 $u_1 = \Delta_1$ 、 $u_2 = \Delta_2$,在局部坐标系下,杆中 a 点的坐标为 x ,则用杆端轴向位移表示杆中任意一点的轴向位移为

$$\bar{u} = \left(1 - \frac{x}{l}\right)\bar{\Delta}_1 + \frac{x}{l}\bar{\Delta}_2 = N_1 \bar{\Delta}_1 + N_2 \bar{\Delta}_2 = (N_1 \quad N_2) \begin{pmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{N} \bar{\Delta}^e \quad (1-37)$$

式(1-37)称为单元位移场。其中, N_1 、 N_2 为仅发生单位杆端位移时所引起的单元变形形式,可称为形函数; \mathbf{N} 为形函数矩阵; $\bar{\Delta}^e$ 为局部坐标系下的单元杆端位移矩阵。

显然,形函数具有如下性质:

(1)本端为 1,它端为 0 时。

$$\left. \begin{aligned} N_1(0) = 1, N_2(l) = 0 \\ N_1(l) = 0, N_2(0) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (1-38)$$

(2)任意一点总和为 1 时。

$$N_1(x) + N_2(x) = 1 \quad (1-39)$$

注意:此时单元内任意一点的位移由单元节点位移唯一确定,单元位移场的任意性只体现在单元节点位移的任意性上。

2. 计算单元总势能

将式(1-37)代入轴向拉(压)杆件的几何方程,得杆件单元应变为

$$\epsilon = \frac{d\bar{u}}{dx} = \frac{dN}{dx} \bar{\Delta}^e = \left(\frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \right) \bar{\Delta}^e = \left(-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l} \right) \bar{\Delta}^e = (B_1 \quad B_2) \bar{\Delta}^e = \mathbf{B} \bar{\Delta}^e \quad (1-40)$$

式中, \mathbf{B} 为应变矩阵。将式(1-40)代入拉(压)杆的物理方程可得单元应力为

$$\sigma = E\epsilon = \mathbf{E} \mathbf{B} \bar{\Delta}^e = E \left(-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l} \right) \bar{\Delta}^e \quad (1-41)$$

单元的应变能为

$$U = \frac{1}{2} \int_l EA \left(\frac{d\bar{u}}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_l \bar{\Delta}^{eT} \mathbf{B}^T E \mathbf{A} \mathbf{B} \bar{\Delta}^e dx = \frac{1}{2} \bar{\Delta}^{eT} \bar{\mathbf{k}}^e \bar{\Delta}^e$$

式中, $\bar{\mathbf{k}}^e$ 为局部坐标系下的单元刚度矩阵。根据单元上的荷载,单元的外力势能为

$$V = \int_l p \bar{u} dx + \sum F_p \bar{\Delta} = -\bar{\Delta}^{eT} \left[\bar{\mathbf{F}}_p + \int_l \mathbf{N}^T(x) p(x) dx \right] = -\bar{\Delta}^{eT} [\bar{\mathbf{F}}_d + \bar{\mathbf{F}}_E]^e$$

式中, $\bar{\mathbf{F}}_E$ 为局部坐标系下的单元等效节点荷载。注意到桁架结构分析时,一般不考虑杆件内部的作用力,即 $\bar{\mathbf{F}}_E = 0$,故单元总势能为

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \bar{\Delta}^{eT} \bar{\mathbf{k}}^e \bar{\Delta}^e - \bar{\Delta}^{eT} \bar{\mathbf{F}}^e$$

3. 建立单元刚度方程

由最小势能原理,总势能一阶变分等于零,即对 Δ^e 的偏导数等于零,得单元刚度方程

$$\bar{k}^e \bar{\Delta}^e = \bar{F}^e \quad (1-42)$$

式中,单元刚度矩阵为

$$\bar{k}^e = \frac{1}{2} \int_l \mathbf{B}^T E A \mathbf{B} dx = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-43)$$

单元刚度矩阵中的每个元素称为刚度系数,表示单位杆端位移所引起的杆端力。显然,单元刚度矩阵是对称矩阵,即 $k_{ij} = k_{ji}$,这实际上是根据反力互等定理得出的结论。

特别指出:单元刚度矩阵具有奇异性,即单元刚度矩阵不存在逆矩阵。单元刚度矩阵的奇异性的物理意义为,对于自由式杆件单元,杆端发生任何位移可唯一确定杆端力;但由杆端力不能唯一确定杆端位移。杆件的位移可分解成刚性位移和变形位移,刚性位移的选取具有任意性。因此,无约束单元的刚性位移不可能由平衡力系唯一确定,即在给定平衡外力作用下,由刚度方程不可能求得唯一的位移。因此,自由式单元的刚度矩阵一定是奇异的。

单元刚度矩阵是根据杆件坐标系中的轴向位移得出的,考虑到横向 y 方向的位移,在局部坐标系中,单元刚度矩阵应为 4×4 的矩阵,在式(1-43)中,添加坐标 y 方向位移所对应的第 2、4 行和列元素全部为零,即

$$\bar{k}^e = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1-44)$$

4. 坐标变换

桁架结构中每个单元方位各不相同,要考虑节点位移协调、受力平衡,必须选用统一的坐标系——结构整体坐标系。显然,两套坐标系下的对应物理量间存在相互转换关系。符号约定:局部坐标系下的物理量用加上划线标记,如 $\bar{\Delta}$ 、 \bar{F} 等;整体坐标系下的物理量不加上划线,如 Δ 、 F 等。显然,两套坐标系下的杆端位移向量存在如下关系:

$$\bar{\Delta}^e = \mathbf{T} \Delta^e \quad (1-45)$$

式中, $\bar{\Delta}^e$ 为局部坐标系下的单元杆端位移向量; \mathbf{T} 为位移转换矩阵或坐标变换矩阵; Δ^e 为整体坐标系下的单元杆端位移向量。

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

对于平面桁架单元,设由整体坐标到局部坐标之间的夹角为 α ,可得

$$\lambda = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

不难验证, \mathbf{T} 为正交矩阵,即 $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$ 。因此

$$\Delta^e = \mathbf{T}^T \bar{\Delta}^e$$

同理,对单元杆端力向量,有

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \mathbf{T}\mathbf{F}^e, \mathbf{F}^e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{F}}^e \quad (1-46)$$

考虑到局部坐标系下的单元刚度方程,则有

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{F}}^e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{k}}^e \bar{\mathbf{\Delta}}^e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{k}}^e \mathbf{T} \mathbf{\Delta}^e \quad (1-47)$$

如果记

$$\mathbf{k}^e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{k}}^e \mathbf{T} \quad (1-48)$$

为整体坐标系下的单元刚度矩阵,则式(1-47)可改写为

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{k}^e \mathbf{\Delta}^e \quad (1-49)$$

式(1-49)在形式上与局部坐标系下的单元刚度方程相同,将杆端位移和杆端力联系起来,称为整体坐标单元刚度方程。由式(1-48)可知,整体坐标系下的单元刚度矩阵与局部坐标系下的单元刚度矩阵具有相同的性质。

将变换矩阵 \mathbf{T} 代入式(1-48),可得任意方位桁架单元在整体坐标系下的单元刚度矩阵为

$$\mathbf{k}^e = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (1-50)$$

1.5.2 桁架结构的整体分析

利用整体坐标系对桁架结构进行整体分析,即认为力和位移都是对应于整体坐标系的。

1. 用最小势能原理进行结构整体分析

结构总势能为所有单元的总势能与所有节点集中力的外力势能之和。设结构被离散化为 m 个单元,总共有 n 个节点,由式(1-23)得结构的总势能为

$$\begin{aligned} \Pi &= \text{各单元总势能之和} + \text{节点的外力势能} \\ &= \sum \Pi^e - \sum F_{Pj} \Delta_j = \sum \left(\frac{1}{2} \mathbf{\Delta}^{eT} \mathbf{k}^e \mathbf{\Delta}^e - \mathbf{\Delta}^{eT} \mathbf{F}^e \right) - \mathbf{\Delta}^T \mathbf{F}_P \end{aligned}$$

式中, \mathbf{k}^e 为单元 e 在整体坐标系下的单元刚度矩阵; $\mathbf{\Delta}^e$ 为整体坐标系下的单元杆端位移矩阵; $\mathbf{\Delta}$ 为结构的节点位移向量; \mathbf{F}^e 为整体坐标系下的单元杆端力矩阵; \mathbf{F}_P 为直接作用于节点的荷载矩阵。需要注意的是,由于单元杆端力在计算过程中是成对出现的,根据作用与反作用原理,其做功总和为零,因此

$$\Pi = \sum \frac{1}{2} \mathbf{\Delta}^{eT} \mathbf{k}^e \mathbf{\Delta}^e - \mathbf{\Delta}^T \mathbf{F}_P \quad (1-51)$$

单元节点位移向量与结构节点位移向量的转换关系为 $\mathbf{\Delta}^e = \mathbf{G} \mathbf{\Delta}$, \mathbf{G} 为转换矩阵,则

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & r & \cdots & s & \cdots & n \\ 0 & \cdots & \mathbf{I} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \mathbf{I} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (1-52)$$

式中, \mathbf{I} 为二阶单位矩阵。将式(1-52)代入式(1-51), 得

$$\Pi = \sum \frac{1}{2} \Delta^T \mathbf{G}^T \mathbf{k}^e \mathbf{G} \Delta^e - \Delta^T \mathbf{F}_j = \frac{1}{2} \Delta^T \mathbf{K} \Delta^e - \Delta^T \mathbf{F}_j$$

式中, \mathbf{K} 为结构整体刚度矩阵, 仍按式(1-32)计算; \mathbf{F}_j 为作用在 j 节点上的集中力。

根据最小势能原理, 令结构势能的一阶变分为零, 即 $\delta\Pi = 0$, 得结构整体刚度方程为

$$\mathbf{K}\Delta = \mathbf{F}_p \quad (1-53)$$

由式(1-53)可知, 当 $\Delta_j = 1$ 时 ($j=1, 2, \dots, n; n$ 为总未知量个数, 其他位移为零), 有

$$K_{ij} = F_i$$

由此可见, 整体刚度矩阵元素 K_{ij} 的物理意义: 当结构仅发生第 j 个位移分量单位位移时, 所需施加的第 i 个位移分量方向的外力。根据这一物理意义, 在进行手算分析时, 可在使结构仅产生 $\Delta_i = 1$ 条件下, 根据位移法的形常数和上述物理意义直接求得 K_{ij} 。

由单元刚度矩阵的性质和式(1-32)可知, 桁架结构的整体刚度矩阵具有以下性质:

(1) 对称性。结构整体刚度矩阵是由单元刚度矩阵集合而成的, 而单元刚度矩阵是对称的, 所以整体刚度矩阵也必然是对称的。

(2) 奇异性。由于自由式单元刚度矩阵本身是奇异的, 因此由自由式单元刚度矩阵集装成的整体原始刚度矩阵具有奇异性, 即若无任何约束, 结构将在给定的外荷载作用下产生运动, 不能得到节点位移的唯一解。

(3) 稀疏带状性。结构中的任意一个节点 i 通过单元只与其邻近的少数节点相关联, 与 i 节点无单元关联的其他节点由集成规则可知其元素必然为零。因此, 结构整体刚度矩阵是一个稀疏矩阵, 很多元素是零; 当合理编码时, 非零元素只在主对角线两侧一狭窄带状区域内。

2. 用直接刚度法集成整体刚度方程

以式(1-32)计算整体刚度矩阵, 可分两步进行: 先将单元节点位移向量 Δ^e 转换成结构整体节点位移向量 Δ , 计算出以结构整体节点位移向量表示的单元刚度矩阵 \mathbf{K}^e , 再将其叠加, 即

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{G}^T \mathbf{k}^e \mathbf{G} \quad (1-54)$$

$$\mathbf{K} = \sum \mathbf{K}^e \quad (1-55)$$

式中, \mathbf{K}^e 为单元贡献矩阵。对于大型结构, 由式(1-55)计算结构整体刚度矩阵 \mathbf{K} , 需要处理很多零元素, 很不实用。所以在有限元程序中采用直接刚度法计算结构整体刚度矩阵 \mathbf{K} , 即直接由单元刚度矩阵的贡献来获得结构刚度矩阵, 由单元等效节点荷载矩阵的贡献来获得结构等效节点荷载矩阵。下面来推证单元贡献的集装规则。

对杆件单元, 与单元节点局部编码 1、2 对应的整体节点编号为 r, s , 为不失一般性, 可设 $r < s$ 。单元 e 的杆端位移矩阵为

$$\Delta^e = \begin{Bmatrix} \Delta_r \\ \Delta_s \end{Bmatrix}$$

将对应的单元刚度矩阵按节点分块：

$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} \end{bmatrix}$$

将式(1-52)代入式(1-32)进行矩阵乘法运算可得

$$\mathbf{G}^T \mathbf{k}^e \mathbf{G} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & \cdots & r & \cdots & s & \cdots & n \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ & & \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} & & & \\ & & \vdots & \vdots & & & \\ & & \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} & & & \\ 0 & \cdots & & & & & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ r \\ \vdots \\ s \\ \vdots \\ n \end{matrix} \end{matrix} \quad (1-56)$$

式(1-56)证明单元对整体贡献的规则如下：

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k}_{11}^e &\Rightarrow \mathbf{K}_{rr}, & \mathbf{k}_{12}^e &\Rightarrow \mathbf{K}_{rs} \\ \mathbf{k}_{21}^e &\Rightarrow \mathbf{K}_{sr}, & \mathbf{k}_{22}^e &\Rightarrow \mathbf{K}_{ss} \end{aligned} \right\} \quad (1-57)$$

即将单元刚度矩阵子块 \mathbf{k}_{11}^e 送到结构原始刚度矩阵第 r 行第 r 列子矩阵的位置并累加，将子块 \mathbf{k}_{12}^e 送到结构原始刚度矩阵第 r 行第 s 列子矩阵的位置并累加，其余类推。

利用矩阵位移法中单元定位向量 λ^e 的概念，将单元刚度矩阵 \mathbf{k}^e 中的元素在单元贡献矩阵 \mathbf{K}^e 中按 $\mathbf{k}_{(i)(j)}^e \rightarrow \mathbf{K}_{\lambda_i \lambda_j}^e$ 重新排列，“边定位、边累加”，直接形成 \mathbf{K} 。

从集装过程可以看出，主对角线元素是由同一节点相关单元的刚度矩阵主对角线元素叠加而成的，因此一定是正值。

1.5.3 桁架结构刚度方程的求解及杆件内力计算

由集成规律可知，建立结构整体刚度方程时，刚度矩阵是奇异的。因此，为了从整体刚度方程求得实际问题的解答，必须引入支承条件，修改整体刚度方程。

1. 处理边界条件

实际工程结构中，某些节点位移被约束为零，与此相应的节点力为约束反力。将节点位移按约束情况重新排列，则整体刚度方程可表示为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{PP} & \mathbf{K}_{PR} \\ \mathbf{K}_{RP} & \mathbf{K}_{RR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_P \\ \mathbf{F}_R \end{pmatrix} \quad (1-58)$$

式中， Δ 为待求节点位移； \mathbf{F}_P 为已知节点荷载向量； \mathbf{F}_R 为约束反力； \mathbf{K}_{PP} 、 \mathbf{K}_{PR} 、 \mathbf{K}_{RP} 、 \mathbf{K}_{RR} 为与其相应的刚度矩阵的分块矩阵。

方程(1-58)可分解为

$$\mathbf{K}_{PP} \Delta = \mathbf{F}_P \quad (1-59)$$

$$\mathbf{K}_{RP} \Delta = \mathbf{F}_R \quad (1-60)$$

利用方程(1-60)可以确定支承反力。方程(1-59)为实际结构的位移法基本方程——刚度方程, \mathbf{K}_{pp} 为结构的整体刚度矩阵, 它是在原始刚度矩阵中删除与已知为零的节点位移对应的行和列而形成的。若总体节点位移为 n 个, 其中有已知节点位移 m 个, 则得到一个组求解 $n-m$ 阶方阵, 新方程的阶数降低了 m 阶, 这种方法称为重新排列法。

引入边界条件后, 整个刚度方程完全满足了结构在支座处的位移边界条件, 如果位移边界条件足以消除结构的刚性位移, 则修改后的刚度矩阵改称为整体刚度矩阵, 此时它已是非奇异的对称矩阵, 通过求解结构刚度方程, 即可求得未知的节点位移。

需要指出的是, 重新排列法需要重新组合方程, 节点位移的顺序被打乱, 给编制程序带来一些麻烦, 在有限元程序中一般运用“对角元素乘大数法”(有兴趣的读者请参考有关书籍)。

2. 杆件内力计算

对于杆系结构, 求得了结构的全部节点位移后, 就可以解决结构的刚度问题。假设结构节点位移矩阵 $\mathbf{\Delta}$ 已经求得, 则杆系结构各单元杆端力和单元上任意一个截面内力可由单元刚度方程求得。

根据单元节点信息可知单元节点位移向量, 即可从结构节点位移矩阵 $\mathbf{\Delta}$ 中取出该单元的节点位移矩阵 $\mathbf{\Delta}^e$ 。根据单元的相关信息, 可以形成单元坐标转换矩阵 \mathbf{T} ; 根据单元刚度方程 $\bar{\mathbf{k}}^e \bar{\mathbf{\Delta}}^e = \bar{\mathbf{F}}^e$ 及节点位移坐标转换条件 $\bar{\mathbf{\Delta}}^e = \mathbf{T}\mathbf{\Delta}^e$, 可得

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \bar{\mathbf{k}}^e \bar{\mathbf{\Delta}}^e = \bar{\mathbf{k}}^e \mathbf{T}\mathbf{\Delta}^e \quad (1-61)$$

式(1-61)为单元杆端内力的计算公式。注意杆件内力和杆端力的符号规定, 有

$$F_N = -\bar{F}_1 = \bar{F}_3 \quad (1-62)$$

【例 1-2】 计算如图 1-11 所示的桁架。已知: $l=2$ m, 各杆 $EA=1.2 \times 10^6$ kN。

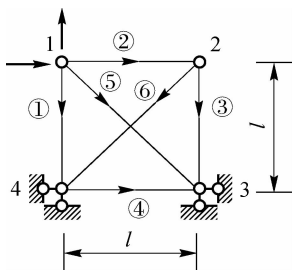


图 1-11 【例 1-2】用图

【解】 (1) 节点编码和单元划分(见图 1-11): 6 个单元, 4 个节点, 8 个位移。

单元定位向量为

$$\lambda^{\textcircled{1}} = \{1 \ 2 \ 7 \ 8\}^T, \quad \lambda^{\textcircled{2}} = \{1 \ 2 \ 3 \ 4\}^T, \quad \lambda^{\textcircled{3}} = \{3 \ 4 \ 5 \ 6\}^T,$$

$$\lambda^{\textcircled{4}} = \{7 \ 8 \ 5 \ 6\}^T, \quad \lambda^{\textcircled{5}} = \{1 \ 2 \ 5 \ 6\}^T, \quad \lambda^{\textcircled{6}} = \{3 \ 4 \ 7 \ 8\}^T$$

(2) 计算单元刚度矩阵。

对于单元①和单元③, $\alpha=90^\circ$, 由式(1-50), 得

$$\mathbf{k}^{\text{①}} = \mathbf{k}^{\text{③}} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

对于单元②和单元④, $\alpha = 0^\circ$, 得

$$\mathbf{k}^{\text{②}} = \mathbf{k}^{\text{④}} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对于单元⑤, $\alpha = 45^\circ$, 得

$$\mathbf{k}^{\text{⑤}} = \frac{EA}{l} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

对于单元⑥, $\alpha = 135^\circ$, 得

$$\mathbf{k}^{\text{⑥}} = \frac{EA}{l} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) 单元贡献矩阵。

$$\mathbf{K}^{\text{①}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{22} \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}, \quad \mathbf{K}^{\text{②}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}^{\text{③}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}, \quad \mathbf{K}^{\text{④}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{22} & \mathbf{k}_{21} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{12} & \mathbf{k}_{11} \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}^{\text{⑤}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}, \quad \mathbf{K}^{\text{⑥}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{21} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{22} \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

(4) 集成整体刚度矩阵。将各单元刚度矩阵按节点分块, “对号入座”, 将所有单元集装

后得

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{K}] &= [\mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)} + \mathbf{K}^{(3)} + \mathbf{K}^{(4)} + \mathbf{K}^{(5)} + \mathbf{K}^{(6)}] \\
 \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ k_{11}^{(1)} + k_{11}^{(2)} + k_{11}^{(5)} & k_{12}^{(2)} & k_{12}^{(5)} & k_{12}^{(1)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} + k_{11}^{(3)} + k_{11}^{(6)} & k_{12}^{(3)} & k_{12}^{(6)} \\ k_{21}^{(5)} & k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(3)} + k_{22}^{(4)} + k_{22}^{(5)} & k_{21}^{(4)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{21}^{(6)} & k_{12}^{(4)} & k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(4)} + k_{22}^{(6)} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \\
 \mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1.35 & 0.35 & -1 & 0 & -0.35 & -0.35 & 0 & 0 \\ 0.35 & 1.35 & 0 & 0 & -0.35 & -0.35 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -0.35 & -0.35 & 0 & 0 & 1.35 & 0.35 & -1 & 0 \\ -0.35 & -0.35 & 0 & -1 & 0.35 & 1.35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1.35 & 0.35 & -1 & 0 & -0.35 & -0.35 & 0 & 0 \\ 0.35 & 1.35 & 0 & 0 & -0.35 & -0.35 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1.35 & -0.35 & 0 & 0 & -0.35 & 0.35 \\ 0 & 0 & -0.35 & 1.35 & 0 & -1 & 0.35 & -0.35 \\ -0.35 & -0.35 & 0 & 0 & 1.35 & 0.35 & -1 & 0 \\ -0.35 & -0.35 & 0 & -1 & 0.35 & 1.35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.35 & 0.35 & -1 & 0 & 1.35 & -0.35 \\ 0 & -1 & 0.35 & -0.35 & 0 & 0 & -0.35 & 1.35 \end{bmatrix}$$

(5)边界条件处理。边界约束： $\Delta_5=0, \Delta_6=0, \Delta_7=0, \Delta_8=0$ ，在原始刚度矩阵中删除第5、6、7、8行和第5、6、7、8列，得

$$\mathbf{K}_{PP} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1.35 & 0.35 & -1 & 0 \\ 0.35 & 1.35 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1.35 & -0.35 \\ 0 & 0 & -0.35 & 1.35 \end{bmatrix}$$

(6)解方程。由

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1.35 & 0.35 & -1 & 0 \\ 0.35 & 1.35 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1.35 & -0.35 \\ 0 & 0 & -0.35 & 1.35 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

解得

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{l}{EA} \begin{Bmatrix} 2.69 \\ -1.44 \\ 2.14 \\ 0.558 \end{Bmatrix}$$

(7)求各杆杆端力。 $\bar{\mathbf{F}}^e = \bar{\mathbf{k}}^e \bar{\mathbf{\Delta}}^e = \bar{\mathbf{k}}^e \mathbf{T} \mathbf{\Delta}^e$ 。

对于单元①, $\alpha=90^\circ$, 得

$$\bar{\mathbf{F}}^{\textcircled{1}} = \mathbf{T}^{\textcircled{1}} \mathbf{F}^{\textcircled{1}} = \mathbf{T}^{\textcircled{1}} \mathbf{k}^{\textcircled{1}} \boldsymbol{\Delta}^{\textcircled{1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.69 \\ -1.44 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.44 \\ 0 \\ 1.44 \\ 0 \end{pmatrix}$$

对于单元②, $\alpha=0^\circ$, 得

$$\bar{\mathbf{F}}^{\textcircled{2}} = \mathbf{F}^{\textcircled{2}} = \mathbf{k}^{\textcircled{2}} \boldsymbol{\Delta}^{\textcircled{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.69 \\ -1.44 \\ 2.14 \\ 0.558 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.558 \\ 0 \\ -0.558 \\ 0 \end{pmatrix}$$

对于单元③, $\alpha=90^\circ$, 得

$$\bar{\mathbf{F}}^{\textcircled{3}} = \mathbf{T}^{\textcircled{3}} \mathbf{F}^{\textcircled{3}} = \mathbf{T}^{\textcircled{3}} \mathbf{k}^{\textcircled{3}} \boldsymbol{\Delta}^{\textcircled{3}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.14 \\ 0.558 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.558 \\ 0 \\ -0.558 \\ 0 \end{pmatrix}$$

对于单元④, $\alpha=0^\circ$, 得

$$\bar{\mathbf{F}}^{\textcircled{4}} = \mathbf{F}^{\textcircled{4}} = \mathbf{k}^{\textcircled{4}} \boldsymbol{\Delta}^{\textcircled{4}} = \mathbf{0}$$

对于单元⑤, $\alpha=45^\circ$, 得

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}^{\textcircled{5}} &= \mathbf{T}^{\textcircled{5}} \mathbf{F}^{\textcircled{5}} = \mathbf{T}^{\textcircled{5}} \mathbf{k}^{\textcircled{5}} \boldsymbol{\Delta}^{\textcircled{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.69 \\ -1.44 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.626 \\ 0 \\ -0.626 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

对于单元⑥, $\alpha=135^\circ$, 得

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}^{\textcircled{6}} &= \mathbf{T}^{\textcircled{6}} \mathbf{F}^{\textcircled{6}} = \mathbf{T}^{\textcircled{6}} \mathbf{k}^{\textcircled{6}} \boldsymbol{\Delta}^{\textcircled{6}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.136 \\ 0.558 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.789 \\ 0 \\ 0.789 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

由式(1-62)可知, 各杆内力为

$$\begin{aligned} F_{N1} &= 1.44 \text{ kN}, & F_{N2} &= -0.558 \text{ kN}, & F_{N3} &= -0.558 \text{ kN}, \\ F_{N4} &= 0, & F_{N5} &= -0.626 \text{ kN}, & F_{N6} &= 0.789 \text{ kN} \end{aligned}$$

1.6 刚架结构分析

在工程结构中, 一般单元内既需要考虑拉伸变形, 也需要考虑弯曲变形。用有限元法分析刚架结构, 仍然是将结构拆分成若干个单元, 先进行单元分析, 然后进行整体分析, 形成位移法基本方程。对于小变形问题, 拉伸变形和弯曲变形不耦合, 可分别考虑, 拉伸变形已在 1.5 节中讨论过, 下面讨论弯曲变形。

1.6.1 单元弯曲特性

刚架结构的单元分析仍是建立单元杆端力和杆端位移之间的关系,即单元刚度方程。分析过程是先建立单元弯曲位移场,然后再计算单元总势能,最后由最小势能原理建立单元刚度方程。

1. 建立单元弯曲位移场

刚架单元如图 1-12 所示,杆端位移为 $\Delta_1=v_1$ 、 $\Delta_2=\theta_1$ 、 $\Delta_3=v_2$ 、 $\Delta_4=\theta_2$ 。由于边界位移条件有 4 个,从泰勒级数展开角度来看,若将距节点 1 局部坐标 x 处的杆轴线挠度取为 x 的三次多项式,则可得

$$\begin{aligned} \bar{v}(x) &= \left(1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}\right)\bar{v}_1 + x\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2\theta_1 + \left(3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}\right)\bar{v}_2 + \frac{x^2}{l}\left(\frac{x}{l} - 1\right)\theta_2 \\ &= \left[1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}, x\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2, \left(3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}\right), \frac{x^2}{l}\left(\frac{x}{l} - 1\right)\right] \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \end{Bmatrix} \\ &= \mathbf{N}\bar{\mathbf{\Delta}}^e \end{aligned} \quad (1-63)$$

此即单元挠度位移场。式中, \mathbf{N} 为形函数矩阵; $\bar{\mathbf{\Delta}}^e$ 为局部坐标系下的单元杆端位移矩阵。

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \\ N_1 &= 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}, \quad N_2 = x\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \\ N_3 &= 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}, \quad N_4 = \frac{x^2}{l}\left(\frac{x}{l} - 1\right) \end{aligned}$$

其中, N_1 、 N_2 、 N_3 、 N_4 为仅发生单位杆端位移时所引起的单元变形形式,因此称为形函数。显然,形函数具有如表 1-1 所示的性质。

表 1-1 形函数的性质

项 目	N_1	$\frac{dN_1}{dx}$	N_2	$\frac{dN_2}{dx}$	N_3	$\frac{dN_3}{dx}$	N_4	$\frac{dN_4}{dx}$
$x=0$	1	0	0	1	0	0	0	0
$x=l$	0	0	0	0	1	0	0	1

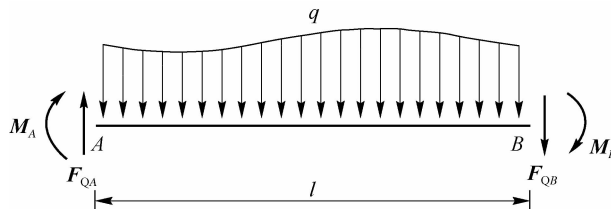


图 1-12 刚架单元

利用节点位移条件来确定单元位移场,单元内任意一点的位移由单元节点位移唯一确定,单元位移场的任意性只体现在单元节点位移的任意性上。

2. 计算单元总势能

由单元位移场可知,曲率 κ 为

$$\kappa = \frac{d\bar{v}}{dx} = \frac{d\mathbf{N}^T}{dx} \bar{\mathbf{\Delta}}^e = \mathbf{B} \bar{\mathbf{\Delta}}^e \quad (1-64)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= [B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4] \\ B_1 &= -6 \frac{1}{l^2} + 12 \frac{x}{l^3}, \quad B_2 = -4 \frac{1}{l} + 6 \frac{x}{l^2} \\ B_3 &= 6 \frac{1}{l^2} - 12 \frac{x}{l^3}, \quad B_4 = -2 \frac{1}{l} + 6 \frac{x}{l^2} \end{aligned} \quad (1-65)$$

截面弯矩为

$$M = EI\kappa = EIB \bar{\mathbf{\Delta}}^e$$

单元总势能为

$$\begin{aligned} \Pi^e &= \frac{1}{2} \int_l EI \left(\frac{d^2 \bar{v}}{dx^2} \right)^2 dx - \int_l qv dx - \int_l m \frac{d\bar{v}}{dx} dx - \sum F_P \bar{\Delta}_d \\ &= \frac{1}{2} \bar{\mathbf{\Delta}}^{eT} \int_l EIB^T \mathbf{B} dx \bar{\mathbf{\Delta}}^e - \bar{\mathbf{\Delta}}^{eT} \int_l \mathbf{N}^T q dx - \bar{\mathbf{\Delta}}^{eT} \int_l \frac{d\mathbf{N}^T}{dx} m dx - \bar{\mathbf{\Delta}}^{eT} \bar{\mathbf{F}}_d \\ &= \frac{1}{2} \bar{\mathbf{\Delta}}^{eT} \bar{\mathbf{k}}^e \bar{\mathbf{\Delta}}^e - \bar{\mathbf{\Delta}}^{eT} (\bar{\mathbf{F}}_E + \bar{\mathbf{F}}_d)^e = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{\Delta}}^{eT} \bar{\mathbf{k}}^e \bar{\mathbf{\Delta}}^e - \bar{\mathbf{\Delta}}^{eT} \bar{\mathbf{F}}^e \end{aligned}$$

式中, $\bar{\mathbf{k}}^e$ 为局部坐标单元刚度矩阵; $\bar{\mathbf{F}}_E$ 为局部坐标单元等效节点荷载。

$$\bar{\mathbf{k}}^e = \int_l EIB^T \mathbf{B} dx \quad (1-66)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_E^e = \int_l \mathbf{N}^T q dx + \int_l \frac{d\mathbf{N}^T}{dx} m dx \quad (1-67)$$

3. 建立单元刚度方程

由最小势能原理得到单元刚度方程为

$$\bar{\mathbf{k}}^e \bar{\mathbf{\Delta}}^e = (\bar{\mathbf{F}}_E + \bar{\mathbf{F}}_d)^e = \bar{\mathbf{F}}^e \quad (1-68)$$

将式(1-68)代入式(1-66)并积分,可得变曲杆单元刚度矩阵为

$$\bar{\mathbf{k}}^e = \int_l EIB^T \mathbf{B} dx = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (1-69)$$

由式(1-67)可知,在已知荷载分布规律的情况下积分可得单元等效节点荷载。对于满跨均布横向荷载 q 作用的情况,有

$$\bar{\mathbf{F}}_E^e = \int_l \mathbf{N}^T q dx = \left\{ \frac{1}{2} ql \quad \frac{1}{12} ql^2 \quad \frac{1}{2} ql \quad -\frac{1}{12} ql^2 \right\}^T \quad (1-70)$$

距节点 1 的 x 处集中力 F_P 作用表示成 δ 函数为 $q(x) = F_P\delta(x)$, 单元等效荷载为

$$\bar{\mathbf{F}}_E^e = \int_l \mathbf{N}^T q dx = \int_l \mathbf{N}^T F_P \delta(x_i) dx = F_P \mathbf{N}^T(x_i)$$

当 $x_i = l/2$ 时

$$\bar{\mathbf{F}}_E^e = F_P \left\{ \frac{1}{2} \quad \frac{l}{8} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{l}{8} \right\}^T \quad (1-71)$$

对于满跨均布力偶荷载 m 作用, 有

$$\bar{\mathbf{F}}_E^e = \int_l \frac{d\mathbf{N}^T}{dx} m dx = \{-m \quad 0 \quad m \quad 0\}^T$$

距节点 1 的 x 处集中力偶 M 作用表示成 δ 函数为 $m(x) = M\delta(x)$, 则

$$\bar{\mathbf{F}}_E^e = \int_l \frac{d\mathbf{N}^T}{dx} M \delta(x_i) dx = M \frac{d\mathbf{N}^T(x_i)}{dx}$$

当 $x_i = l/2$ 时

$$\bar{\mathbf{F}}_E^e = M \left\{ -\frac{3}{2l} \quad -\frac{1}{4} \quad \frac{3}{2l} \quad -\frac{1}{4} \right\}^T$$

显然该结果与矩阵位移法中载常数所得结果完全一致。

1.6.2 平面刚架单元——考虑轴向变形的弯曲单元

考虑轴向变形的弯曲单元如图 1-13 所示(所示方向均为正向), 其杆端位移矩阵和杆端力矩阵分别为

$$\bar{\mathbf{\Delta}}^e = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{F}}^e = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 \\ \bar{F}_4 \\ \bar{F}_5 \\ \bar{F}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{x1} \\ \bar{F}_{y1} \\ \bar{M}_1 \\ \bar{F}_{x2} \\ \bar{F}_{y2} \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix}$$

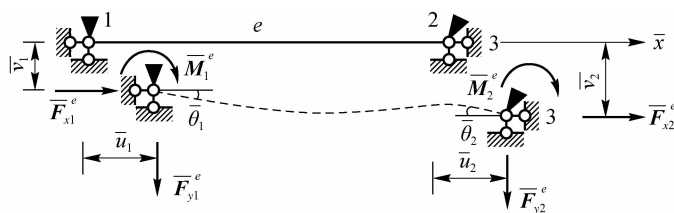


图 1-13 考虑轴向变形的弯曲单元

1. 位移模式

综合位移场分析, 可得单元内任意一点的位移为

$$\bar{\mathbf{u}}^e = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{u1} & 0 & 0 & N_{u2} & 0 & 0 \\ 0 & N_{v1} & N_{v2} & 0 & N_{v3} & N_{v4} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{\Delta}}^e = \mathbf{N} \bar{\mathbf{\Delta}}^e \quad (1-72)$$

式中, N_{ui} 为拉(压)杆的形函数; N_{vi} 为杆弯曲的形函数。

2. 单元刚度方程

利用单元位移场, 仿照前面的分析可计算出平面自由式单元的总势能为

$$\begin{aligned}\Pi^e &= \frac{1}{2} \int_l EI \left(\frac{d^2 \bar{v}}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_l EA \left(\frac{d\bar{u}}{dx} \right)^2 dx - \int_l p u dx - \int_l q v dx - \int_l m \frac{d\bar{v}}{dx} dx - \sum F_P \bar{\Delta}_d \\ &= \frac{1}{2} \bar{\Delta}^{eT} \bar{k}^e \bar{\Delta}^e - \bar{\Delta}^{eT} (\bar{F}_E + \bar{F}_d)^e = \frac{1}{2} \bar{\Delta}^{eT} \bar{k}^e \bar{\Delta}^e - \bar{\Delta}^{eT} \bar{F}^e\end{aligned}$$

由最小势能原理, 总势能一阶变分等于零, 得单元刚度方程为

$$\bar{k}^e \bar{\Delta}^e = (\bar{F}_E + \bar{F}_d)^e = \bar{F}^e$$

该式表示了杆件单元节点力与节点位移之间的关系, 即单元刚度方程。式中, \bar{k}^e 为局部坐标单元刚度矩阵; \bar{F}_E 为局部坐标等效荷载矩阵; \bar{F}_d 为局部坐标杆端力矩阵。将形函数代入积分得单元刚度矩阵为

$$\bar{k}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ & & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ & \text{对} & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & & \text{称} & & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ & & & & & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (1-73)$$

由式(1-73)可以看出, 按杆端位移和杆端力的排列顺序, 平面刚架单元的单元刚度矩阵是由拉(压)杆单元刚度矩阵和杆弯曲单元刚度矩阵叠加而成的。不难验证, 单元刚度矩阵具有对称性和奇异性。

在有限元分析中不考虑单元是否平衡, 而用广义坐标法建立单元位移场, 即先经变形、内力分析求得单元的总势能, 然后再用最小势能原理建立单元刚度方程, 试图使单元“平衡”。若所选位移非真实位移模式, 则不可能仅通过改变节点位移使平衡方程得以满足。一般来说, 变分等于零的结果, 只能使单元达到一种积分意义下的“弱平衡”。

同理可得等效节点荷载为

$$\bar{F}_E = \{ \bar{F}_{E,1}^u \quad \bar{F}_{E,1}^v \quad \bar{F}_{E,2}^v \quad \bar{F}_{E,2}^u \quad \bar{F}_{E,3}^v \quad \bar{F}_{E,4}^u \}^T \quad (1-74)$$

式中, $\bar{F}_{E,i}^u$ 为拉(压)杆单元等效节点荷载元素; $\bar{F}_{E,i}^v$ 为不计轴向变形的弯曲单元等效节点荷载元素。

3. 坐标变换

与杆单元相似, 局部坐标系下的物理量用加上划线来标记, 如 $\bar{\Delta}$ 、 \bar{F}^e 等; 整体坐标系下的物理量不加上划线, 如 Δ 、 F 等。显然, 两套坐标系下的杆端位移向量存在如下关系:

$$\bar{\Delta}^e = T\Delta^e$$

式中, T 为坐标变换矩阵。

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

其中

$$\lambda = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-75)$$

显然, T 为正交矩阵, 即 $T^{-1} = T^T$, 因此 $\Delta^e = T^T \bar{\Delta}^e$ 。同理, 对单元杆端力向量, 有

$$\bar{F}^e = TF^e, F^e = T^T \bar{F}^e$$

整体坐标系下的单元刚度矩阵为

$$k^e = T^T \bar{k}^e T \quad (1-76)$$

1.6.3 平面刚架结构的整体分析

有了单元分析的准备, 现在进行刚架结构的整体分析。与桁架结构相似, 下面的讨论是在整体坐标系下进行的。

1. 用最小势能原理进行结构的整体分析

结构被离散化为 m 个单元, 共有 n 个节点, 结构的总势能为

$$\Pi = \text{各单元势能之和} + \text{节点的外力势能}$$

注意到单元杆端力在计算过程中成对出现, 其做功总和为零。

$$\Pi = \sum \Pi^e - \sum F_{Pj} \Delta_j = \sum \left(\frac{1}{2} \Delta^{eT} k^e \Delta^e - \Delta^{eT} F_E^e \right) - \Delta^T F_P \quad (1-77)$$

式中, k^e 为单元 e 在整体坐标系下的单元刚度矩阵; Δ^e 为整体坐标下的单元杆端位移矩阵; Δ 为结构的节点位移向量; F_E^e 为整体坐标下的单元等效荷载矩阵; F_P 为直接作用于节点的荷载矩阵。将单元的节点位移向量变换为结构的节点位移向量, 即 $\Delta^e = G\Delta$, 其中 G 为反映位移协调的位移变换矩阵。

$$G = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & r & \cdots & s & \cdots & n \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & I & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & I & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \end{matrix} \quad (1-78)$$

式中, I 为三阶单位矩阵。将式(1-78)代入式(1-77), 得

$$\Pi = \sum \frac{1}{2} \Delta^T G^T k^e G \Delta^e - \sum \Delta^T G^T F_E^e - \Delta^T F_P = \frac{1}{2} \Delta^T K \Delta - \Delta^T F$$

令结构势能的一阶变分为零, 即 $\delta\Pi = 0$, 则可得整体刚度方程为

$$K\Delta = F$$

式中, K 为结构(总体)原始刚度矩阵; F 为结构原始综合等效节点荷载矩阵。

$$K = \sum G^T k^e G$$

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{G}^T \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_P = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_P$$

式中, \mathbf{F}_E 为结构(总体)原始等效节点荷载矩阵。

整体刚度矩阵元素 K_{ij} 具有与桁架结构分析时同样的物理意义: 当结构仅发生第 j 个位移分量单位位移时, 所需施加的第 i 个位移分量方向的外力(广义力)。刚架结构的整体刚度矩阵也具有对称性和奇异性, 是稀疏带状矩阵。

2. 用直接刚度法集成整体刚度方程

计算刚架结构原始刚度矩阵 \mathbf{K} 和原始等效节点荷载矩阵 \mathbf{F} , 依然采用直接刚度法, 即由单元刚度矩阵的贡献来获得结构原始刚度矩阵; 由单元等效节点荷载矩阵的贡献来获得结构原始等效节点荷载矩阵。对第 e 个单元, 单元局部编码 1、2 对应的整体节点编号为 r 、 s , 将杆端位移矩阵和杆端力按节点分块, 则

$$\Delta^e = \begin{Bmatrix} \Delta_r \\ \Delta_s \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_r \\ \mathbf{F}_s \end{Bmatrix}$$

将对应的单元刚度矩阵按节点分块, 则

$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ -k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

注意节点唯一变换矩阵(1-78)的形式, 根据矩阵乘法运算规则, 可得

$$\mathbf{G}^T \mathbf{k}^e \mathbf{G} = \begin{array}{cccccc} 1 & \cdots & r & \cdots & s & \cdots & n \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & \cdots & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ & & k_{11} & & k_{12} & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & k_{21} & & k_{22} & & \\ 0 & \cdots & & & & & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} 1 \\ \vdots \\ r \\ \vdots \\ s \\ \vdots \\ n \end{array} \end{array}$$

上式证明单元对整体贡献的规则如下:

$$\left. \begin{array}{l} k_{11}^e \Rightarrow \mathbf{K}_{rr}, \quad k_{12}^e \Rightarrow \mathbf{K}_{rs} \\ k_{21}^e \Rightarrow \mathbf{K}_{sr}, \quad k_{22}^e \Rightarrow \mathbf{K}_{ss} \end{array} \right\}$$

即将单元刚度矩阵子块 k_{11}^e 送到结构原始刚度矩阵第 r 行第 r 列子矩阵的位置并累加, 将子块 k_{12}^e 送到结构原始刚度矩阵第 r 行第 s 列子矩阵的位置并累加, 其余类推。

同理, 结构等效荷载矩阵也可以由单元定位向量定位且累加得到, 即

$$\mathbf{F}_{E1} \Rightarrow \mathbf{F}_{Er}, \quad \mathbf{F}_{E2} \Rightarrow \mathbf{F}_{Es}$$

1.6.4 整体刚度方程的求解及杆件内力计算

同理, 用直接集成法建立的结构整体刚度方程, 其刚度矩阵是奇异的, 仍须引入支承条件, 修改整体刚度方程。修改后的刚度矩阵称为整体刚度矩阵, 这时它是非奇异的对称矩

阵,求解结构刚度方程,即可求得未知的节点位移。从结构节点位移矩阵 Δ 中取出该单元的节点位移矩阵 Δ^e 。根据单元刚度方程 $k^e \Delta^e = (F_E + F_d)^e$,可得

$$F_d^e = k^e \Delta^e - F_E^e \quad (1-79)$$

可见单元杆端力为杆端位移所引起的杆端力 ($k^e \Delta^e$) 和等效节点荷载所引起的杆端力 (固端力)。注意内力符号规定:轴力拉为正,剪力使杆段顺时针转动为正,杆端弯矩规定沿坐标 x 正向到 y 正向为正,则有

$$\left. \begin{aligned} \text{轴力 } F_{Ni} &= (-1)^i \bar{F}_{3j+1} \\ \text{剪力 } F_{Qi} &= (-1)^i \bar{F}_{3j+2} \\ \text{弯矩 } M_i &= (-1)^i \bar{F}_{3j+3} \end{aligned} \right\} (i=1,2; j=i-1) \quad (1-80)$$

对于杆系结构,有了杆端力即可将单元视为静定梁(简支梁、悬臂梁均可),就可求得单元内任意截面的内力(轴力、剪力和弯矩),并可作单元内力图。

【例 1-3】 计算如图 1-14(a)所示刚架的各单元刚度矩阵和等效节点荷载。设各杆材料及截面均相同, $E=200 \text{ GPa}$, $I=32 \times 10^{-5} \text{ m}^4$, $A=1 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ 。

【解】 结构有 4 个节点、3 个单元、12 个位移分量 ($\Delta_1 = u_1, \Delta_2 = v_1, \Delta_3 = \theta_1, \Delta_4 = u_2, \Delta_5 = v_2, \Delta_6 = \theta_2, \Delta_7 = u_3, \Delta_8 = v_3, \Delta_9 = \theta_3, \Delta_{10} = u_4, \Delta_{11} = v_4, \Delta_{12} = \theta_4$)。单元编码、位移编码如图 1-14(b)所示,局部坐标系用箭头的方向表示。

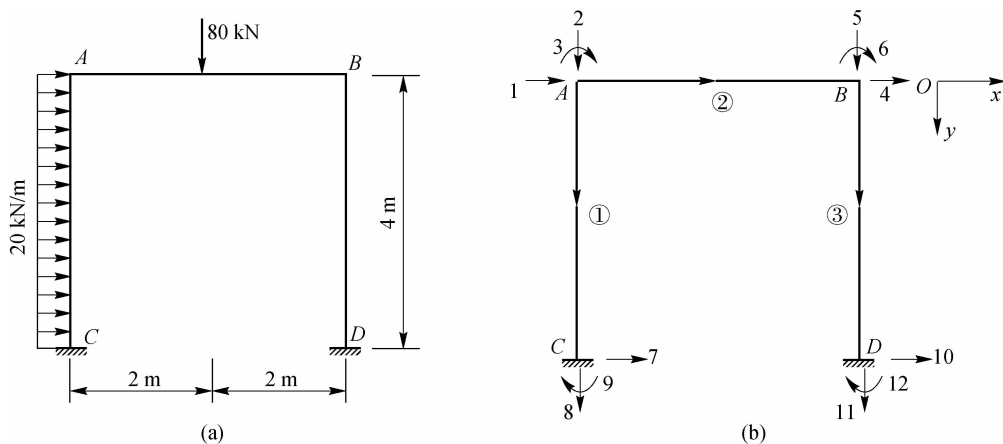


图 1-14 【例 1-3】用图

单元局部编码与节点位移统一编码的关系为

$$\Delta^{\textcircled{1}} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix}, \quad \Delta^{\textcircled{2}} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix}, \quad \Delta^{\textcircled{3}} = \begin{Bmatrix} \Delta_2 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix}$$

由于各杆材料及截面均相同,长度也相同,所以各单元在局部坐标系下的单元刚度矩阵也相同。原始数据计算如下:

$$\begin{aligned} \frac{EA}{l} &= \frac{200 \times 10^6 \times 1 \times 10^{-2}}{4} = 500 \times 10^3 \text{ kN/m} \\ \frac{12EI}{l^3} &= 12 \times 10^3 \text{ kN/m}, \quad \frac{6EI}{l^2} = 24 \times 10^3 \text{ kN/m} \end{aligned}$$

$$\frac{4EI}{l} = 64 \times 10^3 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad \frac{2EI}{l} = 32 \times 10^3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\bar{\mathbf{k}}^{(1)} = \bar{\mathbf{k}}^{(2)} = \bar{\mathbf{k}}^{(3)} = \begin{bmatrix} 500 & 0 & 0 & -500 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 24 & 0 & -12 & 24 \\ 0 & 24 & 64 & 0 & -24 & 32 \\ -500 & 0 & 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -24 & 0 & 12 & -24 \\ 0 & 24 & 32 & 0 & -24 & 64 \end{bmatrix} \times 10^3$$

(1) 计算整体坐标系中的单元刚度矩阵 \mathbf{K} 。

对照 $\mathbf{k}^{(1)}$ 和 $\mathbf{k}^{(2)}$ 可以发现, 对于倾角为 90° 的单元, 整体坐标单元刚度矩阵可以按一定规则由局部坐标单元刚度矩阵变换得到, 可以不用坐标变换的矩阵乘积。

对于单元①和单元③, $\alpha = 90^\circ$, 变换矩阵为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{k}^{(1)} = \mathbf{k}^{(3)} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{k}}^{(1)} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -24 & -12 & 0 & -24 \\ 0 & 500 & 0 & 0 & -500 & 0 \\ -24 & 0 & 64 & 24 & 0 & 24 \\ -12 & 0 & 24 & 12 & 0 & 24 \\ 0 & -500 & 0 & 0 & 500 & -24 \\ -24 & 0 & 32 & 24 & 0 & 64 \end{bmatrix} \times 10^3$$

对于单元②: $\alpha = 0^\circ$, $\mathbf{T} = \mathbf{I}$, 则

$$\mathbf{k}^{(2)} = \bar{\mathbf{k}}^{(2)}$$

将所有单元集装后得到结构原始刚度矩阵为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11}^{(1)} + \mathbf{k}_{11}^{(2)} & \mathbf{k}_{12}^{(2)} & \mathbf{k}_{12}^{(1)} & 0 \\ \mathbf{k}_{21}^{(2)} & \mathbf{k}_{22}^{(2)} + \mathbf{k}_{11}^{(3)} & 0 & \mathbf{k}_{12}^{(3)} \\ \mathbf{k}_{21}^{(1)} & 0 & \mathbf{k}_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_{21}^{(3)} & 0 & \mathbf{k}_{22}^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 512 & 0 & -24 & -500 & 0 & 0 & -12 & 0 & -24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 512 & 24 & 0 & -12 & 24 & 0 & -500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & 24 & 128 & 0 & -24 & 32 & 24 & 0 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ -500 & 0 & 0 & 512 & 0 & -24 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & 0 & 512 & -24 & 0 & 0 & 0 & 0 & -500 & 0 \\ 0 & -24 & 32 & -24 & -24 & 128 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 32 \\ -12 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & 0 & 32 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 64 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -24 & 0 & 32 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 64 \end{bmatrix} \times 10^3$$

(2) 求等效节点荷载 \mathbf{F} 。

对于单元①, $q = -20 \text{ kN/m}$, $a = l = 4 \text{ m}$, $\alpha = 90^\circ$, 则

$$\mathbf{F}_P^{①} = -\mathbf{T}^{①T} \bar{\mathbf{F}}_P^{F①} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 26.7 \\ 0 \\ 40 \\ -26.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ -26.7 \\ 40 \\ 0 \\ 26.7 \end{pmatrix}$$

对于单元②, $F_P = 80 \text{ kN}$, $\alpha = 0^\circ$, 则

$$\mathbf{F}^{②} = -\bar{\mathbf{F}}_P^{F②} = \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 40 \\ 0 \\ 40 \\ -40 \end{pmatrix}$$

原始等效节点荷载矩阵为

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \\ \mathbf{F}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ 0 \\ \mathbf{F}_2 \\ 0 \end{Bmatrix}^{①} + \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^{②} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_1 \\ 0 \\ \mathbf{F}_2 \end{Bmatrix}^{③} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1^{①} + \mathbf{F}_1^{②} \\ \mathbf{F}_2^{②} + \mathbf{F}_1^{③} \\ \mathbf{F}_2^{①} \\ \mathbf{F}_2^{③} \end{Bmatrix} \\ = \{40 \quad 40 \quad 13.3 \quad 0 \quad 40 \quad -40 \quad 40 \quad 0 \quad 26.7 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T$$

考虑边界条件 ($\Delta_7 = 0, \dots, \Delta_{12} = 0$), 可得结构刚度方程为

$$10^3 \times \begin{pmatrix} 512 & 0 & -24 & -500 & 0 & 0 \\ 0 & 512 & 24 & 0 & -12 & 24 \\ -24 & 24 & 128 & 0 & -24 & 32 \\ -500 & 0 & 0 & 512 & 0 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & 0 & 512 & -24 \\ 0 & -24 & 32 & -24 & -24 & 128 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ \theta_A \\ u_B \\ v_B \\ \theta_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 13.3 \\ 0 \\ 40 \\ -40 \end{pmatrix}$$

(3)解方程。解上面的方程,得

$$\begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ \theta_A \\ u_B \\ v_B \\ \theta_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1885 \\ 0.0573 \\ 0.5319 \\ 2.1355 \\ 0.1027 \\ -0.0366 \end{pmatrix} \times 10^{-3}$$

(4)求各杆杆端力。

对于单元①:

$$\mathbf{F}^{\text{①}} = \mathbf{k}^{\text{①}} \mathbf{\Delta}^{\text{①}} - \mathbf{F}_E^{\text{①}}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 0 & -24 & -12 & 0 & -24 \\ 0 & 500 & 0 & 0 & -500 & 0 \\ -24 & 0 & 64 & 24 & 0 & 32 \\ -12 & 0 & 24 & 12 & 0 & 24 \\ 0 & -500 & 0 & 0 & 500 & 0 \\ -24 & 0 & 32 & 24 & 0 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.1885 \\ 0.0573 \\ 0.5319 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 26.7 \\ -40 \\ 0 \\ -26.7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -26.5 \\ 28.65 \\ 8.22 \\ -53.5 \\ -28.65 \\ -62.2 \end{pmatrix} \text{ (kN)}$$

$$\bar{\mathbf{F}}^{\text{①}} = \mathbf{T}\mathbf{F}^{\text{①}} = \begin{pmatrix} -28.65 \\ -26.5 \\ 8.22 \\ 28.65 \\ -53.5 \\ -62.2 \end{pmatrix} \text{ (kN)}$$

对于单元②:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}^{\textcircled{2}} &= \mathbf{k}^{\textcircled{2}} \mathbf{\Delta}^{\textcircled{2}} - \mathbf{F}_E^{\textcircled{2}} \\
 &= \begin{pmatrix} 500 & 0 & 0 & -500 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 24 & 0 & -12 & 24 \\ 0 & 24 & 64 & 0 & -24 & 32 \\ -500 & 0 & 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -24 & 0 & 12 & -24 \\ 0 & 24 & 32 & 0 & -24 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.1885 \\ 0.0573 \\ 0.5319 \\ 2.1355 \\ 0.1027 \\ -0.0366 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -40 \\ -40 \\ 0 \\ -40 \\ 40 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 26.5 \\ -28.65 \\ -8.22 \\ -26.5 \\ -51.34 \\ 53.59 \end{pmatrix} \text{ (kN)}
 \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{F}}^{\textcircled{2}} = \mathbf{F}^{\textcircled{2}}$$

对于单元③:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}^{\textcircled{3}} &= \mathbf{k}^{\textcircled{3}} \mathbf{\Delta}^{\textcircled{3}} \\
 &= \begin{pmatrix} 12 & 0 & -24 & -12 & 0 & -24 \\ 0 & 500 & 0 & 0 & -500 & 0 \\ -24 & 0 & 64 & 24 & 0 & 32 \\ -12 & 0 & 24 & 12 & 0 & 24 \\ 0 & -500 & 0 & 0 & 500 & 0 \\ -24 & 0 & 32 & 24 & 0 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.1355 \\ 0.1027 \\ -0.0366 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 26.5 \\ 51.35 \\ -53.39 \\ -26.5 \\ -51.35 \\ -52.42 \end{pmatrix} \text{ (kN)}
 \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{F}}^{\textcircled{3}} = \mathbf{TF}^{\textcircled{3}} = \begin{pmatrix} -51.35 \\ 26.5 \\ -53.39 \\ 51.35 \\ -26.5 \\ -52.42 \end{pmatrix} \text{ (kN)}$$

根据杆端力绘制内力图,如图 1-15 所示。

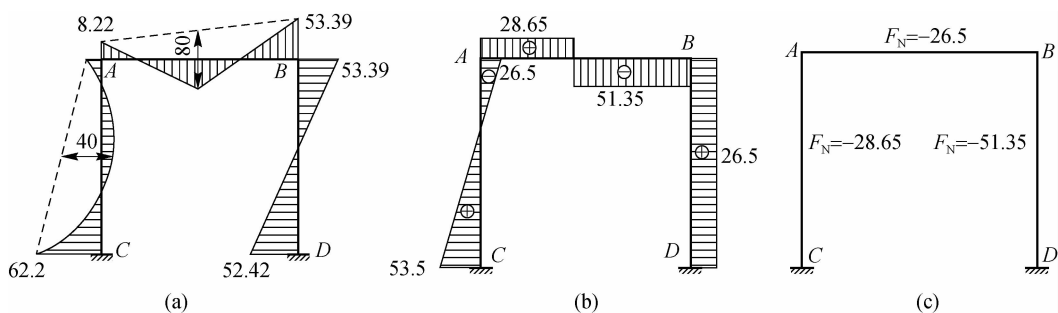


图 1-15 【例 1-3】内力图

(a) M 图(单位 $\text{kN} \cdot \text{m}$) (b) F_Q 图(单位 kN) (c) F_N 图(单位 kN)

1.7 有限元法与矩阵位移法

矩阵位移法借用数学表述的矩阵理论,与结构力学传统位移法相结合,表述简洁。特别是新型计算工具——电子计算机的发明和发展,在里兹法的基础上融入分片插值技术,形成当代工程中最有效的计算手段——有限元法。本节对结构分析有限元法做几个补充说明。

1.7.1 整体刚度方程为节点平衡方程

仍以图 1-6 所示的两跨连续梁为例,分析位移法基本方程的建立过程。利用位移法时,可利用结构特点,选取 B 节点转角 θ_B 为基本未知量,利用节点平衡列出基本方程:

$$M_B = M_{BA} + M_{BC} = (3i_1 + 3i_2)\theta_B + m_{BA}^F + m_{BC}^F = 0$$

式中, i_1 、 i_2 分别为两跨梁线刚度; m_{BA}^F 、 m_{BC}^F 为固端弯矩。若选取 3 个节点上的转角为参数,分别列出节点平衡方程 $M_i = 0$,可得到以 3 个节点转角为参数的基本方程。

$$M_A = 4i_1\theta_A + 2i_1\theta_B + m_{AB}^F = 0$$

$$M_B = 2i_1\theta_A + (4i_1 + 4i_2)\theta_B + 2i_2\theta_C + m_{BA}^F + m_{BC}^F = 0$$

$$M_C = 2i_2\theta_B + 4i_2\theta_C + m_{CB}^F = 0$$

用矩阵位移法分析图 1-6 所示的两跨连续梁时,将其分为 2 个单元,分别以 3 个节点上的转角为参数。在每个单元内,列出单元刚度方程:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m_1^F \\ m_2^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

写成矩阵形式:

$$\mathbf{k}^e \mathbf{\Delta}^e + \mathbf{F}^{Fe} = \mathbf{F}_d^e$$

考虑每个节点的平衡,列出 n 个平衡方程:

$$\sum_e \mathbf{F}_d^e + \mathbf{F}_{pj} = 0$$

即

$$\sum_e (\mathbf{k}^e \mathbf{\Delta}^e + \mathbf{F}^{Fe}) + \mathbf{F}_{Pj} = 0$$

具体计算中,将单元节点位移向量变换为结构节点位移向量 $\mathbf{\Delta}^e = \mathbf{G}\mathbf{\Delta}$,按照单元刚度集成规则由单元刚度矩阵形成整体刚度矩阵 \mathbf{K} ,由单元固端力形成结构广义力向量 \mathbf{F} 。

$$\mathbf{K}\mathbf{\Delta} = \mathbf{F}$$

对于图 1-6 所示的两跨连续梁,仍得出刚度方程为

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI_1}{l_1} & \frac{2EI_1}{l_1} & 0 \\ \frac{2EI_1}{l_1} & \frac{4EI_1}{l_1} + \frac{4EI_2}{l_2} & \frac{2EI_2}{l_2} \\ 0 & \frac{2EI_2}{l_2} & \frac{4EI_2}{l_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{ql^2}{12} \\ -\frac{ql^2}{12} + \frac{F_P l}{8} \\ -\frac{F_P l}{8} \end{Bmatrix}$$

所以整体刚度方程为节点平衡方程。

1.7.2 剪切变形的影响

利用手算进行刚架整体分析时,通常做一些简化,忽略轴向变形和剪切变形的影响。

设平面刚架单元 e 的单元长度为 l ,横截面面积为 A ,横截面惯性矩为 I ,弹性模量为 E ,剪切模量为 G 。根据内力与变形的关系: $F_N = EA\epsilon$, $M = EI\kappa$, $F_Q = \alpha GA\gamma_0$ (α 为截面系数,由于截面上的剪应力分布不均匀,所以剪应变 γ_0 应为加权平均值),应变能为

$$U = \frac{1}{2} \int_l (EA\epsilon^2 + EI\kappa^2 + \alpha GA\gamma_0^2) dx$$

由此可得出平面刚架单元剪切变形影响时的单元刚度矩阵为

$$\bar{\mathbf{k}}_G^e = \int_l \alpha GA \frac{d\mathbf{N}^T}{dx} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dx} dx = \frac{\alpha GA}{l} \begin{bmatrix} 6 & l & -6 & l \\ 5 & 10 & -5 & 10 \\ \frac{2l^2}{15} & -\frac{l}{10} & -\frac{l^2}{30} & \\ \text{对} & \frac{6}{5} & \frac{l}{10} & \\ \text{称} & & \frac{2l^2}{15} & \end{bmatrix}$$

对比弯曲变形对应的单元刚度矩阵 $\bar{\mathbf{k}}_w^e$

$$\bar{\mathbf{k}}_w^e = \int_l EI \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

可知剪切变形的单元刚度矩阵 $\bar{\mathbf{k}}_G^e$ 与弯曲变形对应的单元刚度矩阵 $\bar{\mathbf{k}}_w^e$ 之比的量纲为

$$\frac{EI}{EA l^2} = \frac{EA}{EA} \cdot \frac{\rho^2}{l^2} = \frac{\rho^2}{l^2}$$

故当杆件满足细长杆定义时,可不考虑剪切变形引起的位移。

另外,对于细长杆,弯曲变形为主要变形,如果计算剪切变形影响,杆件过刚,得不到理想结果。

同理可知,轴向变形的单元刚度矩阵 \bar{k}_N 与弯曲变形对应的单元刚度矩阵 \bar{k}_w 之比的量纲也为 $\frac{EI}{EA l^2} = \frac{\rho^2}{l^2}$,故分析细长杆时可不考虑轴向变形的影响。

1.7.3 矩阵位移法中的前处理

在进行整体分析时,先不考虑支承条件,按单元集成法得出原始的整体刚度矩阵,然后再引入支承条件,进行处理,得出整体刚度矩阵,这种做法称为后处理法。利用矩阵位移法进行手算时,为简化计算,常采用“前处理”方法。

1. 前处理中的“0”码和重码

所谓前处理,是指在形成整体刚度方程时,事先根据结构的支承条件进行处理:将结构支承处编码为“0”,因为矩阵中没有“0”排“0”列,所以集成结构刚度方程时不需要处理支承处的贡献,直接形成结构整体刚度方程即可。如图 1-16 所示,在固定端 A、C 和 E 处,3 个位移分量均为零,总码编为(0 0 0)。

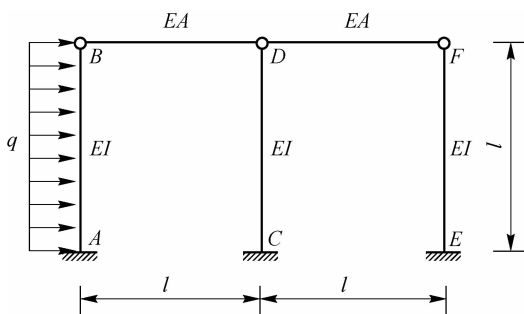


图 1-16 排架结构

工程计算中一般忽略轴向变形的影响,因此在节点 B、D 和 F 处,竖向位移分量为零,故其编码也为零码。此外,因为忽略轴向变形的影响,节点 B、D 和 F 处的水平位移分量相等,所以它们的水平位移应采用同一总码——重码。所以,节点 B 的总码编为(1 0 2),节点 D 的总码编为(1 0 3),节点 E 的总编码为(1 0 4)。

2. 不同节点连接

在节点 B、D 和 F 处,分别有两种不同的杆件连接。由于在拉(压)杆中,没有考虑杆端转角位移,故在单元定位向量中转角位移对应的编码也为零码。由此各单元定位向量为

$$\lambda^{①} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \lambda^{②} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \lambda^{③} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \lambda^{④} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \lambda^{⑤} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

这里, $\Delta_1 = u_1, \Delta_2 = \theta_1, \Delta_3 = \theta_2, \Delta_4 = \theta_3$ 。对于图示结构, 由式(1-48)求得单元刚度矩阵, 经坐标变换后, 用刚度集成法形成结构刚度方程:

$$\begin{bmatrix} \frac{36EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & 0 \\ -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} & 0 \\ -\frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

解方程, 得

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 2l \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix} \frac{ql^3}{24}$$

利用节点位移可以求出其他物理量。需要指出的是, 杆件的轴向力不能用单元刚度方程求出, 需要借助节点平衡。

思考与练习

1. 简答题

- (1) 从矩阵位移法的计算步骤看矩阵位移法与传统位移法的异同。
- (2) 为什么说矩阵位移法易于实现计算过程程序化? 矩阵力法在这方面的优缺点是什么?
- (3) 为什么平面一般单元的单元刚度矩阵是奇异矩阵?
- (4) 为什么有的特殊单元其单元刚度矩阵是可逆的? 举例说明。
- (5) 矩阵位移法对静定结构和超静定结构的计算是否都可以应用? 计算步骤是否相同?
- (6) 刚架计算中当忽略轴向变形的影响时, 单元定位向量会有怎样的改变?
- (7) 虚功和实功有什么区别? 它们的计算公式相同吗?
- (8) 在虚功原理中对力状态和位移状态有什么要求?

2. 计算题

- (1) 计算如图 1-17 所示连续梁的节点转角和杆端弯矩。

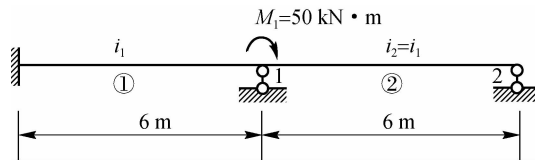


图 1-17 题(1)用图

(2)用矩阵位移法计算如图 1-18 所示的连续梁,并画弯矩图。

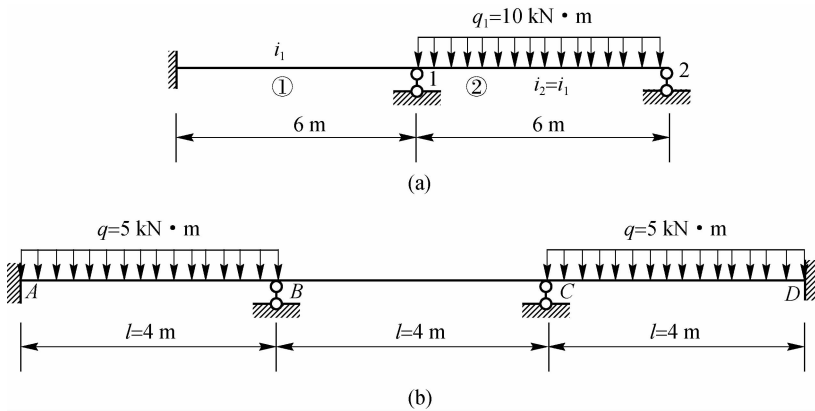


图 1-18 题(2)用图

(3)试求如图 1-19 所示桁架各杆轴力,设各杆 EA/l 相同。

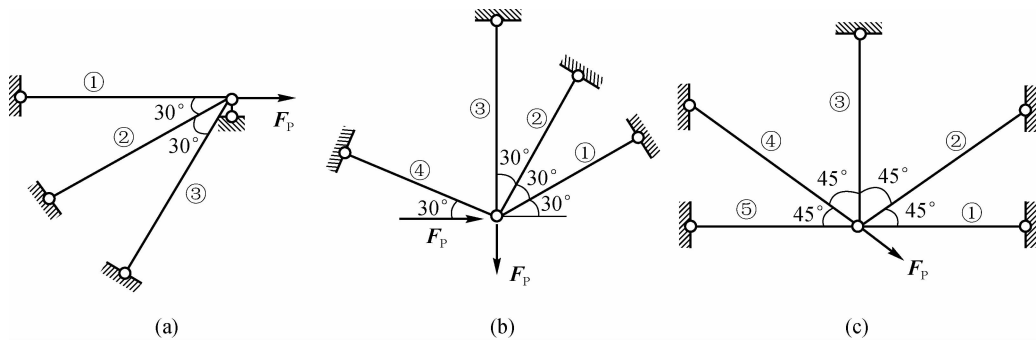


图 1-19 题(3)用图

(4)在如图 1-20 所示的刚架中,设在单元①上作用向下的均布荷载 $q=4.88 \text{ kN/m}$,试求刚架内力,并作出内力图(忽略轴向变形影响)。

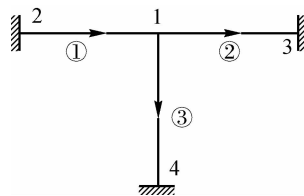


图 1-20 题(4)用图

(5) 试求如图 1-21 所示刚架的整体刚度矩阵、节点位移和各杆内力(忽略轴向变形影响)。

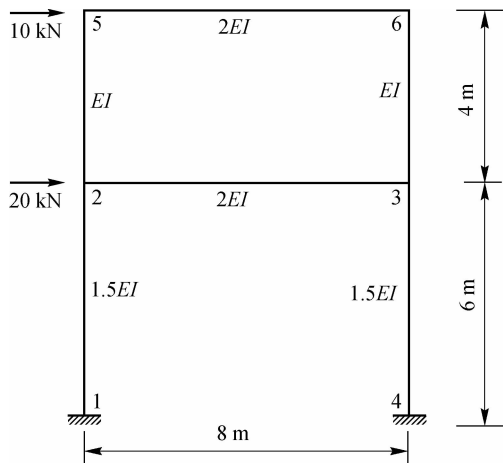


图 1-21 题(5)用图

(6) 如图 1-22 所示的等截面连续梁, 设支座 C 有沉降 $\Delta = 0.005l$ 。试用矩阵位移法计算内力, 并作出内力图。设 $E = 3 \times 10^4 \text{ MPa}$, $I = 1/24 \text{ m}^4$ 。

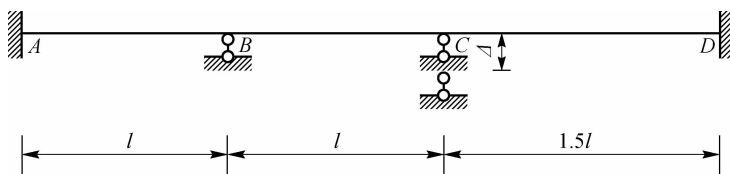


图 1-22 题(6)用图

(7) 列出如图 1-23 所示组合结构的整体刚度方程。

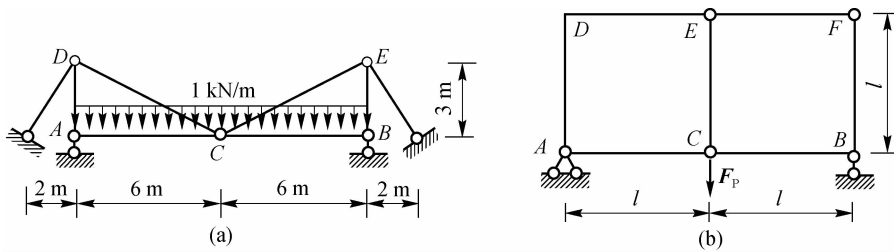


图 1-23 题(7)用图