第 1 篇　刚体静力学

静力学是研究物体在力系作用下平衡条件的科学。所谓**力系**，就是指作用于物体上的一群力；**平衡**是指物体相对于地面保持静止或做匀速直线运动的状态。例如，桥梁、房屋、机床床身、做匀速直线飞行的飞机等，都处于平衡状态。平衡是物体运动的一种特殊形式。

静力学中所说的物体都是**刚体**，故静力学又称为**刚体静力学**。所谓**刚体**，就是指在力的作用下不变形的物体。实际上，任何物体受力后都会发生或多或少的变形，而许多物体的受力变形非常小。对静力学所研究的问题而言，忽略变形不会对研究结果产生显著影响，还可以使问题简化，因此，根据实际情况将物体抽象为刚体，不仅是必要的，而且是合理的。

在静力学中，主要研究以下**三个方面**的问题：

(1)**物体受力分析**。物体受力分析即分析物体共受几个力，以及每个力的作用线位置、大小和方向。

(2)**力系的等效替换**。力系的等效替换即将作用于物体上的一个力系用一个与之等效的力系来代替，这两个力系互为**等效力系**。如果用一个简单的力系代替一个复杂的力系，则称为**力系简化**。如果一个力与一个力系等效，则称该力为力系的**合力**。

在研究力系等效替换的问题时，物体不一定处于平衡状态，我们可以不考虑物体的运动，而仅研究作用力的等效替换。例如，飞行中的飞机受到升力、牵引力、重力和空气阻力等作用，这些力错综复杂地分布于飞机的各个部分，每个力都影响着飞机的运动。要想确定飞机的运动规律，必须了解这群力的总的作用效果，这就需要用一个简单的等效力系来代替这群复杂的力，然后进行运动分析。所以，研究力系简化的**目的**是导出力系的平衡条件，同时也为运动学和动力学的研究提供基础。

(3)**建立各种力系的平衡条件**。当物体平衡时，作用在物体上的各种力系所必须满足的条件称为力系的**平衡条件**。满足平衡条件的力系称为**平衡力系**。力系的平衡条件是设计工程结构、机械零件时进行静力计算的基础。

第1章 静力学的基本概念和物体的受力分析

学习目标

教学提示：本章主要介绍静力学的一些基本概念和静力学基本公理；工程中常见的约束类型和约束力；物体受力分析的基本方法。

教学要求：要求学生熟练掌握力和力矩的概念；理解刚体力学模型的含义；掌握静力学基本公理；了解常见的约束类型；学会用基本方法进行物体的受力分析。

教学重点和难点：教学重点是力和力矩的基本概念，力和力矩的计算；教学难点是受力分析和画受力分析图。

1.1 力和力偶

1.1.1 力的概念及投影与解析表达式

力的概念是认识力的基础，主要应理解力的作用效果；力的投影与解析表达式是分析和计算力的主要方法。

1. 力的概念

力是物体间的相互机械作用，这种作用**效果**既可以使物体的机械运动状态发生变化，也可以使物体的形状发生变化。其中，前者称为**外效应**(运动效应)，后者称为**内效应**(变形效应)。

力的概念是从劳动中产生的。人们在生活和生产中，从肌肉紧张收缩的感觉，逐渐产生了对力的感性认识。后来，随着生产的发展，逐渐认识到物体的机械运动状态发生改变(包括变形)，都是其他物体对该物体施加力的结果。这些力的作用，有的是**接触**作用，有的是**非接触**作用。如机车牵引车厢、油液推动活塞、放在梁上的物体使梁发生弯曲、用手推门使门打开等，这些力的作用属于接触作用；而一些通过“场”效应对物体产生的作用，如地球引力场对物体的吸引力、电场对电荷的引力和斥力、磁场对磁体的引力和斥力等，都属于非接触作用。尽管物体间力的来源和物理本质不同，但在研究物体的运动和平衡时，可以撇开非本

质的因素，对其加以抽象化而形成“力”的概念，提高到理性认识的高度。

实践表明：力对物体的作用效果取决于**三个要素**：力的大小、力的方向和力的作用点。只要力的三要素中的任何一个发生改变，力对物体的作用效果都将随之改变。

力是**矢量**，因此可以用一个矢量来表示力的三要素。如图 1-1 所示，矢量的长度 AB（按一定比例画出来）表示力的大小，矢量的方向（用箭头表示）表示力的方向，矢量的始端（或末端）表示力的作用点。矢量$\overrightarrow{AB}$所沿的直线（图 1-1 中的虚线）表示力的作用线。本书用黑斜体字母 $\boldsymbol{F}$ 表示力矢量，用普通斜体字母 F 表示力的大小。若以 $\boldsymbol{F}^{\circ}$表示沿矢量 $\boldsymbol{F}$ 方向的单位矢量（见图 1-2），则力 $\boldsymbol{F}$ 可写成

$$\boldsymbol{F}=F\boldsymbol{F}^{\circ} \tag{1-1}$$

即力的矢量可以用它的模和单位矢量的乘积来表示。

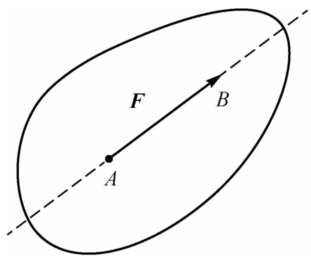


图 1-1　力的三要素矢量图

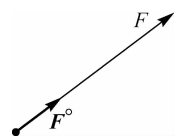


图 1-2　力与其单位矢量图

要测定力的大小，必须确定力的单位。在国际单位制（SI）中，力的单位是牛顿（N）或千牛顿（kN）；在工程单位中，力的单位常用“公斤力”（kgf），有时也用“千公斤力”，即“吨力”（tf）来表示。公斤力和牛顿的换算关系是：1 kgf≈9.8 N。

2. 力在平面直角坐标轴上的投影与解析表达式

设在直角坐标平面 xOy 内有力 $\boldsymbol{F}$ 作用于 A 点（见图 1-3），若从力 $\boldsymbol{F}$ 的两端 A，B 分别向横坐标轴 x 作垂线，则 x 轴上所对应垂足点间的线段 ab（加上适当的正负号）称为力 $\boldsymbol{F}$ 在 x 轴上的**投影**，用 X 表示。并且规定：当从力的始端的投影 a 到末端的投影 b 的方向与 x 轴的正方向一致时，力的投影取正值；反之，则取负值。同理可得力 $\boldsymbol{F}$ 在 y 轴上的投影，用 Y 表示。如果力 $\boldsymbol{F}$ 与 x 轴、y 轴的夹角分别为 α 和 β，则力 $\boldsymbol{F}$ 在 x 轴、y 轴上的投影分别为

$$\left.\begin{aligned} X&=F\cos\alpha \\ Y&=F\cos\beta=F\sin\alpha \end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

由此可知，**力在某轴上的投影等于力的大小乘以力与投影轴正向夹角的余弦**。

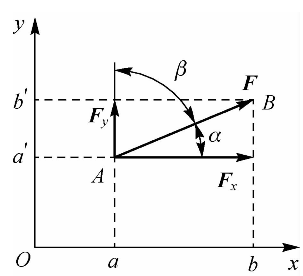


图 1-3　力在平面直角坐标轴上的投影

反之，若已知力 $\boldsymbol{F}$ 在坐标轴上的投影为 X 和 Y，则平面力的大小与方向余弦分别为

$$\left.\begin{aligned} F&=\sqrt{X^2+Y^2} \\ \cos\alpha&=\frac{X}{F} \\ \cos\beta&=\frac{Y}{F} \end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

由图 1-3 可知，力 $\boldsymbol{F}$ 沿正交的 x 轴、y 轴可以分解为两个分力 $\boldsymbol{F}_x$ 和 $\boldsymbol{F}_y$。分力与投影之间的关系为

$$\boldsymbol{F}_x=X\boldsymbol{i}$$
$$\boldsymbol{F}_y=Y\boldsymbol{j}$$

由此可得，力的解析表达式为

$$\boldsymbol{F}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j} \tag{1-4}$$

式中，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 分别为 x 轴、y 轴的单位矢量。

3. 力在空间直角坐标轴上的投影与解析表达式

如果已知力 $\boldsymbol{F}$ 与 x 轴、y 轴和 z 轴的正向夹角分别为 α，β 和 γ（见图 1-4），按力在轴上投影的概念，可得力 $\boldsymbol{F}$ 在空间直角坐标轴上的投影计算式为

$$\left.\begin{aligned} X&=F\cos\alpha \\ Y&=F\cos\beta \\ Z&=F\cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{1-5}$$

式(1-5)这种求力在空间直角坐标轴上投影的方法称为**直接投影法**，也称为**一次投影法**。

若已知力 $\boldsymbol{F}$ 在 xOy 平面上的投影 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 与 x 轴的正向夹角为 φ，力 $\boldsymbol{F}$ 与 z 轴的正向夹角为 γ（见图 1-5），则有

$$\left.\begin{aligned} X&=F\sin\gamma\cos\varphi \\ Y&=F\sin\gamma\sin\varphi \\ Z&=F\cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

式(1-6)这种投影法称为**二次投影法**。

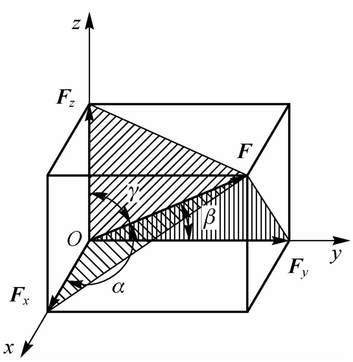


图 1-4　力的空间一次投影

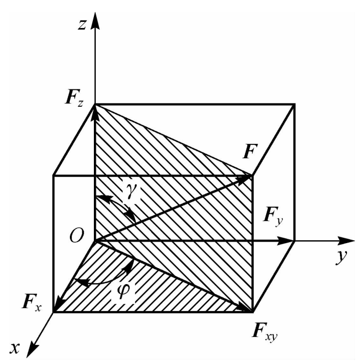


图 1-5　力的空间二次投影

与平面投影类似，利用在坐标轴上的投影可以写出**力在空间坐标系中投影的解析表达**

式为

$$\boldsymbol{F}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k} \tag{1-7}$$

式中，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别为 x 轴、y 轴和 z 轴的单位矢量。

同样，空间力 $\boldsymbol{F}$ 的大小及方向余弦分别为

$$\left.\begin{array}{l} F=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} \\ \cos\alpha=\dfrac{X}{F},\cos\beta=\dfrac{Y}{F},\cos\gamma=\dfrac{Z}{F} \end{array}\right\} \tag{1-8}$$

1.1.2　力对点之矩

假设所研究的物体是刚体，则力对**刚体的作用效果**是刚体的运动状态（包括移动和转动）发生变化，其中力对刚体的**移动效果**可用力矢量来度量，而力对刚体的**转动效果**可用力对点之矩（简称**力矩**）来度量，所以**力矩**是度量刚体转动效应的物理量。平面上力对点之矩如图 1-6 所示的扳手对螺母的转动作用。力作用于扳手上的 A 点，在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用平面内（纸面内），从螺母中心 O 点到力的作用线的垂直距离 d 称为**力臂**，O 点称为**矩心**。力对物体的转动效果不仅与力的大小有关，而且与力臂及绕矩心的转向有关。因此，将力对作用平面内任意一点的力矩定义为：**力对点之矩是一个代数量，它的大小等于力的大小与力臂的乘积。力矩的正负**规定：力矩使物体绕矩心逆时针转动为正，顺时针转动为负。

若用 $M_O(\boldsymbol{F})$ 表示力 $\boldsymbol{F}$ 对 O 点之矩，则其表达式为

$$M_O(\boldsymbol{F})=\pm Fd \tag{1-9}$$

式中，力 $\boldsymbol{F}$ 的单位是牛顿（N）；力臂 d 的单位是米（m）；力矩 $M_O(\boldsymbol{F})$ 的单位是牛顿·米（N·m）。

空间力对点之矩的定义为：力的作用点 A 相对于 O 点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 和力矢量 $\boldsymbol{F}$ 的叉积，用 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$ 表示。如图 1-7 所示，空间力对点之矩的表达式为

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}=M_{Ox}(\boldsymbol{F})i+M_{Oy}(\boldsymbol{F})j+M_{Oz}(\boldsymbol{F})k \tag{1-10}$$

式中，$M_{Ox}(\boldsymbol{F})$，$M_{Oy}(\boldsymbol{F})$，$M_{Oz}(\boldsymbol{F})$ 分别为 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$ 在三个坐标轴上的投影。

$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$ 是矢量，类似于力在坐标轴上投影的定义，可得 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$ 在 x，y，z 三个坐标轴上的投影分别为

$$\left.\begin{array}{l} M_{Ox}(\boldsymbol{F})=yZ-zY \\ M_{Oy}(\boldsymbol{F})=zX-xZ \\ M_{Oz}(\boldsymbol{F})=xY-yX \end{array}\right\} \tag{1-11}$$

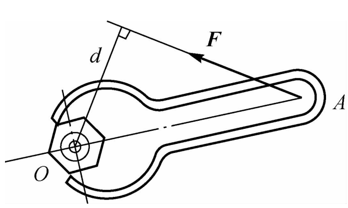


图 1-6　力对平面内点的矩

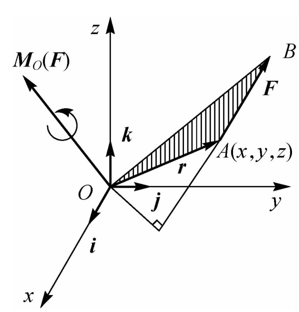


图 1-7　力对空间点的矩

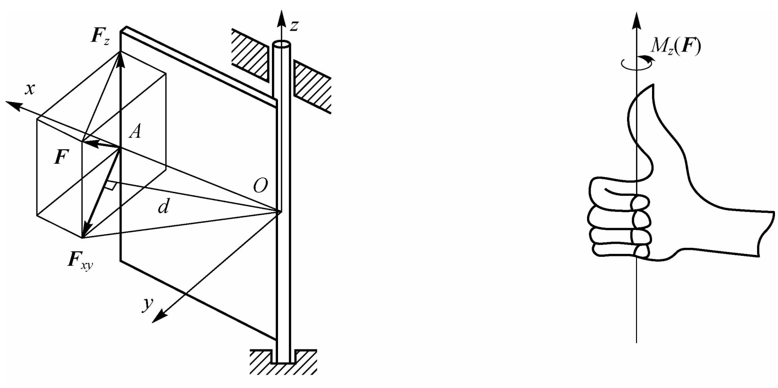
1.1.3　力对轴之矩

工程中有很多刚体绕定轴转动的情况，为度量力对刚体绕定轴转动的作用效果，必须了解力对轴之矩的含义。

如图 1-8(a)所示，一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用于门上的 A 点，使其绕固定的门枢(z 轴)转动。现将力 $\boldsymbol{F}$ 分解为平行于 z 轴的分力 $\boldsymbol{F}_z$ 和垂直于 z 轴的分力 $\boldsymbol{F}_{xy}$(力 $\boldsymbol{F}$ 在垂直于 z 轴的平面 xOy 上的投影)。由经验可知，分力 $\boldsymbol{F}_z$ 不能使门绕 z 轴转动，故 $\boldsymbol{F}_z$ 对 z 轴的矩为零，只有分力 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 才能使门绕 z 轴转动。现用符号 $M_z(\boldsymbol{F})$ 表示力 $\boldsymbol{F}$ 对 z 轴的矩，点 O 为平面 xOy 与 z 轴的交点，d 为点 O 到力 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 的距离。因此，力 $\boldsymbol{F}$ 对 z 轴的矩就等于分力 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 对点 O 的矩，即

$$M_z(\boldsymbol{F})=M_O(\boldsymbol{F}_{xy})=\pm F_{xy}d \tag{1-12}$$

力对轴之矩是对力使刚体绕轴转动效果的度量，是代数量，其绝对值等于该力在垂直于该轴的平面上的分力对轴与这个平面交点之矩的大小。力对轴之矩正负号的规定：从 z 轴正向看，若力的分力 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 使物体绕轴按逆时针方向转动，则取正号，反之取负号；也可按右手螺旋规则来确定其正负号，如图 1-8(b)所示，用右手握住转轴 z，四指指向转动方向，若大拇指指向与 z 轴正向一致，则取正号，反之取负号。



(a) 开门受力与转矩　　(b) 右手螺旋规则

图 1-8　力对轴之矩及其正负的判定

在下列情况下，**力对轴之矩为零**：当力的作用线与轴相交时($d=0$)，当力与轴平行时($F_{xy}=0$)。这两种情况都可归结为：**当力的作用线与轴在同一平面上时，力对该轴的矩等于零。**

力对轴之矩也可用解析式来表示，设力 $\boldsymbol{F}$ 在三个坐标轴上的投影分别为 X，Y 和 Z，力 $\boldsymbol{F}$ 的作用点 A 的坐标为 $A(x,y,z)$，根据力对轴之矩的定义，有

$$\left.\begin{aligned}M_x(\boldsymbol{F})&=yZ-zY\\M_y(\boldsymbol{F})&=zX-xZ\\M_z(\boldsymbol{F})&=xY-yX\end{aligned}\right\} \tag{1-13}$$

式(1-13)是计算力对轴之矩的解析式，与式(1-11)比较，可得到力对点之矩与力对轴之矩的关系：**力对轴之矩等于力对该轴上任意一点之矩。**换句话说，**力对任意一点之矩在通过该点的任意轴上的投影等于力对该轴的矩。**

【例 1-1】 一手柄 $ABCE$（见图 1-9）在 xOy 平面内，在 D 处作用有一个力 $\boldsymbol{F}$，该力在垂直于 y 轴的平面内与铅垂线的夹角为 θ。如果 $CD=a$，杆 BC 平行于 x 轴，杆 CE 平行于 y 轴，AB 和 BC 的长度都等于 l。试求力 $\boldsymbol{F}$ 对 x 轴、y 轴和 z 轴的矩。

解：(1)力的投影。将力 $\boldsymbol{F}$ 分别在 x 轴、y 轴和 z 轴上投影得

$$\begin{cases} X=F\sin\theta \\ Y=0 \\ Z=-F\cos\theta \end{cases}$$

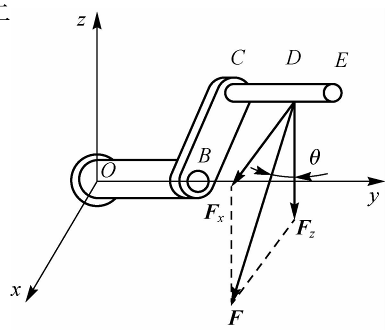


图 1-9　例 1-1 图

(2)力对轴之矩。力作用点 D 的坐标为

$$\begin{cases} x_D=BC=-l \\ y_D=AB+CD=l+a \\ z_D=0 \end{cases}$$

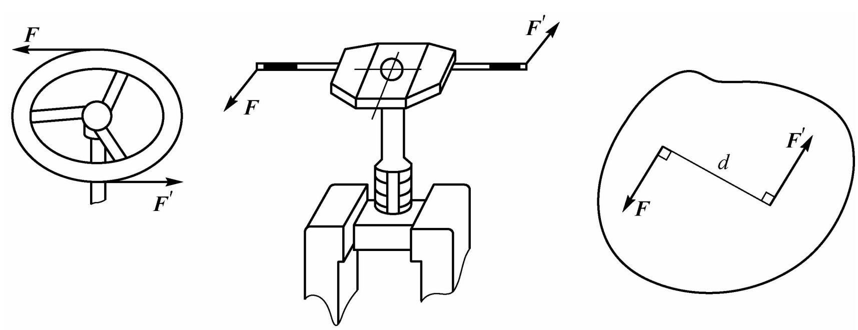
根据式(1-13)计算，得到力 $\boldsymbol{F}$ 对 x 轴、y 轴和 z 轴的矩分别为

$$\begin{cases} M_x(\boldsymbol{F})=yZ-zY=-F(l+a)\cos\theta \\ M_y(\boldsymbol{F})=zX-xZ=-Fl\cos\theta \\ M_z(\boldsymbol{F})=xY-yX=-F(l+a)\sin\theta \end{cases}$$

1.1.4　力偶及力偶矩

在实际生活和工程中，力偶的实例有很多。如图 1-10(a)、(b)所示，驾驶员开车时在汽车方向盘上作用的两个力($\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}'$)，钳工用丝锥攻螺纹时在丝锥扳手上作用的两个力($\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}'$)。此外，在日常生活中，拧水龙头时，手指作用在手柄上的两个力($\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}'$)。若 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{F}'$ 大小相等、方向相反、作用线相互平行，则它们就构成一个力偶。

因此，根据力的作用效果，把大小相等、方向相反且相互平行的一对力组成的力系称为**力偶**，如图 1-10(c)所示。用符号($\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}'$)表示。力偶中两力作用线所决定的平面称为**力偶作用平面**，两力作用线之间的距离称为**力偶臂**，用 d 表示。



(a) 方向盘上的力偶　(b) 丝锥上的力偶　(c) 一般平面力偶

图 1-10　平面力偶及其举例

(1)力偶中的每个力具有力的一般性质。作为特殊力系，力偶还具有如下**特性**：

①力偶既不能合成为一个力，也不能用一个力来平衡。因此，力和力偶是静力学中两个

基本的力学量。

②力偶只能改变物体的转动状态。力偶对物体的转动效应用力偶矩来度量。

平面力偶中力的大小与力偶臂的乘积并加上适当的正负号所得的代数量，称为**力偶矩**。它的正负号规定与力矩相同，即逆时针为正，顺时针为负。力偶矩可表示为

$$M(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}')=\pm Fd \tag{1-14}$$

力偶矩的单位是牛·米(N·m)或千牛·米(kN·m)。

③力偶对其作用平面内任意一点的力矩等于该力偶的力偶矩，与矩心位置无关。

④作用在同一平面内的两个力偶，若其力偶矩相同(大小相等，转向相同)，则它们彼此等效，这就是**平面力偶等效定理**。

动画
页平面力偶等效转换

(2)**平面力偶等效的条件**。

①力偶可以在其作用平面内任意移转，而不影响它对刚体的效应。即力偶对刚体的作用效应与力偶在作用平面内的位置无关。

②只要保持力偶矩不变(包括大小和转向)，即可任意改变力偶中力的大小和力偶臂的长度，而不影响它对刚体的转动效应。

可用图 1-11 所示的符号表示力偶等效。

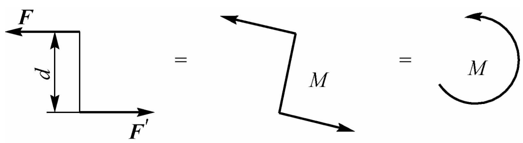


图 1-11　等效力偶符号表示法

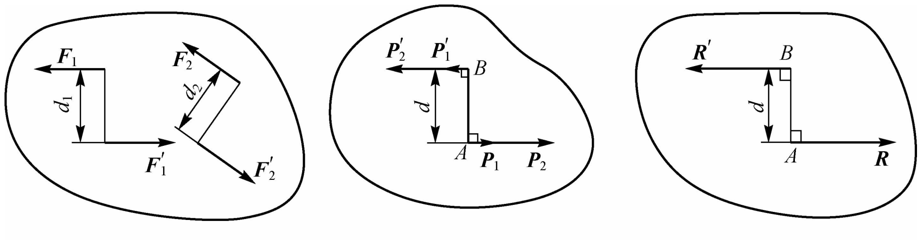
1.1.5　力偶系的合成

作用平面共面的力偶系称为**平面力偶系**。

设($\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_1'$)和($\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_2'$)是同一平面内的两个力偶，其力偶臂分别为 d_1 和 d_2[见图 1-12(a)]，其力偶矩分别为 $\boldsymbol{M}_1$ 和 $\boldsymbol{M}_2$。

在力偶的作用平面内任取一线段 $AB=d$，根据平面力偶等效的条件，可知 $M_1=F_1d_1=P_1d$，$M_2=F_2d_2=P_2d$，可得与原力偶等效的两个力偶($\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_1'$)和($\boldsymbol{P}_2$，$\boldsymbol{P}_2'$)，其中，$\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 均与线段 AB 垂直，如图 1-12(b)所示。在作用点 A，B 处实施力的合成，则有合力 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2$，$\boldsymbol{R}'=\boldsymbol{P}_1'+\boldsymbol{P}_2'$，因此合力 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{R}'$ 就组成了一个合力偶($\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{R}'$)，如图 1-12(c)所示。这就是两个已知力偶的合力偶，合力偶矩为

$$M=Rd=(P_1+P_2)d=P_1d+P_2d=M_1+M_2$$



(a) 平面两力偶　(b) 两力偶的等效力偶　(c) 两力偶的合力偶

图 1-12　力偶系的合成

若作用在同一平面内的力偶有 n 个，则其合力偶矩为

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i \tag{1-15}$$

式中，M 为合力偶矩；M_i 为第 i 个分力偶矩；n 为力偶总数。

综上所述，**平面力偶系的合成结果为一合力偶，合力偶矩等于各力偶矩的代数和**。

1.2　静力学基本公理

为研究力系的简化和平衡条件，进行物体的受力分析，应先研究两个力的合成和平衡条件，以及两个物体间的相互作用的最基本力学规律。这些经实践反复检验、符合客观实际的普遍规律，称为**静力学基本公理**。

公理 1　二力平衡条件

作用于刚体上的两个力，使刚体保持平衡的必要充分条件是：这两个力大小相等，方向相反，且作用在同一直线上。如图 1-13 所示，这两个力可以是拉力，也可以是压力。

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2 \tag{1-16}$$

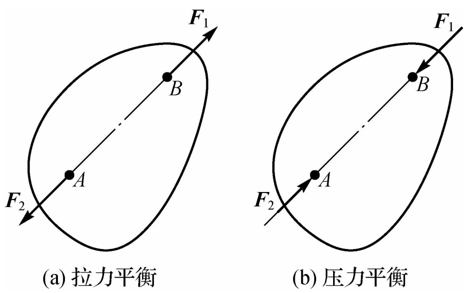


图 1-13　二力平衡条件

这个公理所给出的条件对于刚体来说是既必要又充分的；但对于非刚体来说，这个条件是不充分的。例如，对于软绳，当其受到两个等值反向的拉力作用时可以平衡，但当其受到两个等值反向的压力作用时就不能平衡。工程上常把不计自重且仅在两点处各受一力作用而保持平衡的刚体，称为**二力杆或二力杆件**。二力杆件的形状可以是直线形状，也可以是其他形状。作用在二力杆件上的两个力必然是等值、反向、共线的。

公理 2　加减平衡力系原理

在作用于刚体的任意力系中加上或减去任一平衡力系，并不改变原力系对刚体的作用效果。

推论 1　力的可传性原理

作用于刚体上的力，可沿其作用线移动至刚体上的任意点而不改变它对刚体的作用效果。

证明：设力 $\boldsymbol{F}$ 作用于刚体上的 A 点，如图 1-14(a)所示。根据加减平衡力系原理，在该力的作用线上任取一点 B，并加上两个相互平衡的力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$，使 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}_1$，如图 1-14(b)所示。由于力 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}_1$ 也是一个平衡力系，故可以去除；这样只剩下一个力 $\boldsymbol{F}_2$，如

图 1-14(c)所示。于是原来的这个力 $\boldsymbol{F}$ 与力系($\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2$)以及力 $\boldsymbol{F}_2$ 互等。这样就把原来作用于 A 点的力沿其作用线移到了 B 点。

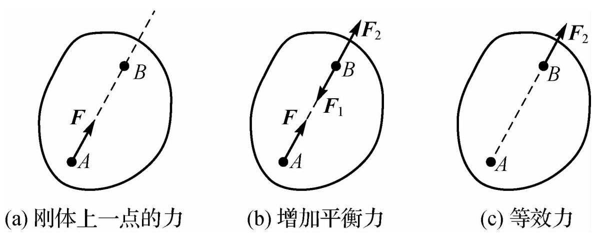


图 1-14　刚体力的可传性

由此可见，力对刚体的作用效果与力的作用点在作用线上的位置无关，即作用点已被作用线代替。因此，**作用于刚体上力的三要素是**：力的大小、方向和作用线。

必须注意：力的可传性原理只适用于刚体而不适用于弹性体。例如，弹性杆 AB 因其两端受到等值、反向、共线的两个拉力 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}'$ 的作用而处于平衡状态[见图 1-15(a)]，如果将这两个力沿其作用线分别移至杆件的另一端[见图 1-15(b)]，则弹性杆 AB 虽然也处于平衡状态，但杆的变形不同，前者是受拉伸长，而后者是受压缩短。

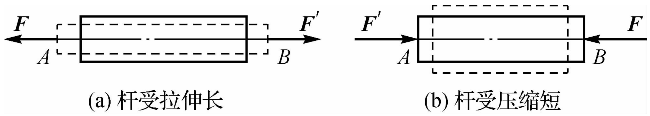


图 1-15　弹性体受拉力和压力变形

公理 3　力的平行四边形法则

作用于物体上同一点的两个力可以合成为一个力，合力的大小和方向则由以两个力的矢量为邻边所构成的平行四边形的对角线来表示。合力的作用点为原来两个力的作用点，这个对角线矢量称为原来两个力的**合力矢**，简称**合力**。如图 1-16(a)所示，合力矢等于两个力矢量的矢量和或几何和，即

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 \tag{1-17}$$

当根据力的平行四边形法则求两个汇交力的合力时，可由任意一点作一个力的三角形，如图 1-16(b)或(c)所示。力的三角形的两条边分别为力矢量 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$，第三条边为力矢量 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$，即代表合力，合力的作用点在汇交点上，这种求合力矢的方法称为**力的三角形法则**。

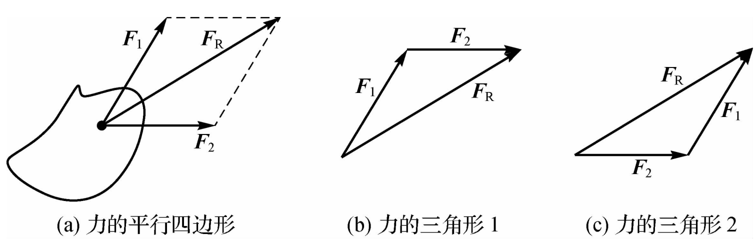


图 1-16　力的平行四边形与力的三角形

推论 2　三力平衡汇交定理

作用于刚体上的三个相互平衡的力，若其中两个力的作用线汇交于一点，则此三个力必

在同一平面内，并汇交于同一点。

证明：如图 1-17 所示，在刚体的 A，B，C 三点上分别作用三个相互平衡的力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 和 $\boldsymbol{F}_3$。根据力的可传性原理，将力 $\boldsymbol{F}_1$ 和力 $\boldsymbol{F}_2$ 移至汇交点 O 处，然后根据力的平行四边形法则求得合力 $\boldsymbol{F}_{12}$。力 $\boldsymbol{F}_3$ 应与合力 $\boldsymbol{F}_{12}$ 平衡，根据二力平衡原理，这两个力必须共线，故力 $\boldsymbol{F}_3$ 必定与力 $\boldsymbol{F}_1$ 和力 $\boldsymbol{F}_2$ 共面，且通过力 $\boldsymbol{F}_1$ 和力 $\boldsymbol{F}_2$ 的交点 O。于是定理得证。

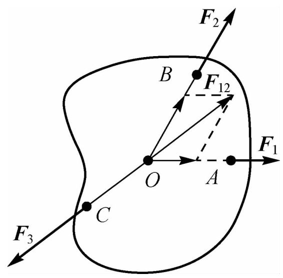


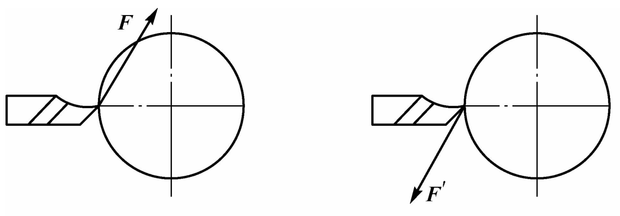
图 1-17　平面三力平衡条件

公理 4　作用与反作用定律

两个物体间的作用力与反作用力总是同时存在的，两力的大小相等、方向相反，沿同一直线分别作用在两个相互作用的物体上。

这个公理概括了自然界物体间相互机械作用的关系，表明物体间的作用力与反作用力总是成对出现的。必须指出，由于作用力与反作用力是分别作用在两个物体上的，因此不能认为作用力与反作用力是相互平衡的。该公理既适用于刚体，也适用于变形体。

如图 1-18 所示，用车刀切削工件时，车刀作用在工件上的切削力为 $\boldsymbol{F}$，与此同时，工件也有作用在车刀上的反作用力 $\boldsymbol{F}'$。这两个力是等值、反向、共线的。本书中的作用力与反作用力用同一字母表示，但其中一个字母右上角加一撇（′），表示反作用力。



(a) 刀具的切削力　　(b) 工件对刀具的反作用力

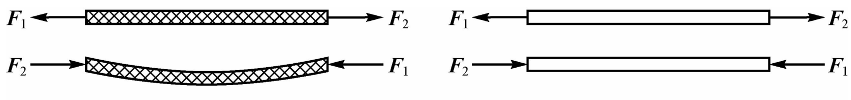
图 1-18　刀具和工件的作用力与反作用力

公理 5　刚化原理

变形体在某一力系作用下处于平衡状态，如果将此变形体刚化为刚体，则平衡状态保持不变。

这个公理提供了把变形体抽象成刚化模型的条件。如图 1-19(a)所示，绳索在两个等值、反向、共线的拉力作用下处于平衡状态，如果将绳索刚化为刚体，其平衡状态保持不变；而绳索在两个等值、反向、共线的压力作用下则不能平衡，这时就不能刚化为刚体。但刚体在上述两种力系作用下都是平衡的，如图 1-19(b)所示。

动画
变形体平衡



(a) 柔性绳索　(b) 刚性杆

图 1-19　变形体的刚化模型

由此可见，刚体的平衡条件是变形体平衡的**必要条件**，而非充分条件。在刚体静力学的基础上考虑变形体的特性，可进一步研究变形体的平衡问题。

1.3　约束与约束力

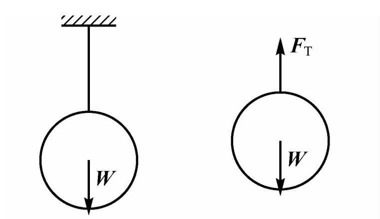
在空间自由运动，其位移不受任何限制的物体称为**自由体**，如在空中飞行的飞机、炮弹和火箭等。而有些物体，如机车、电机转子、吊车上悬挂的重物等，在空间的位移会受到不同程度的限制。机车受铁轨的限制，只能沿轨道运动；电机转子受轴承的限制，只能绕轴线转动；重物受钢索的限制，不能下落；等等。位移受到限制的物体称为**非自由体**。对非自由体的某些位移起限制作用的周围物体称为**约束**。例如，铁轨对机车、轴承对电机转轴、吊车钢索对悬挂重物等都是约束。

既然约束阻碍着物体运动，也就是约束能够起到改变物体运动状态的作用，约束对物体的作用力称为**约束力**。**约束力的方向必然与该约束所能阻碍的运动方向相反**。根据这个准则，可以确定约束力的方向或作用线的位置。至于约束力的大小，总是未知的。在静力学问题中，约束力与物体受到的其他已知力组成平衡力系，凡是促使物体运动或使物体有运动趋势的力称为**主动力**，如重力、风力、切削力等，工程上也称为**载荷**。约束力可由平衡条件求出。

动画
单摆脱离约束

1.3.1　柔索约束

绳索、钢丝等柔性物体称为**柔体**。由于柔体只能阻止物体沿其伸长方向运动，而不能阻止物体沿其压缩方向运动，所以，**柔体的约束力是拉力，作用在连接点上，其方向沿着柔体的轴线方向背离物体**。通常用 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{S}}$ 表示这类约束力。如图 1-20 所示，绳索的拉力为 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$。链条或皮带只能承受拉力，当它们绕过轮子时，约束力沿轮缘的切线方向，如图 1-21 所示。



(a) 柔索悬挂重物　(b) 悬挂物受力分析

图 1-20　柔索约束受力分析

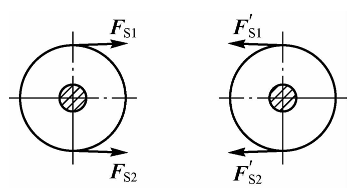


图 1-21　皮带轮约束力分析

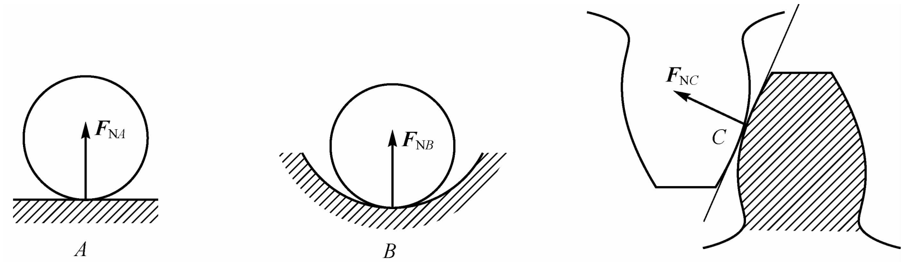
1.3.2　刚性约束

约束和被约束物体都是刚体，因而两者之间为刚性接触，这种约束称为**刚性约束**。下面的几种约束都可看作刚性约束。

1. 光滑接触面约束

当两个物体的接触面处于光滑无摩擦时，约束只能限制被约束物体沿其接触面公法线方向的运动，而不限制其沿接触面切线方向的运动。因此，**光滑接触面约束的约束力只能沿着接触面的公法线方向，通过接触点并指向被约束物体**。这种约束力通常用字母 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ 表示。如图 1-22 所示，不论是光滑平面约束，还是光滑曲面约束，或是光滑齿面约束，均不考虑摩擦力。

动画
沿光滑圆柱体移动的小球脱离约束现象



(a) 光滑平面约束　(b) 光滑曲面约束　(c) 光滑齿面约束

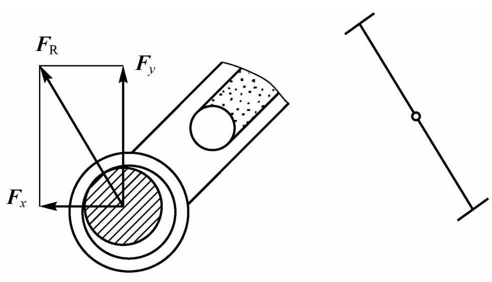
图 1-22　光滑接触面约束

2. 光滑圆柱铰链约束

动画
铰链约束

光滑圆柱铰链约束有向心轴承、圆柱形铰链和固定铰链支座等。如门窗用的合页、活塞等都是光滑圆柱铰链的实例。理想的光滑圆柱铰链是由一个圆柱形销钉插入两个物体的光滑圆孔中构成的，如图 1-23(a)所示。

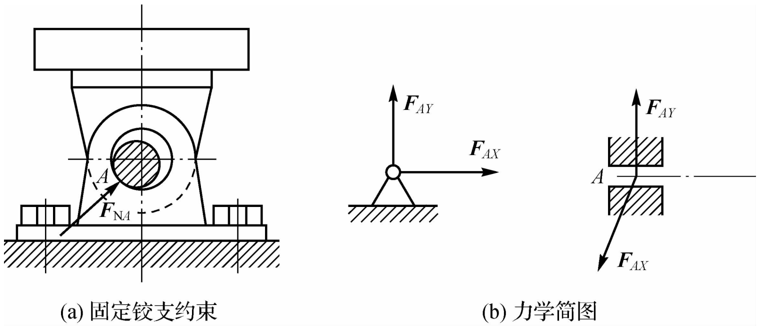
光滑圆柱铰链约束只能限制物体在垂直于销钉轴线平面内任意方向上的运动，而不限制物体绕销钉的转动和沿其轴线方向的移动。由于接触点一般不能预先确定，且接触面光滑，所以铰链的约束力必作用于接触点，并垂直于销钉轴线，而方向未定，如图 1-23(a)中的 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 所示。光滑圆柱铰链约束也可用两个正交方向的分力 $\boldsymbol{F}_x$ 和 $\boldsymbol{F}_y$ 来表示，该约束也称为中间铰。图 1-23(b)所示为光滑圆柱铰链约束简图。



(a) 销钉圆孔约束力　(b) 铰链约束简图

图 1-23　光滑圆柱铰链约束及其简图

类似的例子如轴承，轴既可在孔内任意转动，也可沿孔的中心线移动，但轴承阻碍轴沿径向位移。设轴与轴承在 A 点接触，且摩擦忽略不计，则轴承对轴的约束力 $\boldsymbol{F}_{NA}$ 作用在接触点 A 上，并沿接触面的公法线指向轴心，如图 1-24(a)所示。但是，随着轴所受的主动力的不同，轴和孔的接触点的位置也随之变化。所以，**当主动力尚未确定时，约束力的方向也不能确定。然而，无论约束力朝向何方，它的作用线必垂直于轴线并通过轴心**。通常对这样一个方向不能预先确定的约束力，用通过轴心的两个大小未知的正交分力 $\boldsymbol{F}_{AX}$ 和 $\boldsymbol{F}_{AY}$ 来表示，如图 1-24(b)所示的两种简化表示法均可。



(a) 固定铰支约束　　(b) 力学简图

图 1-24　光滑固定铰支约束及其力学简图

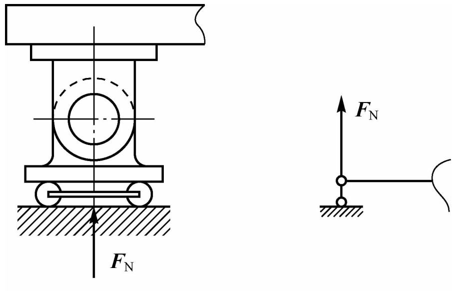

动画
支座约束

3. 支座约束

铰链结构中有两个构件，若其中一个固定于基础或机架上，这种铰链约束称为**固定铰支座**。固定铰支座的约束力与铰链约束相似，其力学简图与约束力如图 1-24(b)所示。

滑动铰支座又称为辊轴约束，经常与固定铰支座配对使用。桥梁、屋架结构中采用的辊轴约束如图 1-25(a)所示。采用这种约束主要是考虑到温度的改变会使桥梁的长度发生一定量的伸长或缩短，为保证伸缩自由，辊轴可沿伸缩方向做微小滚动。

工程结构中的辊轴支撑，既可以限制物体沿支撑面公法线单向运动，也可以限制其沿支撑面公法线的两个方向运动。约束力 $\boldsymbol{F}_N$ 垂直于支撑面，可能指向被约束物体，亦可能背向被约束物体。图 1-25(b)所示为该种约束的力学简图。



(a) 辊轴约束　　(b) 力学简图

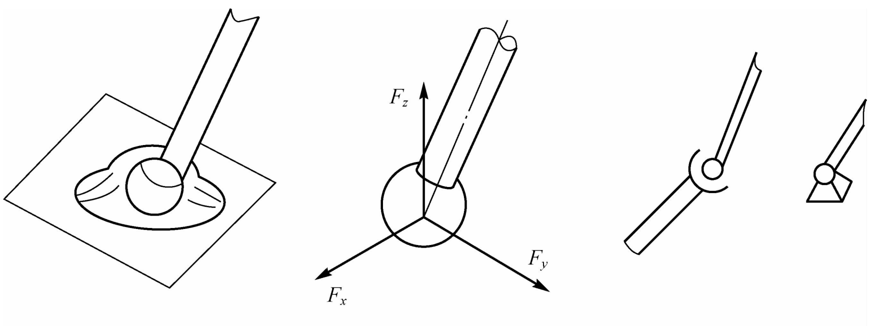
图 1-25　滑动铰支座及其力学简图

4. 球形铰链约束

球形铰链简称球铰。球铰有固定球铰和活动球铰之分。球铰的结构简单，如图 1-26(a)

所示，被约束物体上的球头与约束上的球窝连接。这种约束的特点是被约束物体只绕球心做空间转动，而不能有空间任意方向的移动。因此，球铰的约束力为空间力，一般用三个力 $\boldsymbol{F}_x$，$\boldsymbol{F}_y$ 和 $\boldsymbol{F}_z$ 表示，如图 1-26(b)所示。其力学简图如图 1-26(c)所示。

动画
球形铰链约束

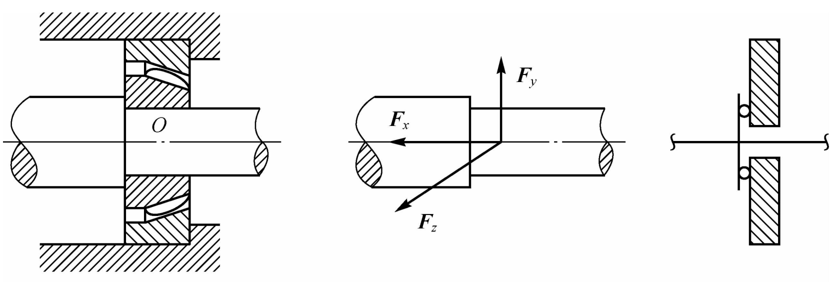


(a) 球铰　　(b) 球铰约束力　　(c) 球铰力学简图

图 1-26　球铰约束及其力学简图

5. 止推轴承约束

图 1-27(a)所示的止推滚子轴承除了具有与向心轴承一样的径向定位作用外，还有限制轴向运动的作用，因而除作用线有不定向的径向约束力外，还有沿轴线方向的约束力 $\boldsymbol{F}_x$ 和如图 1-27(b)所示。其力学简图如图 1-27(c)所示。



(a) 止推滚子轴承　　(b) 约束力　　(c) 力学简图

图 1-27　止推轴承约束及其力学简图

1.4　物体的受力分析与受力图

在工程实际中，为了求出未知的约束力，需要根据已知力应用平衡条件求解。为此，首先要分析构件受几个力，每个力的作用位置和作用方向，这个分析过程称为**物体的受力分析**。为清晰地表示物体的受力情况，我们需要把要研究的物体（**受力体**）从周围的物体（**施力体**）中分离出来，单独画出其简图，这个步骤称为**取研究对象**（或**取分离体**）。这种被解除约束的物体，称为**分离体**。然后把施力体对研究对象的作用力全部画出来，这种表示物体受力的简明图形，称为**受力简图**。画物体受力简图是解决静力学问题的一个重要步骤。

作用在物体上的力可分为两大类：一大类是**主动力**，其大小和方向是已知的，如重力、风力、气体压力等；另一大类是**被动力**，为未知的约束力，可通过平衡条件来确定。

进行受力分析的一般步骤是：确定研究对象—取分离体，画受力简图—画出主动力—逐个分析约束，画出约束力。

注意：

(1)在受力简图中仅画出与研究对象相关的全部作用力。

(2)画出的每一个力要有根据，既不能多画，也不能漏画。**内力**(研究对象内各部分间的相互作用力)不画。

(3)物体间的相互作用力应符合作用与反作用定律。

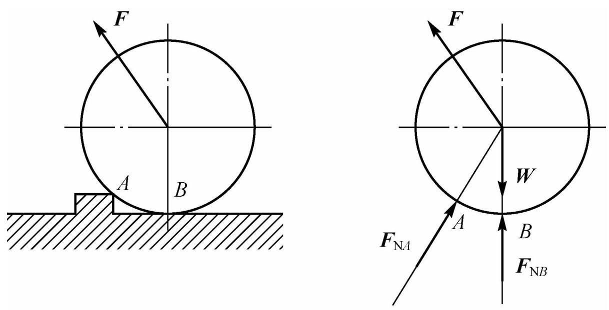
(4)应用二力构件的受力特点和三力平衡汇交定理，确定某些约束力的正确方向。

下面举例说明。

【例 1-2】　如图 1-28(a)所示，用力 $\boldsymbol{F}$ 拉动压路机的碾子以压平路面，碾子受到一石块的阻碍。试画出碾子的受力简图。

解：(1)以碾子为研究对象，画出分离体。

(2)受力分析。主动力为地球的引力 $\boldsymbol{W}$ 和拉杆对碾子中心的拉力 $\boldsymbol{F}$，约束力为碾子在 A 和 B 两点分别受到的石块与地面的约束；若不计摩擦，则均为光滑接触，故 A 点受到石块的法向约束力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}A}$ 的作用，B 点受到地面法向约束力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}B}$ 的作用，它们都沿着碾子上的接触点的公法线指向圆心。碾子的受力简图如图 1-28(b)所示。



(a) 压路机的碾子　　(b) 碾子的受力简图

图 1-28　例 1-2 图

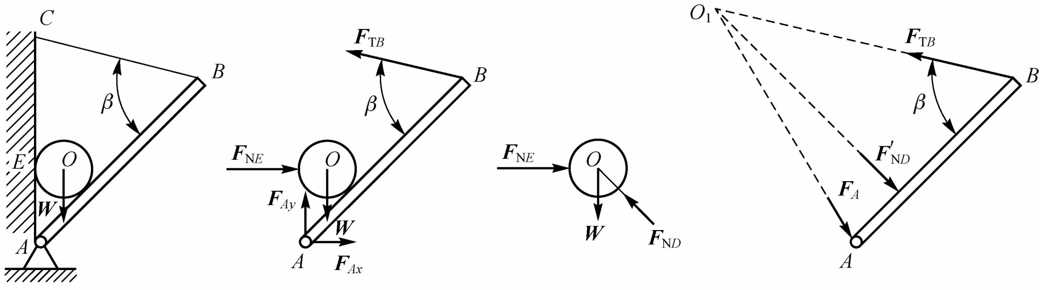
【例 1-3】　分析并画出图 1-29(a)所示的物体系、球和杆件(AB 为杆件、BC 为绳索)的受力简图。设各接触面均为光滑面。

解：(1)选取球和杆件整体为研究对象，画出其受力简图。作用在整体上的主动力有球的重力 $\boldsymbol{W}$。约束力包括：解除固定铰支座 A 的约束，其约束力的大小和方向不确定，可用两个分力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$ 和 $\boldsymbol{F}_{Ay}$ 表示；解除光滑面 AEC 的约束，其约束力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}E}$ 垂直于光滑面 AEC，指向球心 O；解除绳索约束(剪断绳索)，其约束力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}B}$ 的方向沿绳索指离杆件 AB。物体系的受力简图如图 1-29(b)所示。

(2)选取球为研究对象，画出其受力简图。作用在球上的主动力有球的重力 $\boldsymbol{W}$；约束力包括：光滑面 AEC 的约束力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}E}$；解除杆件 AB 的约束，其约束力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}D}$ 垂直于杆件 AB，且指向球心 O。球的受力简图如图 1-29(c)所示。

(3)选取杆件 AB 为研究对象，画出其受力简图。作用在杆件 AB 上的约束力有：解除绳索约束，其约束力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}B}$ 的方向沿绳索背离杆件 AB；球可视为约束，其约束力为 $\boldsymbol{F}'_{\mathrm{N}D}$，它与

$\boldsymbol{F}_{ND}$构成了作用力与反作用力；作 $\boldsymbol{F}_{TB}$与$\boldsymbol{F}'_{ND}$的交点O_1，根据三力平衡汇交定理，可确定 A 支座处的约束力 $\boldsymbol{F}_A$ 作用线也交于O_1点。杆件的受力简图如图 1-29(d)所示。



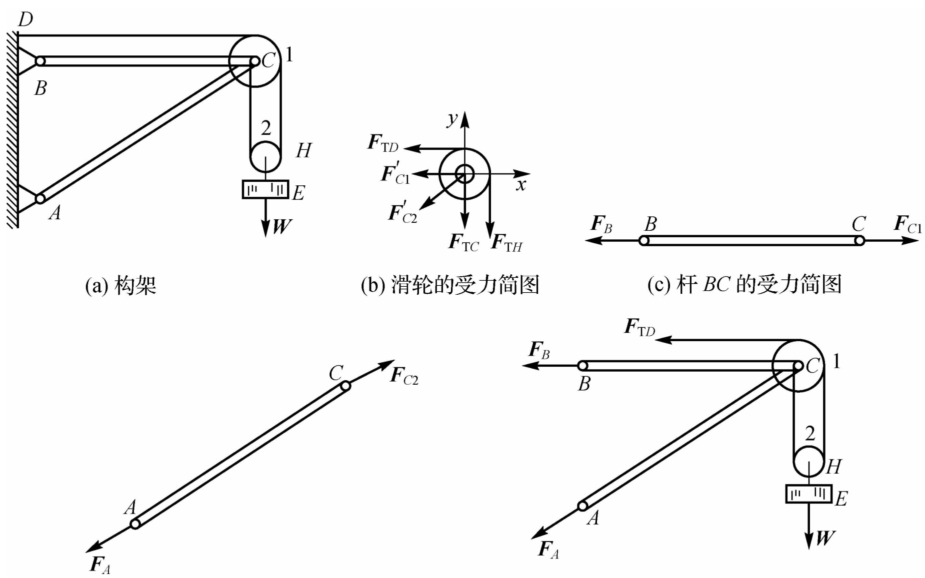
(a) 物体系　(b) 物体系的受力简图　(c) 球的受力简图　(d) 杆件的受力简图

图 1-29　例 1-3 图

【例 1-4】 构架如图 1-30(a)所示，载荷为 $\boldsymbol{W}$。A，B 均为固定铰支座，C 为中间铰链(销钉)，钢绳的一端固定在 D 点，另一端绕过滑轮 1 和滑轮 2 系在 C 上。试分别画出滑轮 1 和整个系统的受力简图。各杆件及滑轮的质量不计。

解：(1)选取滑轮 1(包括两段钢绳和销钉 C)为研究对象。如图 1-30(b)所示，作用于滑轮 1 上的力有三段钢绳拉力 $\boldsymbol{F}_{TD}$，$\boldsymbol{F}_{TC}$和 $\boldsymbol{F}_{TH}$。由于 BC 和 AC 均为二力杆，所以力 $\boldsymbol{F}_{C1}$和 $\boldsymbol{F}_{C2}$的方向分别沿杆 BC 与 AC 的中心线，其指向先假设如图 1-30(c)、(d)所示，其反作用力分别为 $\boldsymbol{F}'_{C1}$和 $\boldsymbol{F}'_{C2}$。

(2)取整个系统为研究对象，画出其受力简图。由于滑轮 1 所受的力为作用力和反作用力的关系，如 $\boldsymbol{F}_{C1}=-\boldsymbol{F}'_{C1}$，$\boldsymbol{F}_{C2}=-\boldsymbol{F}'_{C2}$，这些力是成对地作用于整个系统内部的内力。因为内力对所研究系统的作用相互抵消，不影响整个系统的平衡，故不予考虑，在受力简图上也不必画出。在受力简图上只需画出系统以外的物体对系统的作用力，即重力 $\boldsymbol{W}$，约束力 $\boldsymbol{F}_A$、$\boldsymbol{F}_B$和 $\boldsymbol{F}_{TD}$。整个系统的受力简图如图 1-30(e)所示。



(a) 构架　(b) 滑轮的受力简图　(c) 杆 BC 的受力简图

(d) 杆 AC 的受力简图　(e) 整个系统的受力简图

图 1-30　例 1-4 图

【例 1-5】 对称屋架如图 1-31(a)所示。A 为固定铰支座,B 为滚动支座,两支座被搁在光滑的水平面上。已知对称屋架的自重为 $\boldsymbol{W}$,对称屋架 AC 边承受了垂直于它的均匀分布的风力[单位长度上承受的力 q(N/m)]。试画出对称屋架的受力简图。

解:(1)取对称屋架为研究对象,除去约束。

(2)画出主动力。主动力有屋架的重力 $\boldsymbol{W}$ 和均布的风力 q。

(3)画出约束力。A 为固定铰支座,其约束力通过铰链中心 A,但方向不能确定,可用两个大小未知的正交分力 $\boldsymbol{F}_{AX}$ 和 $\boldsymbol{F}_{AY}$ 表示。B 为滚动支座,约束力垂直向上,用 $\boldsymbol{F}_{NB}$ 表示。

对称屋架的受力简图如图 1-31(b)所示。

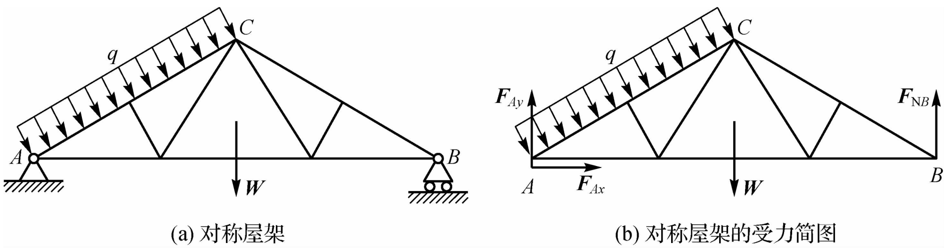


图 1-31　例 1-5 图

本章小结

(1)**力的概念**。力是物体间的相互机械作用,这种作用效果可使物体的形状和机械运动状态发生变化。力的**三要素**:大小、方向和作用点。作用于刚体上的力的三要素为大小、方向和作用线。

(2)**刚体**。刚体是指在力的作用下不发生变形的物体。

(3)**静力学基本公理**。静力学基本公理是力学中最基本、最普遍的客观规律。其中,**力的平行四边形法则**阐明了作用于物体上同一点的两个力可用一个力等效代替的规则;**二力平衡条件**阐明了作用于刚体上最简单力系——二力平衡的条件;**加减平衡力系原理**阐明了作用于刚体上的任意力系等效替换的条件;**作用与反作用定律**阐明了两个物体相互间的作用力关系。

(4)力在平面直角坐标轴上的投影是**代数量**,力沿坐标轴的分量为**矢量**。

①直接投影法。

$$\begin{cases} X=F\cos\alpha \\ Y=F\cos\beta \\ Z=F\cos\gamma \end{cases}$$

②二次投影法。

$$\begin{cases} X=F\sin\gamma\cos\varphi \\ Y=F\sin\gamma\sin\varphi \\ Z=F\cos\gamma \end{cases}$$

③力在空间坐标系中投影的解析表达式为

$$\boldsymbol{F}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$$

④力沿空间直角坐标轴的分量为

$$\begin{cases}F_x = X\boldsymbol{i} \\ F_y = Y\boldsymbol{j} \\ F_z = Z\boldsymbol{k}\end{cases}$$

(5)在平面力系中，力对**点**之矩可以用**代数量**表示，其大小等于力的大小与力臂的乘积，其符号规定为：力使物体绕矩心逆时针旋转为正，反之为负。其大小可表示为

$$M_O(\boldsymbol{F}) = \pm Fd$$

在空间问题中，力对**点**之矩是一个**定位矢量**，它垂直于力矩和矩心所在的平面，方向可按右手螺旋规则确定。矢积可表示为

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

(6)力对**轴**之矩是**代数量**，正、负号按右手螺旋规则确定。

(7)力对点之矩在通过该点的轴上的**投影**等于力对该轴的矩。

(8)力偶是由等值、反向、不共线的两个平行力组成的力系。**力偶没有合力，也不能用一个力平衡**。力偶对刚体的作用效果是使之**转动**。

(9)**力偶的等效性**。力偶矩是力偶作用效应的度量。作用于同一平面内的两个力偶，若力偶矩相等，则这两个力偶彼此等效。

(10)**力偶的合成**。根据力偶的等效性，可以将作用在刚体上同一作用平面内的两个力偶简化为一个合力偶，其力偶矩等于各个力偶矩的代数和。

(11)**约束**。约束是与非自由体相连接并限制其在某些方向上运动的物体。约束作用于非自由体的力称为**约束力**。约束力的方向与限制非自由体运动的方向相反。

常见的约束类型有柔索约束(如柔性绳索、皮带、链条等)和刚性约束(光滑接触面约束、光滑圆柱铰链约束、固定铰支座和滑动铰支座、球形铰链约束、止推轴承约束)。

(12)**受力分析**。作用于物体上的力分为主动力和约束力。物体的受力分析步骤是：确定研究对象—取分离体，画出受力简图—画出主动力—逐个分析约束，画出约束力。

习题

1. 填空题

(1)刚体是指受到力的作用，而________的物体。

(2)力是物体间的相互________。这种作用效果可使物体的________和________发生变化。

(3)作用于刚体上的力的三要素是________、________和________。

(4)从某一给定力系中加上或减去力________系，不改变原力系对________的作用效果。

(5)一个力对物体的作用效果取决于力的大小________和________。

(6)约束力的方向总是与约束所阻碍的物体的位移方向________。

(7)二力杆是两端与其他物体用光滑铰链连接，不计________且中间不受力的杆件。

(8)分离体内各部分之间相互作用的力，称为________。分离体以外的物体对分离体的作用力，称为________。在受力简图上只画________。

(9)当同一约束的约束力在几个不同的受力简图上出现时，各受力简图上对同一约束力

所假定的指向必须________。

(10)力 $\boldsymbol{F}$ 在某坐标轴上的投影是________量;力 $\boldsymbol{F}$ 在某坐标轴上的分力是________量。

(11)力偶在任何坐标轴上投影的代数和恒等于________。

(12)作用在刚体上的两个力偶等效的充分必要条件是________。

(13)力偶使刚体转动的效果与________无关,完全由________决定。

2. 选择题

(1)受力分析是(　　)。

A. 分析物体受几个力

B. 分析每个力的作用位置

C. 分析每个力的方向

D. 分析某个物体共受几个力,以及每个力的作用位置和方向

(2)二力平衡条件的适用范围是(　　)。

A. 变形体　　B. 刚体系统

C. 单个刚体　　D. 任何物体或物体系

(3)加减平衡力系原理的适用范围是(　　)。

A. 单个刚体　　B. 变形体

C. 刚体系统　　D. 任何物体或物体系

(4)作用与反作用定律的适用范围是(　　)。

A. 只适用于刚体　　B. 只适用于变形体

C. 只适用于平衡状态的物体　　D. 对任何物体均适用

(5)在图 1-32 所示的力的平行四边形中,表示力 $\boldsymbol{F}_1$ 和力 $\boldsymbol{F}_2$ 的合力 $\boldsymbol{F}_R$ 的图是(　　)。

A.(a)　　B.(b)　　C.(c)　　D.(d)

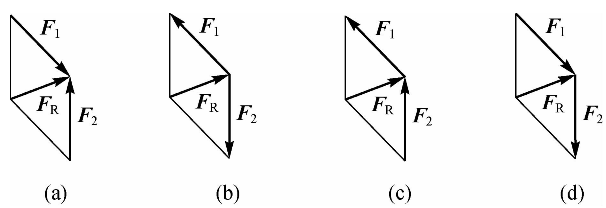


图 1-32　第 1 章选择题(5)图

(6)柔性体约束的约束力,其作用线沿柔性体的中心线,(　　)。

A. 其指向在表示时可任意假设　　B. 其指向在表示时有的情况可任意假设

C. 其指向一定背离被约束物体　　D. 其指向点可能指向被约束物体

(7)如图 1-33 所示,平面汇交力系中四力之间的关系是(　　)。

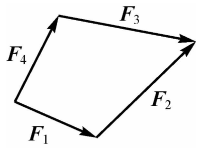
A. $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3+\boldsymbol{F}_4=0$　　B. $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_3=\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_4$

C. $\boldsymbol{F}_4=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3$　　D. $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{F}_3+\boldsymbol{F}_4$

(8)如图 1-34 所示,一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用于 A 点,其方向水平向右,其中 a,b 和 α 为已知,则该力对 O 点的矩为(　　)。

A. $M_O(\boldsymbol{F})=-F\sqrt{a^2+b^2}$　　B. $M_O(\boldsymbol{F})=Fb$

C. $M_O(\boldsymbol{F})=-F\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha$　　D. $M_O(\boldsymbol{F})=F\sqrt{a^2+b^2}\cos\alpha$



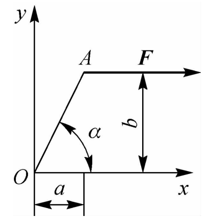


图 1-33　第 1 章选择题(7)图　　　　图 1-34　第 1 章选择题(8)图

(9)如图 1-35 所示,如果将作用于 AC 上的力偶移到构件 BC 上,则(　　)。

A. 支座 A 的约束力不会发生变化

B. 支座 B 的约束力不会发生变化

C. 铰链 C 的约束力不会发生变化

D. A,B,C 处的约束力均会有变化

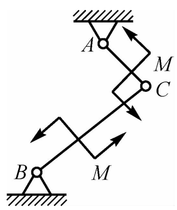


图 1-35　第 1 章选择题(9)图

(10)如图 1-36(a)所示,其中一条绳子的一端固定在墙上,另一端受大小为 2 000 N 的拉力 $\boldsymbol{F}$ 的作用。另一条绳子的两端均受大小为 2 000 N 的拉力 $\boldsymbol{F}$ 的作用,如图 1-36(b)所示。则这两条绳子的受力情况是(　　)。

A. 相同　　　　B. 不相同

C. 大小相等,方向不同　　　　D. 不确定

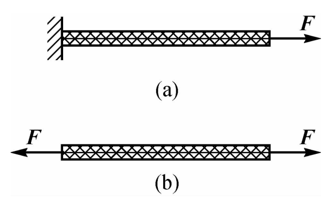


图 1-36　第 1 章选择题(10)图

3. 计算与分析题

(1)计算图 1-37 所示的各图中力 $\boldsymbol{F}$ 对点 O 之矩。

(2)水平圆盘的半径为 r,外边缘 C 处作用有已知力 $\boldsymbol{F}$。力 $\boldsymbol{F}$ 处于铅垂平面内,且与 C 处圆盘切线的夹角为 60°,其他尺寸如图 1-38 所示。求力 $\boldsymbol{F}$ 对 x,y,z 轴之矩。

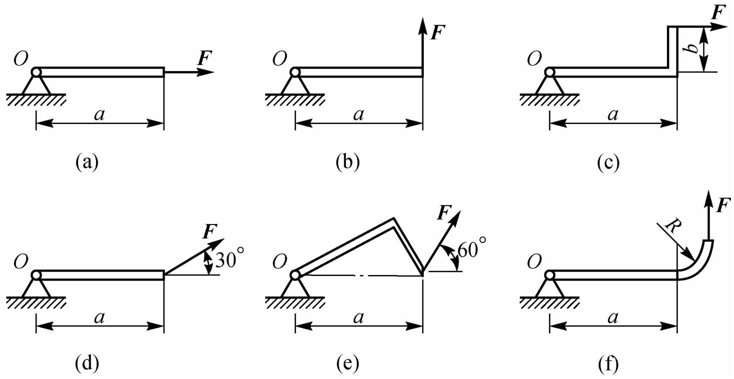


图 1-37　第 1 章计算与分析题(1)图

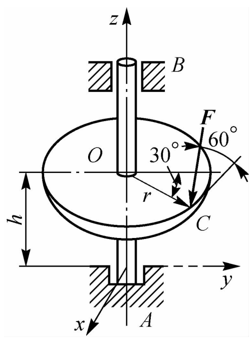


图 1-38　第 1 章计算与分析题(2)图

(3)一长方体上作用的各力如图 1-39 所示(尺寸单位为 mm)。各力的大小分别为 $F_1=50\ \mathrm{N}$,$F_2=100\ \mathrm{N}$,$F_3=70\ \mathrm{N}$。试分别计算:

①这三个力在 x,y,z 轴上的投影。

②这三个力对三个坐标轴之矩。

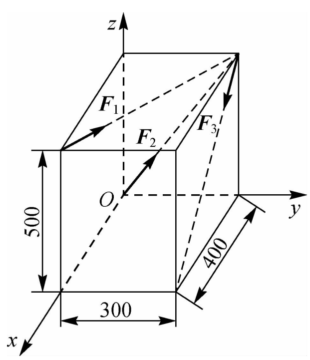


图 1-39　第 1 章计算与分析题(3)图

(4)试分别画出图 1-40 中各物体的受力简图。凡未标明自重的物体,重量均不计;接触处均为光滑。

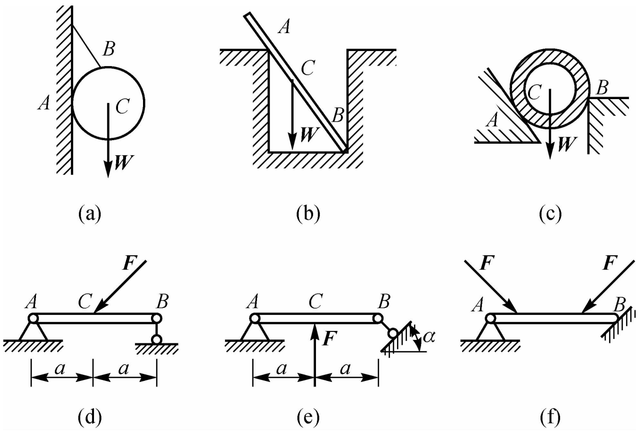


图 1-40　第 1 章计算与分析题(4)图

(5)试分别画出图 1-41 中各物体系中每个物体的受力简图。

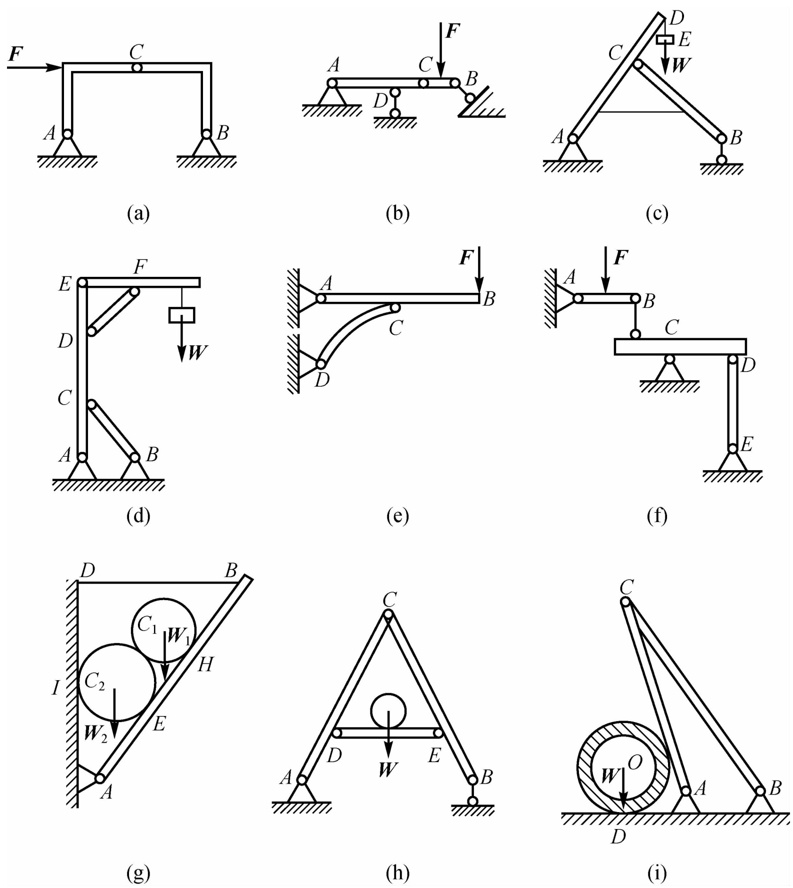


图 1-41　第 1 章计算与分析题(5)图

(6)构架结构如图 1-42 所示,试分别画出杆 AB、销钉 A 及整个系统的受力简图。

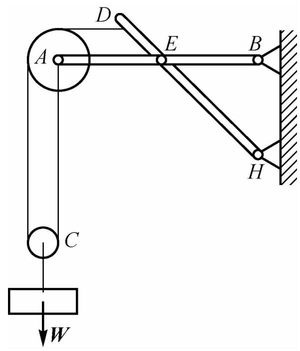


图 1-42　第 1 章计算与分析题(6)图

第2章 力系简化

学习目标

教学提示：本章主要介绍力系的类型；力的平移定理；平面汇交力系；平面任意力系的简化；力的分解；平行力系的中心，物体的重心。

教学要求：要求学生熟练掌握力系的类型、力的平移定理、平面汇交力系及平面任意力系的概念；能够根据力的类型，熟练运用力的几何合成法、力的解析法进行力的合成与分解；正确理解平行力系的中心和物体重心的概念，并能进行一般计算；了解质心和形心的计算方法。

教学重点和难点：教学重点是力的平移定理、平面汇交力系和平面任意力系的基本概念；教学难点是力的平移定理、力的合成与分解方法、物体重心的计算方法。

在实际问题中，作用在物体上的力系是多种多样的，一般可分为两大类型：一类是平面力系，即力系中所有力的作用线都位于同一平面内，这样的力系称为**平面力系**；另一类是空间力系，即力系中所有力的作用线不都位于同一平面内，这样的力系称为**空间力系**。

力系对刚体的作用效应可用力系的基本特征量来描述，而基本特征量需要通过对力系的简化得到。

2.1 力的平移定理

把各力的作用线都位于同一平面内，既不都交于一点又不全部平行的力系称为**平面任意力系**。在工程实际问题中，大部分的力学问题都可归于这类力系。有些问题虽不属于平面任意力系，但对于某些结构对称、受力对称、约束对称的力系，经适当简化后仍可作为平面任意力系来处理。因此，研究这类力系具有很重要的工程实际意义。

设刚体上的一点 A 作用有一个力 $\boldsymbol{F}$，如图 2-1(a)所示。若要将此力平移到刚体上的任意一点 O 上，则需要在点 O 处加上一对与力 $\boldsymbol{F}$ 平行的平衡力 $\boldsymbol{F}'$ 和 $\boldsymbol{F}''$，且使 $F=F'=F''$，如图 2-1(b)所示。在重新组合的这一新力系中，显然 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{F}''$ 组成一力偶，称为**附加力偶**。于是，作用于点 A 的力 $\boldsymbol{F}$ 可以由作用于点 O 的力 $\boldsymbol{F}'$ 及力偶($\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{F}''$)来等效代替，附加力偶矩为 $M=\pm Fd$，如图 2-1(c)所示，其恰好等于原力 $\boldsymbol{F}$ 对点 O 的力矩，即 $M=M_O(\boldsymbol{F})$，而作用于点

O 的力 $\boldsymbol{F}'$，其大小和方向与原力 $\boldsymbol{F}$ 相同，只是作用点不同，即等效于图 2-1(d)所示。

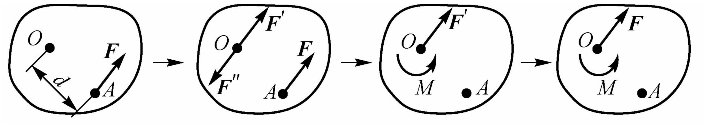


图 2-1　力的平移定理

综上所述，**作用于刚体上一点的力可以移动到刚体内的任意一点，但必须在该力与指定点所决定的平面内附加一力偶，其力偶矩等于原力对指定点之矩**，这就是**力的平移定理**。

根据力的平移定理，同一平面内的一个力和一个力偶也可用该平面内的另一个力等效替换。在图 2-1 中逆向变换，力作用线平移的距离 $d=|M|/F$。

由力的平移定理可知，虽然一力与一力偶不等效，但一力可与一力加一力偶等效。

力的平移定理不仅是力系简化的基础，而且可用来解释一些实际中的力学现象。例如，当用丝锥攻螺纹时，必须用双手握紧丝锥手柄的对称部位，且两手用力要等值、反向；不允许用一只手加力。如图 2-2 所示，若在丝锥的一端单手加力 $\boldsymbol{F}$，根据力的平移定理将其向丝锥中心平移，可得 $\boldsymbol{F}'$ 和 M，附加力偶矩 M 是攻丝所需要的力偶矩，而横向力 $\boldsymbol{F}'$ 会使丝锥攻丝不正，甚至使丝锥折断。

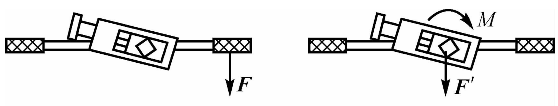


图 2-2　丝锥单手加力的平移

如图 2-3 所示，当球拍击球的作用力通过球心 O 时，球只向前移动；当球拍击球的作用力没有通过球心 O 时，按照力的平移定理，将力 $\boldsymbol{F}$ 平移至球心 O，平移力 $\boldsymbol{F}'$ 使球产生移动，附加力偶矩 M 使球绕球心 O 转动，形成旋转球。

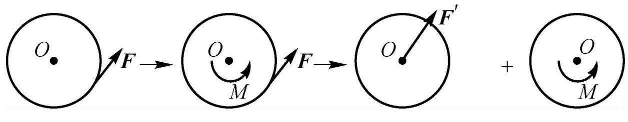


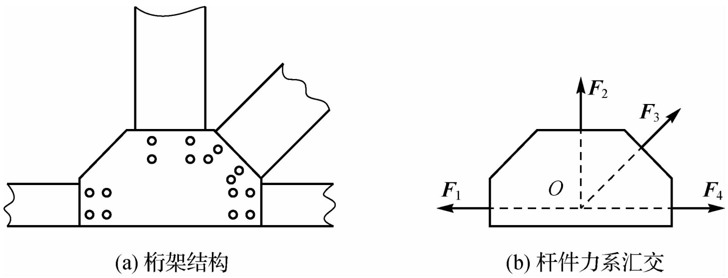
图 2-3　旋转发球的受力分析

2.2　平面汇交力系

静力学主要研究力系的**合成**和**平衡**问题。力系有各种不同的类型，它们的合成和平衡条件各不相同。按照力系中各力作用线是否在同一平面内，可将力系分为**平面力系**和**空间力系**两大类；按照力系中各力的作用线是否相交来分，可将力系分为**汇交力系**、**平行力系**和**任意力系**三类。

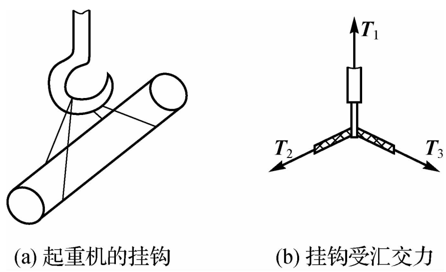
2.2.1　平面汇交力系的概念

我们先研究较为简单的平面汇交力系。在工程实际中经常会遇到平面汇交力系的问题。例如，欲求图2-4(a)所示的桁架结构中杆件的内力，应取某一节点 O 为研究对象，它受 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$ 和 $\boldsymbol{F}_4$ 四个力的作用，而它们的作用线均通过点 O 且在同一平面内，这是一个平面汇交力系。又如图2-5所示的起重机的挂钩受 $\boldsymbol{T}_1$，$\boldsymbol{T}_2$ 和 $\boldsymbol{T}_3$ 三个力的作用，显然这三个力的作用线在同一平面内且交于一点，这也是平面汇交力系。所谓**平面汇交力系**，就是指各力的作用线都在同一平面内且其作用线的延长线汇交于一点的力系。平面共点力系是最简单、最直接的平面汇交力系。



(a) 桁架结构　　(b) 杆件力系汇交

图2-4　桁架的受力分析



(a) 起重机的挂钩　　(b) 挂钩受汇交力

图2-5　起重机挂钩的受力分析

2.2.2　平面汇交力系的合成

由于作用在刚体上的平面汇交力系可以分别沿它们的作用线移动到汇交点上，且并不影响其作用效果，因此平面汇交力系与作用于同一点的平面力系对刚体的作用效果是一样的。所以，这里只讨论平面共点力系的合成问题，平面汇交力系可按力的平移原理转化为平面共点力系来进行合成。

1.两个共点力的合成

如图2-6(a)所示，设刚体上的点 A 作用有两个力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$，根据力的平行四边形法则，这两个力可合成为一个力 $\boldsymbol{F}_R$，它们的作用线通过汇交点 A，$\boldsymbol{F}_R$ 的大小和方向由平行四边形的对角线所决定。若以 α 表示两个力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 之间的夹角，以 φ_1，φ_2 分别表示合力 $\boldsymbol{F}_R$ 与边 AB 和边 AC 的夹角，则 $\boldsymbol{F}_R$ 的大小和方向可用三角公式求得。对△ABD 应用余弦定理，可得

$$
\begin{aligned}
F_R^2 &= F_1^2+F_2^2-2F_1F_2\cos(180^\circ-\alpha)\\
&= F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos\alpha
\end{aligned}
$$

即

$$F_R=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos\alpha} \tag{2-1}$$

由式(2-1)可确定合力 $\boldsymbol{F}_R$的大小。

对△ABD 应用正弦定理,可得

$$\frac{F_1}{\sin\varphi_2}=\frac{F_2}{\sin\varphi_1}=\frac{F_R}{\sin(180°-\alpha)}$$

由此得

$$\left.\begin{aligned}\sin\varphi_1=\frac{F_2}{F_R}\sin\alpha\\ \sin\varphi_2=\frac{F_1}{F_R}\sin\alpha\end{aligned}\right\} \tag{2-2}$$

式中,$\alpha=\varphi_1+\varphi_2$。

由式(2-2)可确定合力 $\boldsymbol{F}_R$的方向。

由图 2-6 可知,力的平行四边形可以用下述更为简便的作图方法画出。如图 2-6(b)所示,先从任意一点 a 作矢量 $\overrightarrow{ab}$ 等于力矢 $\boldsymbol{F}_1$(与力 $\boldsymbol{F}_1$的大小相等,作用线平行,指向相同);再从点 b 作矢量 $\overrightarrow{bd}$等于力 $\boldsymbol{F}_2$;连接 a 和 d 两点,得矢量$\overrightarrow{ad}$。显然,矢量$\overrightarrow{ad}$即表示合力 $\boldsymbol{F}_R$的大小和方向。

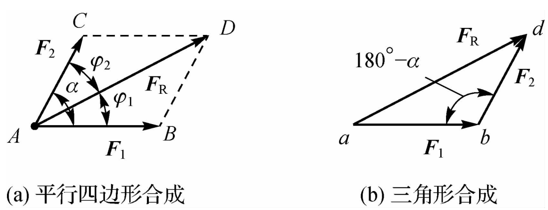


图 2-6　两个共点力的合成

注意:

(1)力的三角形只表示各力的大小和方向,并不表示各力作用线的实际位置,因此,力的三角形只是一种矢量运算方法,不完全代表力系的真实作用情况。

(2)力的三角形的矢序规则是:分力矢 $\boldsymbol{F}_1$和 $\boldsymbol{F}_2$沿环绕三角形边界的某一方向首尾相接,而合力 $\boldsymbol{F}_R$沿相反方向从起点指向最后一个分力矢的末端。作图时,若变换分力矢 $\boldsymbol{F}_1$和 $\boldsymbol{F}_2$的顺序,则可得到不同的力的三角形,但合力矢的大小和方向不变。

如果在刚体上的 A 点作用有两个共线的力 $\boldsymbol{F}_1$和 $\boldsymbol{F}_2$,那么当两力同向时,合力的大小等于这两个力的大小之和,方向与这两个力的方向相同;当两力反向时,合力的大小等于这两个力的大小之差,方向与其中一个较大的力的方向相同。

2. 任意个共点力的合成

如图 2-7(a)所示,设有平面共点力系 $\boldsymbol{F}_1$,$\boldsymbol{F}_2$,$\boldsymbol{F}_3$和 $\boldsymbol{F}_4$作用于点 A,要求力系的合力,只需要连续应用力的三角形法则将这些力依次相加,便可求出其合力的大小和方向。

如图 2-7(b)所示,先从任意一点 a 依次作矢量$\overrightarrow{ab}$,$\overrightarrow{bc}$,$\overrightarrow{cd}$和$\overrightarrow{de}$分别等于力矢 $\boldsymbol{F}_1$,$\boldsymbol{F}_2$,$\boldsymbol{F}_3$和 $\boldsymbol{F}_4$,应用力的三角形法则可知矢量$\overrightarrow{ac}$表示力 $\boldsymbol{F}_1$与力 $\boldsymbol{F}_2$的合力 $\boldsymbol{F}_{R1}$的大小和方向,矢量$\overrightarrow{ad}$表示力 $\boldsymbol{F}_{R1}$与力 $\boldsymbol{F}_3$的合力 $\boldsymbol{F}_{R2}$的大小和方向。最后连接 a,e 两点,矢量$\overrightarrow{ae}$即表示力 $\boldsymbol{F}_{R2}$与力 $\boldsymbol{F}_4$

的合力 $\boldsymbol{F}_R$的大小和方向。合力 $\boldsymbol{F}_R$的作用线通过点 A。多边形 $abcde$ 称为**力的多边形**;上述求合力的作图规则,称为**力的多边形规则**。

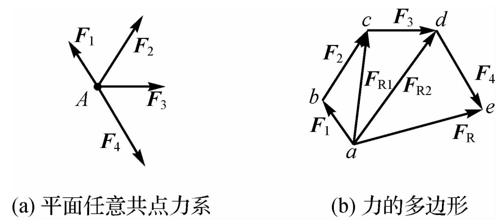


图 2-9　任意个共点力的合成

如果力系中包含更多的力,仍可继续应用力的三角形法则将所有的力合成为一个力。

特别指出,力的多边形的**矢序规则**是:分力矢 $\boldsymbol{F}_1$,$\boldsymbol{F}_2$,$\boldsymbol{F}_3$和 $\boldsymbol{F}_4$沿着环绕力的多边形边界的同一方向首尾相接,而合力 $\boldsymbol{F}_R$则沿相反方向连接多边形的缺口。由于力的多边形 $abcde$ 有一缺口,故称为不封闭的力的多边形。任意变换力的次序,可得到形状不同的力的多边形,但合力的矢量不变。

利用矢量和的定义可得出如下结论:**平面汇交力系的合力等于各力的矢量和,合力的作用线通过各力的汇交点**。

设平面汇交力系包含 n 个力,以 $\boldsymbol{F}_R$ 表示它们的合力,则有

$$\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n = \sum \boldsymbol{F}_i \tag{2-3}$$

式(2-3)表示矢量和。

若力系中各力沿同一直线作用,则称之为**共线力系**。这种力系是平面汇交力系的特殊形式。若取某一指向的力为正,则相反指向的力为负,其合力的大小等于各力代数和的绝对值,代数和的符号表示合力的指向。如以 F_R 和 F_1,F_2,F_n分别表示合力和分力的代数值,则得

$$F_R = F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \sum F_i \tag{2-4}$$

式(2-4)表示代数和。

注意:代数和与矢量和是不相等的。

2.3　平面任意力系的简化

2.3.1　力的几何合成

如图 2-8(a)所示,设一平面任意力系 $\boldsymbol{F}_1$,$\boldsymbol{F}_2$,$\cdots$,$\boldsymbol{F}_n$作用于刚体上。为简化这个力系,在力系所在平面内任选一点 O(称为**简化中心**)。根据力的平移定理将各力平移至点 O,得到一个作用于点 O 的力系 $\boldsymbol{F}'_1$,$\boldsymbol{F}'_2$,$\cdots$,$\boldsymbol{F}'_n$和一个附加力偶系 M_1,M_2,$\cdots$,M_n,如图 2-8(b)所示。

根据力的平行四边形法则,汇交力系可合成一个力,用 $\boldsymbol{F}_R$表示,其作用在简化中心 O,如图 2-8(c)所示,且有

$$\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{F}'_1 + \boldsymbol{F}'_2 + \cdots + \boldsymbol{F}'_n = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n = \sum \boldsymbol{F}_i \tag{2-5}$$

式中，$\boldsymbol{F}_R$为平面任意力系的**主矢**。

根据力偶的等效性质，附加力偶系 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 可合成一个力偶，用 M_O 表示。M_O 等于附加力偶系中各力偶矩的代数和，如图 2-8(c)所示。

$$M_O = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum M_O(F_i) \tag{2-6}$$

式中，M_O 为力系对简化中心 O 的**主矩**。

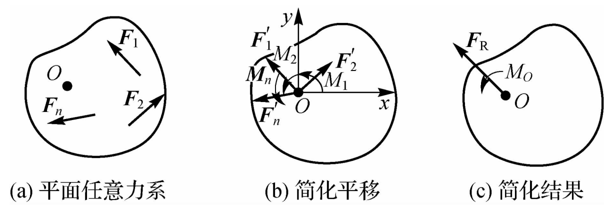


图 2-8　平面任意力系的简化

2.3.2　力的解析合成

力的解析法：通过点 O 选取直角坐标系 xOy，将力系中各力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 向 x 轴和 y 轴分别投影，其投影的代数和分别为 F_{Rx} 和 F_{Ry}，则

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} = \sum F_{ix}$$

$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny} = \sum F_{iy}$$

因此，主矢 $\boldsymbol{F}_R$ 的大小及其与 x 轴正向的夹角分别为

$$\left.\begin{aligned} F_R &= \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} \\ \tan\theta &= \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \end{aligned}\right\} \tag{2-7}$$

综上所述，平面任意力系向作用面内任意一点简化后得到一力和一力偶，即平面任意力系对刚体的作用与简化中心的一力和一力偶等效。力的作用线通过简化中心，其大小和方向取决于力系的主矢；力偶的作用面就是原力系所在平面，其力偶矩取决于力系对简化中心的主矩。因此，可以认为力系的主矢和主矩是决定平面任意力系对刚体作用效果的两个**基本物理量**，于是有**两个力系对刚体运动效应相等的条件**是：它们的主矢和对同一点的主矩分别相等。

可以证明，当所选的简化中心改变时，力系的主矢不改变，而力系的主矩却随着简化中心的不同而改变。因此，对于主矩，应指明是对哪一个简化中心而言的，符号 M_O 中的下角标 O 指的就是简化中心。

推而广之，对于空间任意力系的简化也有类似结果，即对空间任意力系进行简化，同样可得到一个**主矢**($\boldsymbol{F}_R$)和一个**主矩**($\boldsymbol{M}_O$)。**主矢等于原力系中各力的矢量和，与简化中心无关；主矩等于原力系中各力对简化中心力矩的矢量和，与简化中心的位置有关。**

空间任意力系向任意一点简化的**主矢**大小和方向余弦分别为

$$\left.\begin{aligned} & F_R = \sqrt{\left(\sum F_{ix}\right)^2 + \left(\sum F_{iy}\right)^2 + \left(\sum F_{iz}\right)^2} \\ & \cos(\boldsymbol{F}_R, \boldsymbol{i}) = \frac{\sum F_{ix}}{F_R}, \quad \cos(\boldsymbol{F}_R, \boldsymbol{j}) = \frac{\sum F_{iy}}{F_R}, \quad \cos(\boldsymbol{F}_R, \boldsymbol{k}) = \frac{\sum F_{iz}}{F_R} \end{aligned}\right\} \tag{2-8}$$

主矩 $\boldsymbol{M}_O$在三个坐标轴上的投影分别为

$$\left.\begin{aligned} M_{Ox} &= \sum M_x(\boldsymbol{F}_i) \\ M_{Oy} &= \sum M_y(\boldsymbol{F}_i) \\ M_{Oz} &= \sum M_z(\boldsymbol{F}_i) \end{aligned}\right\} \tag{2-9}$$

空间任意力系向任意一点简化的主矩大小和方向余弦分别为

$$\left.\begin{aligned} &M_O=\sqrt{(M_{Ox})^2+(M_{Oy})^2+(M_{Oz})^2} \\ &\cos(\boldsymbol{M}_O,\boldsymbol{i})=\frac{M_{Ox}}{M_O},\quad \cos(\boldsymbol{M}_O,\boldsymbol{j})=\frac{M_{Oy}}{M_O},\quad \cos(\boldsymbol{M}_O,\boldsymbol{k})=\frac{M_{Oz}}{M_O} \end{aligned}\right\} \tag{2-10}$$

【例 2-1】　如图 2-9(a)所示，一杆件稳固地插入墙内，不能产生任何方向的移动和转动。应用平面任意力系的简化结果，试分析该固定端支座的约束力。

解：杆件嵌入部分的受力情况比较复杂，当主动力系为平面任意力系时，约束力为平面力系，如图 2-9(b)所示。根据平面任意力系简化理论，将约束力向交界面的形心 A 点简化，得到一个力和一个力偶，如图 2-9(c)所示。由于这个力的大小和方向均未知，故可用两个正交分力表示，于是固定端支座的约束力通常表示成图 2-9(d)所示的形式，即固定端支座的约束力可以用 $\boldsymbol{F}_{Ax}$,$\boldsymbol{F}_{Ay}$ 和 M_A 表示。

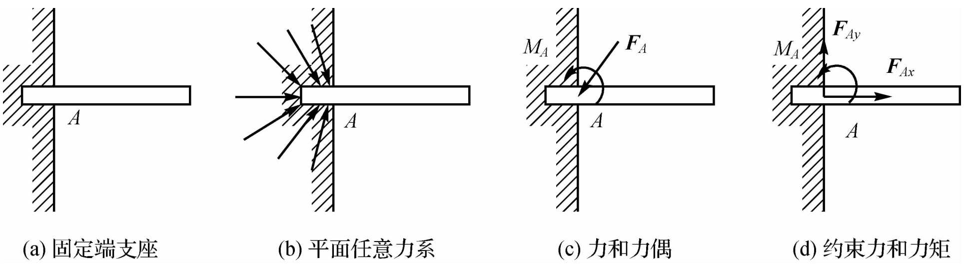


图 2-9　例 2-1 图

2.3.3　力系简化结果分析及力矩定理

常见平面任意力系的简化结果如下：

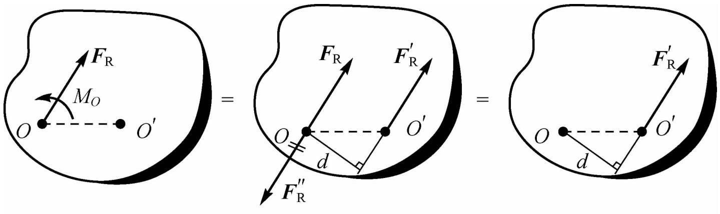
(1)若 $\boldsymbol{F}_R=0, M_O=0$，则该力系为平衡力系。

(2)若 $\boldsymbol{F}_R\neq0, M_O=0$，则该力系合成为一个力，主矢 $\boldsymbol{F}_R$ 为原力系的合力，其作用线通过简化中心 O。

(3)若 $\boldsymbol{F}_R=0, M_O\neq0$，则该力系合成为一个力偶，其主矩与简化中心的位置无关。M_O与原力系等效，故称 M_O为合力偶。

(4)若 $\boldsymbol{F}_R\neq0, M_O\neq0$，可将主矢 $\boldsymbol{F}_R$ 与主矩 M_O继续合成为一个力 $\boldsymbol{F}_R'$，如图 2-10 所示。力 $\boldsymbol{F}_R'$就是原力系的合力。合力 $\boldsymbol{F}_R'$的大小和方向与主矢 $\boldsymbol{F}_R$ 相同，合力作用线到简化中心的距离 $d=|M_O|/F_R$。该力的作用线相对于 O 点的位置可按下述方法确定：合力 $\boldsymbol{F}_R'$对简化中心 O 点之矩与主矩应有相同的转向。此时，$M_O(\boldsymbol{F}_R') = M_O = \sum M_O(\boldsymbol{F})$，并且简化中心 O 是任意选取的，于是可得到**合力矩定理**：平面任意力系的合力对该力系作用平面内任意一点之矩，等于力系中各个力对该点之矩的代数和，即

$$M_O(\boldsymbol{F}_\mathrm{R}) = \sum M_O(\boldsymbol{F}_i) \tag{2-11}$$



(a) 主矢和主矩　　(b) 主矢和主矩合成　　(c) 合成结果为一力

图 2-10　主矢和主矩的合成过程

2.4　平行力系的中心和重心

2.4.1　平行力系的中心

各力的作用线都在同一平面内且相互平行的力系称为**平面平行力系**。平面平行力系的**中心**是指平行力系的合力通过的一个点。

如图 2-11 所示，两平行力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 分别作用在刚体上的 A，B 两点，应用平面任意力系简化的理论可求得它们的合力 $\boldsymbol{F}_\mathrm{R}$，其大小为 $F_\mathrm{R}=F_1+F_2$，其作用线内分 AB 连线于 C 点，对点 C 应用合力矩定理，有

$$\frac{AC}{BC}=\frac{F_2}{F_1}$$

显然，C 点的位置与两力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 在空间的方位无关。若 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 按同方向转过相同的角度 α，则合力 $\boldsymbol{F}_\mathrm{R}$ 也将转过相同的角度 α，且通过 C 点，如图 2-11 中的虚线所示。

上述结论可推广到由任意多个力组成的平行力系，即将力系中的各个力依次合成，最终求得其合力 $\boldsymbol{F}_\mathrm{R}=\sum \boldsymbol{F}_i$，合力的作用点即为该平行力系的中心，且此点的位置仅与各个平行力的大小和作用点的位置有关，而与各个平行力的方向无关。

现用解析法确定空间平行力系的中心位置。取一空间直角坐标系如图 2-12 所示，设有一空间平行力系 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，…，$\boldsymbol{F}_n$ 平行于 z 轴，各力作用点的坐标为 $A_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,\cdots,n)$，空间平行力系的中心坐标为 $C(x_C,y_C,z_C)$。根据合力矩定理，有

$$M_x(\boldsymbol{F}_\mathrm{R}) = \sum M_x(\boldsymbol{F}_i) \text{ 或 } F_\mathrm{R} y_C = \sum F_i y_i$$

$$M_y(\boldsymbol{F}_\mathrm{R}) = \sum M_y(\boldsymbol{F}_i) \text{ 或 } F_\mathrm{R} x_C = \sum F_i x_i$$

再按平行力系的性质，将各力按相同转向转到与 y 轴平行，同理可得

$$M_x(\boldsymbol{F}_\mathrm{R}) = \sum M_x(\boldsymbol{F}_i) \text{ 或 } F_\mathrm{R} z_C = \sum F_i z_i$$

$$M_z(\boldsymbol{F}_\mathrm{R}) = \sum M_z(\boldsymbol{F}_i) \text{ 或 } F_\mathrm{R} x_C = \sum F_i x_i$$

于是可得空间平行力系中心 C 的坐标公式为

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i} \\ y_C &= \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i} \\ z_C &= \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i} \end{aligned}\right\} \tag{2-12}$$

式中，$F_R = \sum F_i$。

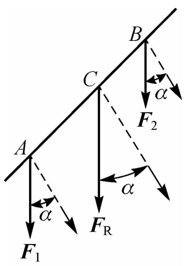


图 2-11　平面平行力系的中心

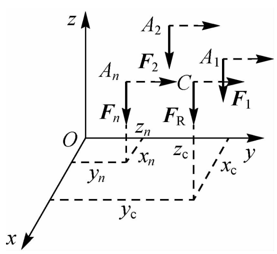


图 2-12　空间平行力系的中心

【例 2-2】 一水平梁 AB 受三角形分布载荷的作用，如图 2-13 所示。三角形分布载荷的最大集度为 q(N/m)，梁长为 l。试求分布载荷的合力 $\boldsymbol{F}_R$ 的大小和作用线的位置。

解：(1)求分布载荷在微段内的大小。在距 A 端 x 处取微段 dx，作用在 dx 段内的分布载荷可近似地看成均布载荷，其载荷集度为 q_x，由图中的几何关系可知，$q_x = xq/l$，则在 dx 段内的载荷为

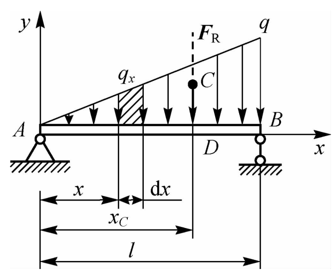


图 2-13　例 2-2 图

$$q_x dx = \frac{xq}{l} dx$$

因此，该三角形分布载荷可看成由若干个大小为 $q_x dx$ 的载荷所组成的。

(2)求分布载荷的合力。取 A 点为简化中心进行简化可得到一个主矢。根据平面平行力系的合成方法，分布载荷的合力可看成平面平行力系的合力，即

$$F_R = \int_0^l q_x dx = \int_0^l \frac{qx}{l} dx = \frac{ql}{2}$$

分布载荷的主矩为

$$M_A = -\int_0^l x q_x dx = -\int_0^l \frac{qx^2}{l} dx = -\frac{ql^2}{3}$$

应用合力矩定理，则有

$$M_A = -\frac{ql^2}{3} = -F_R x_C = -\frac{ql}{2} x_C$$

则合力作用线的位置为

$$x_C=\frac{M_A}{F_R}=\frac{2}{3}l$$

由上述计算结果可以看出，分布载荷合力的大小等于分布载荷图形的面积，其作用线一定通过载荷分布图形的形心。几种典型的分布载荷如图 2-14 所示。

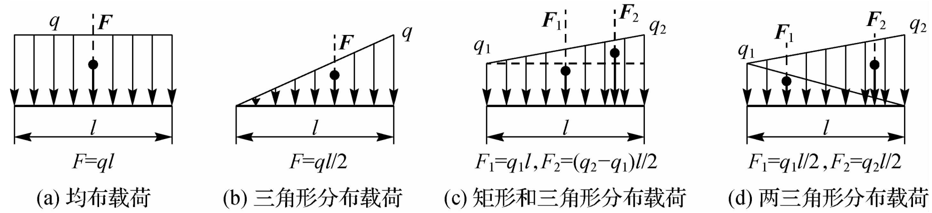


图 2-14　几种典型的分布载荷

2.4.2　物体的重心、质心和形心及重心的求法

1. 物体的重心

物体的重力为地球对它的吸引力。物体的重力分布于各质点上，且为铅垂向下的平行力系。所以，物体的重力就是重力系的合力，重力系的中心就称为物体的**重心**。

如图 2-15 所示，假设把物体分割成有限或无限个微元，第 i 个微元的重力为 $\boldsymbol{W}_i$，则物体的重心 C 在直角坐标系 Oxy 中的坐标公式为

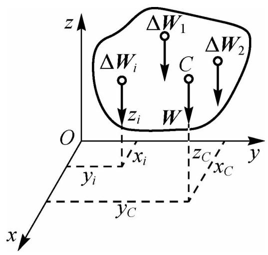


图 2-15　重心坐标

$$\left.\begin{aligned} x_C&=\frac{\sum \Delta W_i x_i}{\sum \Delta W_i}\\ y_C&=\frac{\sum \Delta W_i y_i}{\sum \Delta W_i}\\ z_C&=\frac{\sum \Delta W_i z_i}{\sum \Delta W_i}\end{aligned}\right\}\tag{2-13}$$

2. 物体的质心

在地球表面，物体上各点的重力加速度不变，即 $\Delta W_i=\Delta m_i g$，其中 g 为重力加速度。则式(2-13)可改写为

$$\left.\begin{aligned} x_C&=\frac{\sum \Delta m_i x_i}{\sum \Delta m_i}\\ y_C&=\frac{\sum \Delta m_i y_i}{\sum \Delta m_i}\\ z_C&=\frac{\sum \Delta m_i z_i}{\sum \Delta m_i}\end{aligned}\right\}\tag{2-14}$$

即物体质量分布的点，称为物体的**质心**。

3. 物体的形心

当物体质量均匀时，$\Delta m_i = \rho \Delta V$。其中，$\rho$ 为密度，且为常数。则式(2-14)又可改写为

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum \Delta V_i x_i}{\sum \Delta V_i} \\ y_C &= \frac{\sum \Delta V_i y_i}{\sum \Delta V_i} \\ z_C &= \frac{\sum \Delta V_i z_i}{\sum \Delta V_i} \end{aligned}\right\} \tag{2-15}$$

由式(2-15)可知，均质物体的形心位置与密度 ρ 无关，它是一个完全由物体的几何形状决定的几何点，这样的点称为物体的**形心**。

对均质物体来说，其重心、质心和形心重合。

4. 平面图形的形心

在工程实际中往往需要计算平面图形的形心。如图 2-16 所示，取图形所在平面为 xOy 平面，则平面图形形心的坐标为

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum \Delta A_i x_i}{\sum \Delta A_i} \\ y_C &= \frac{\sum \Delta A_i y_i}{\sum \Delta A_i} \end{aligned}\right\} \tag{2-16}$$

其积分形式为

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{\int_A x\,\mathrm{d}A}{A} \\ y_C &= \frac{\int_A y\,\mathrm{d}A}{A} \end{aligned}\right\} \tag{2-17}$$

式中，$\int_A x\,\mathrm{d}A$ 和 $\int_A y\,\mathrm{d}A$ 分别为平面图形对 y 轴和 x 轴的**静矩**，记作 $S_y = \int_A x\,\mathrm{d}A$ 和 $S_x = \int_A y\,\mathrm{d}A$。

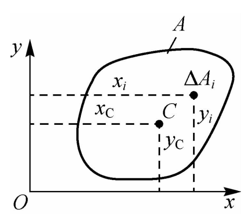


图 2-16　平面图形的形心

于是，式(2-17)可写成

$$\left.\begin{aligned}S_y &= x_C A \\ S_x &= y_C A\end{aligned}\right\} \tag{2-18}$$

由式(2-18)可得出下列重要**结论**：

(1)若平面图形对某轴的静矩等于零，则该轴必通过平面图形的形心。

(2)平面图形的静矩对于过形心的轴恒等于零。

5. 物体重心的求法

任何物体的重心均可利用上述公式求得，但在很多情况下，求积分比较麻烦。通常确定物体重心的方法有下列几种：

(1)**对称法**。凡是具有质量对称面、对称轴或对称点的物体，其重心必在对称面、对称轴或对称点上，利用这个性质可以较容易地求得物体平面图形的形心位置，该方法称为**对称法**。

(2)**组合法**。当均质物体的几何形状比较复杂时，可先将其分割成若干个简单的几何形状，然后计算各个简单几何形状的重心位置，最后计算整个物体的重心位置，这种方法称为**组合法**。

如果物体有空洞，则可将其视为一形状完整的物体与一体积和面积(空洞部分)为负值的均质物体的组合，仍利用组合法计算其重心位置，该方法称为**负面积组合法**。

上述方法也适用于确定平面几何图形的形心。

(3)**实验法**。工程上常采用实验法测定形状复杂或质量分布不均匀的物体的重心。常用的实验方法有**悬挂法**和**称重法**两种，这两种方法的理论依据都是物体的平衡条件。

悬挂法适用于平板或薄片物件，其理论依据是二力平衡条件。用悬挂法测定物体重心的具体方法是：首先将物体过任意一点 A 用柔性绳索悬挂起来，如图 2-17(a)所示，物体在绳索的拉力 $\boldsymbol{T}$ 和重力 $\boldsymbol{W}$ 的作用下处于平衡状态。根据二力平衡原理，物体的重心必在过 A 点的绳索所在的直线 AA' 上，画出直线 AA'；再另选一点 B 将物体悬挂起来，使之处于平衡状态，如图 2-17(b)所示。同理可得过点 B 的绳子所在的直线 BB'，画出直线 BB'，则两直线的交点 C 即为物体的重心。

称重法适用于体积较大的物体，其理论依据是静力矩为零。以具有对称轴的变截面杆为例来说明用称重法测定物体重心的方法。此时只需要测定重心在对称轴线上的位置即可，首先称出杆的重量 W，然后将杆的一端 A 放置在刀口上，另一端 B 放置在台秤上，并使对称轴线处于水平位置；从台秤上读出支撑反力 $\boldsymbol{N}_B$ 的大小，量出 A，B 两点的水平距离 l(见图 2-18)，由平衡条件可知

$$\sum M_A F_i = 0$$

即

$$N_B l - Wh = 0$$

得

$$h = \frac{N_B l}{W}$$

这样通过两次称重就能确定物体重心在轴线上的位置。

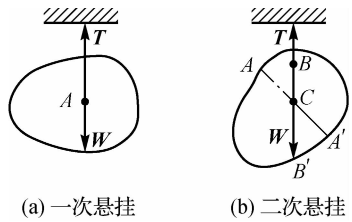


图 2-17　悬挂法

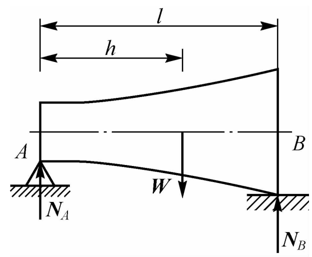


图 2-18　称重法

对于非对称物体，可在三个方向上重复上述步骤，从而确定物体重心的位置。

【例 2-3】　已知均质等厚 Z 形薄板的尺寸(mm)如图 2-19 所示，求该平面图形的形心位置。

解：(1)取参考坐标系如图 2-19 所示。将 Z 形截面分割成三个矩形，三个矩形的形心分别为 $C_1(x_{1C},y_{1C})$，$C_2(x_{2C},y_{2C})$和 $C_3(x_{3C},y_{3C})$，以 A_1，A_2 和 A_3 分别表示三个矩形的面积。

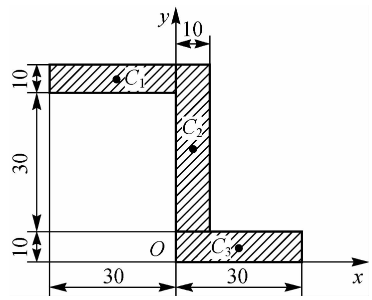


图 2-19　例 2-3 图

(2)求三个矩形的面积和形心坐标。由图 2-19 可得 $x_{1C}=-15$ mm，$y_{1C}=45$ mm，$A_1=300$ mm^2；$x_{2C}=5$ mm，$y_{2C}=30$ mm，$A_2=400$ mm^2；$x_{3C}=15$ mm，$y_{3C}=5$ mm，$A_3=300$ mm^2。

(3)求形心坐标。应用式(2-16)得

$$x_C=\frac{\sum A_i x_{iC}}{A}=\frac{A_1x_{1C}+A_2x_{2C}+A_3x_{3C}}{A_1+A_2+A_3}=2(\text{mm})$$

$$y_C=\frac{\sum A_i y_{iC}}{A}=\frac{A_1y_{1C}+A_2y_{2C}+A_3y_{3C}}{A_1+A_2+A_3}=27(\text{mm})$$

故均质等厚 Z 形薄板的形心坐标为 $C(2,27)$。

【例 2-4】　振动器中的偏心块为一等厚度的均质体，如图 2-20 所示。已知 $R=100$ mm，$r=17$ mm，$b=13$ mm。求偏心块的重心坐标。

解：(1)取参考坐标系如图 2-20 所示。偏心块可看成由三部分组成：一是半径为 R 的大半圆，二是半径为 $r+b$ 的小半圆，三是半径为 r 的小圆。若 y 轴为对称轴，则该偏心块的重心 C 在对称轴上，即 $x_C=0$。设大半圆的面积为 A_1，小半圆的面积为 A_2，小圆的面积为 A_3(取负值)。

(2)这三部分的面积和重心的纵坐标分别为

$$\begin{cases}A_1=\dfrac{\pi}{2}R^2\\ y_1=\dfrac{4R}{3\pi}\end{cases},\quad \begin{cases}A_2=\dfrac{\pi}{2}(r+b)^2\\ y_2=\dfrac{4(r+b)}{3\pi}\end{cases},\quad \begin{cases}A_3=-\pi r^2\\ y_3=0\end{cases}$$

(3)用负面积组合法求得偏心块重心的纵坐标为

$$y_C=\frac{\sum A_i y_i}{A}=\frac{A_1y_1+A_2y_2+A_3y_3}{A_1+A_2+A_3}=42.23(\text{mm})$$

故所求偏心块重心的坐标为 $C(0,42.23)$。

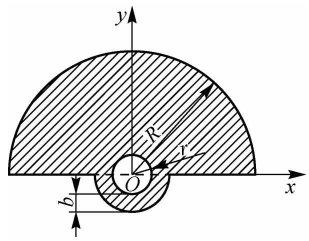


图 2-20　例 2-4 图

本章小结

（1）力的平移定理。作用在刚体上的力可平移至刚体上任意指定点而不改变该力对刚体的作用，但必须在由该力与指定点所决定的平面内附加一力偶，其力偶矩等于该力对指定点之矩。力的平移定理是力系简化的依据。

（2）平面任意力系向作用面内任意一点简化，一般情况下可得到一个力和一个合力偶。这个力等于原力系的主矢，即 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=\sum \boldsymbol{F}_i$。

力的作用点在简化中心。力偶矩等于原力系对 O 点的主矩，即 $M_O=\sum M_O(\boldsymbol{F}_i)$。

（3）平面任意力系的简化结果可能出现以下几种情况：

①合力偶：$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=0$，$M_O\neq 0$，此时，合力等于零，合力偶不等于零。

②合力：$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}\neq 0$，$M_O=0$，此时，合力偶等于零，合力不等于零，且其作用线通过简化中心。

③合力和合力偶：$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}\neq 0$，$M_O\neq 0$，此时，合力与合力偶都不等于零，合力作用线离简化中心的距离为 $d=|M_O|/F_{\mathrm{R}}$。

④平衡：$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=0$，$M_O=0$，此时，合力与合力偶都等于零。

（4）固定端支座。固定端支座是工程中常见的一种约束，其约束力可分解为两个相互垂直的力和一个力偶，可看作平面任意力系的简化。例如，固定端支座 A 的约束力用 $\boldsymbol{F}_{Ax}$，$\boldsymbol{F}_{Ay}$ 和 M_A 来表示，约束力的方向（或力矩转向）可任意假定。

（5）合力矩定理。平面任意力系的合力对该力系作用平面内任意一点之矩，等于力系中各个力对该点之矩的代数和，即 $M_O(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}})=\sum M_O(\boldsymbol{F}_i)$。

（6）分布载荷等效于一个**合力**，其大小与分布载荷图形的面积相等，其作用线一定通过分布载荷图形的形心。

（7）重心。重心是作用在物体上的重力合力的作用点，物体重心坐标的计算公式为

$$x_C=\frac{\sum \Delta W_i x_i}{\sum \Delta W_i},\quad y_C=\frac{\sum \Delta W_i y_i}{\sum \Delta W_i},\quad z_C=\frac{\sum \Delta W_i z_i}{\sum \Delta W_i}$$

习题

1. 填空题

(1)作用于刚体上的力可以平移到刚体内的任意一点上，但必须同时增加一个________，其力偶矩等于________。

(2)力对作用线外的转动中心有两种作用：一是______________，二是_____________。

(3)平面任意力系向平面内任意一点简化的一般结果是：一个________和一个________。

(4)若平面任意力系向某一点简化后的主矩为零，主矢不为零，则该力系合力作用线必通过________。

(5)若平面任意力系向某一点简化后的主矩为零，主矢不为零，则该主矢就是原力系的________。

(6)若平面任意力系向某一点简化后的主矢为零，主矩也为零，则该力系为________力系。

(7)在图 2-21 所示的平面力系中，若 $F_1=F_2=F_3=F_4=F$，且相邻各力的夹角均为直角，则力系向 A 点简化的主矢 $F_A=$________，主矩 $M_A=$________；力系向 B 点简化的主矢 $F_B=$________，主矩 $M_B=$________。

(8)如图 2-22 所示，若某力系向 A 点简化的结果为 $F_A=10\ \mathrm{N}$，$M_A=0.2\ \mathrm{N\cdot m}$，则该力系向 D 点简化的结果为 $F_D=$________，$M_D=$________；向 C 点简化的结果为 $F_C=$________，$M_C=$________。

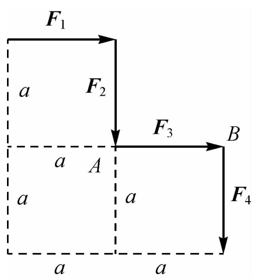


图 2-21　第 2 章填空题(7)图

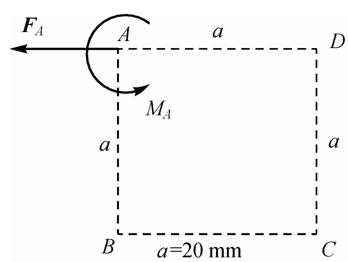


图 2-22　第 2 章填空题(8)图

(9)力 $\boldsymbol{F}$ 作用于三铰拱的 E 点，如图 2-23 所示。试分析能否将其平移到三铰拱的 D 点上，若能平移，则其附加力偶矩为________。

(10)在刚体的同一平面内的 A，B，C 三点上分别作用 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$ 三个力，并构成封闭三角形，如图 2-24 所示，该力系可简化为________。

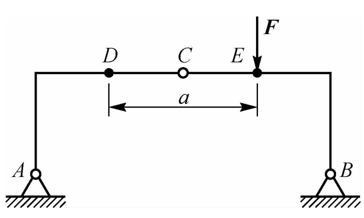


图 2-23　第 2 章填空题(9)图

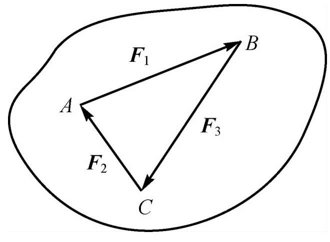


图 2-24　第 2 章填空题(10)图

(11)某一平面平行力系各力的大小、方向和作用线的位置如图 2-25 所示,已知 $F_1=F_2=10\ \mathrm{N}$,$F_3=5\ \mathrm{N}$,$F_4=25\ \mathrm{N}$,$d=100\ \mathrm{mm}$,则该力系简化的结果及简化中心的位置分别为________。

(12)一个力偶($\boldsymbol{F}_1$,$\boldsymbol{F}_1'$)作用在平面 xOy 上,另一个力偶($\boldsymbol{F}_2$,$\boldsymbol{F}_2'$)作用在平面 yOz 上,如图 2-26 所示,两力偶矩的模相等,则两力偶________(等效,不等效)。

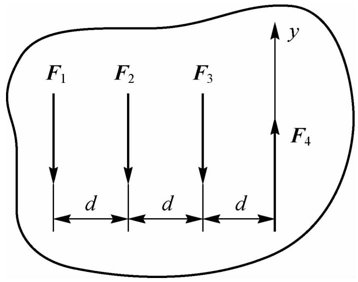


图 2-25　第 2 章填空题(11)图

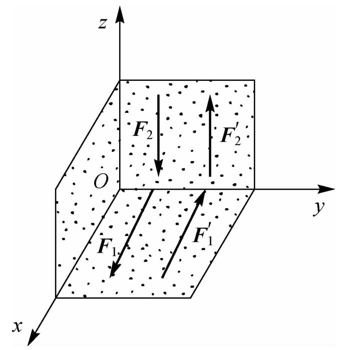


图 2-26　第 2 章填空题(12)图

2. 选择题

(1)作用在同一平面内的四个力构成平行四边形,如图 2-27 所示,该物体在此力系作用下处于(　　)。

A. 平衡状态

B. 不平衡状态,因为可合成为一个力偶

C. 不平衡状态,因为可合成为一个合力

D. 不平衡状态,因为可合成为一个合力和一个力偶

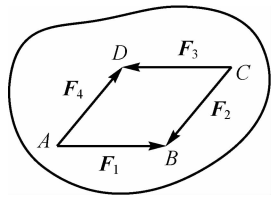


图 2-27　第 2 章选择题(1)图

(2)一个力向新作用点平移后,新作用点上有(　　),才能使作用效果其与原力相同。

A. 一个力　　B. 一个力偶

C. 一个力和一个力偶　　D. 两个力偶

(3)力偶对物体产生的运动效应为(　　)。

A. 只能使物体转动　　B. 只能使物体移动

C. 既能使物体转动,又能使物体移动　　D. 以上都不是

(4)作用在刚体上的力是(　　),力偶矩是(　　),力系的主矢是(　　)。

A. 滑移矢量　　B. 定位矢量　　C. 自由矢量　　D. 标量

(5)在图 2-28 所示的正方体上沿棱边作用六个力,各力的大小都等于 F,此力系的最终简化结果为(　　)。

A. 合力　　B. 平衡　　C. 合力偶　　D. 力螺旋

(6)如图 2-29 所示,在正方体的前侧面上沿 AB 方向作用一力 $\boldsymbol{F}$,则该力(　　)。

A. 对 x,y,z 轴之矩全相等　　B. 对三轴之矩全不等

C. 对 x,y 轴之矩相等　　D. 对 y,z 轴之矩相等

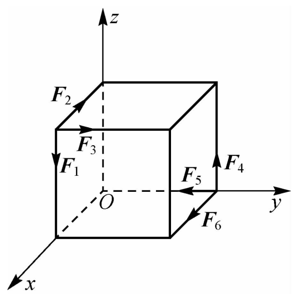


图 2-28　第 2 章选择题(5)图

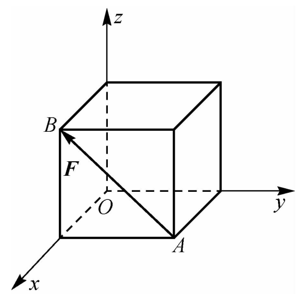


图 2-29　第 2 章选择题(6)图

3. 计算题

(1)在图 2-30 所示的平面力系中，$F_1=44\sqrt{2}$ N，$F_2=80$ N，$F_3=40$ N，$F_4=110$ N，$M=2\ 000$ N·m。各力作用线的位置如图所示，图中数据尺寸的单位为 mm。求：

①力系向 O 点简化的结果。

②力系的合力大小、方向及合力作用线方程。

(2)有五个力作用于一点，如图 2-31 所示。图中方格的边长为 10 mm。求此力系的合力。

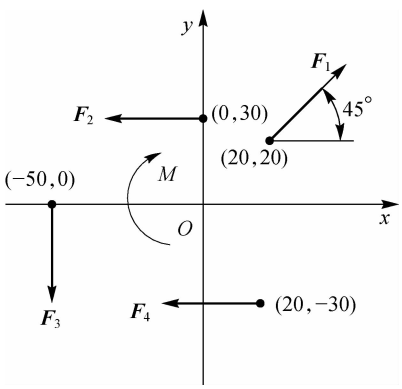


图 2-30　第 2 章计算题(1)图

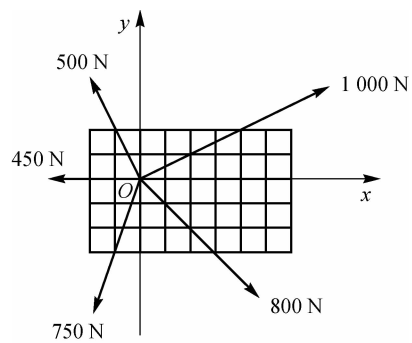


图 2-31　第 2 章计算题(2)图

(3)扳手受到一个力和一个力偶的作用，如图 2-32 所示。求此力系的合力作用点 D 的位置(以距离 b 表示)。

(4)某厂房排架的柱子，如图 2-33 所示，承受吊车传来的力 $F=250$ N 和屋顶的作用力 $F_Q=300$ kN，图中尺寸的单位为 mm。试将该两力向中心 O 简化。

(5)试求图 2-34 所示的平行分布力系的合力大小、作用线位置及对点 A 的矩。

(6)有一刚架如图 2-35 所示，已知 $q=3$ kN/m，$F=6\sqrt{2}$ kN，$M=10$ kN·m，不计刚架的自重。求所有的力对点 A 的矩。

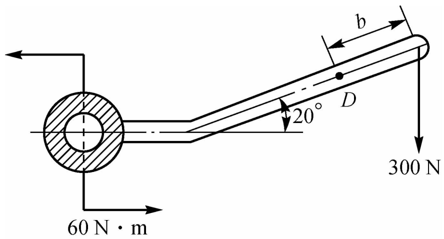


图 2-32　第 2 章计算题(3)图

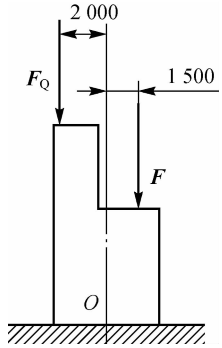


图 2-33　第 2 章计算题(4)图

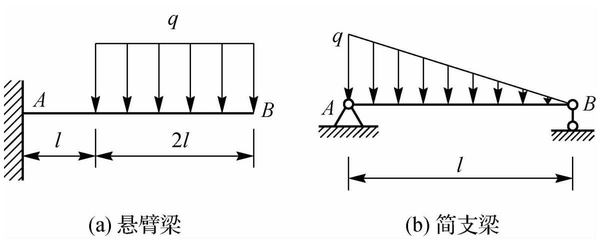


图 2-34　第 2 章计算题(5)图

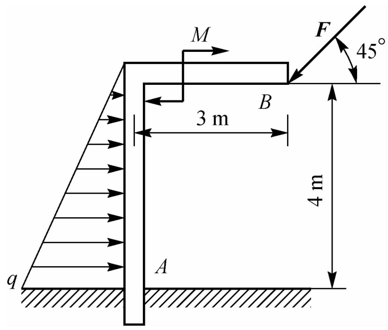


图 2-35　第 2 章计算题(6)图

(7)求图 2-36 所示两种截面的重心位置。图示尺寸单位为 mm。

(8)如图 2-37 所示，计算力 $\boldsymbol{F}$ 对点 O 的矩。力在点 A 计算的结果与把力滑移到点 B 计算的结果是否相同？试分别计算比较。

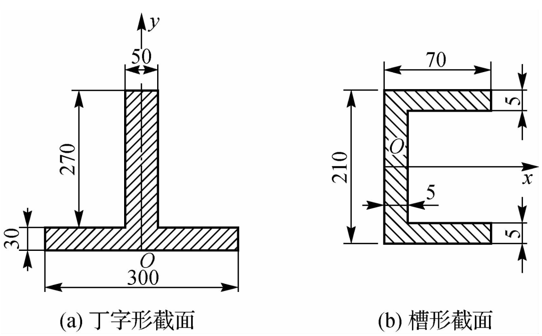


图 2-36　第 2 章计算题(7)图

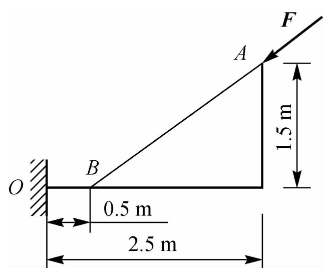


图 2-37　第 2 章计算题(8)图