辽宁省职业教育“十四五”规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

主编 张宏斌 郝连军

哈爾濱工程大學出版社
Harbin Engineering University Press

辽宁省职业教育「十四五」规划教材

高等数学

主编 张宏斌 郝连军

哈爾濱工程大學出版社
Harbin Engineering University Press

选题策划：金颖杰
责任编辑：苏 莉
封面设计：华腾视觉 · 黄燕美

ISBN 978-7-5661-3229-1

9 787566 132291 >

定价：46.00元

内容简介

本书共八章，主要内容包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分，常微分方程，拉普拉斯变换，行列式、矩阵与线性方程. 本书在每章节后都配有一定数量的习题、复习题，附录中有部分习题的参考答案.

本书既可作为高等职业院校高等数学课程教材，也可作为相关人士的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 张宏斌，郝连军主编. —哈尔滨 ：哈尔滨工程大学出版社，2021.8

ISBN 978-7-5661-3229-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①张… ②郝… Ⅲ. ①高等数学 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2021)第 171289 号

高等数学

GAODENG SHUXUE

选题策划 金颖杰
责任编辑 苏 莉
封面设计 华腾视觉·黄燕美

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区南通大街 145 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 三河市金元印装有限公司
开　　本 787 mm×1 092 mm 1/16
印　　张 17
字　　数 352 千字
版　　次 2021 年 8 月第 1 版
印　　次 2021 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 46.00 元
http://www.hrbeupress.com
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　言

“高等数学”是高职院校相关专业的一门重要的基础课程，在培养高素质、复合型、应用型、工匠型人才方面起着重要的作用.《教育部关于职业院校专业人才培养方案制订与实施工作的指导意见》中指出，“传授基础知识与培养专业能力并重，强化学生职业素养养成和专业技术积累，将专业精神、职业精神和工匠精神融入人才培养全过程。”“要注重学用相长、知行合一，着力培养学生的创新精神和实践能力，增强学生的职业适应能力和可持续发展能力。”我们在认真总结归纳教学实践经验、探索更为贴近高职院校学生实际教育教学方法的基础上，针对当前高职学生应知应会的高等数学基础知识内容，编写了本书.

本书充分考虑了高职院校学生的实际情况，注重高等数学与初等数学的衔接，使学生在学习初等数学的基础上进一步学习和掌握高等数学的基础知识与思维方式，为学生学习专业基础课和相关专业课程提供必需的数学基础知识和数学应用工具. 本书对学生的数学思维能力、推理论证能力、计算能力和创新精神进行培养，旨在强化学生对高等数学基础知识的掌握及运用，为学生继续深造打下坚实的理论基础.

本书的主要内容包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分，常微分方程，拉普拉斯变换，行列式、矩阵与线性方程. 本书在每章节后都配有一定数量的习题、复习题，并在书后附有部分习题的参考答案.

本书由辽宁石化职业技术学院张宏斌、郝连军任主编，辽宁石化职业技术学院陈继业任副主编，辽宁石化职业技术学院王达开、高焱、杨迪、徐健楠、赵书慧参与编写工作. 具体编写分工如下：张宏斌编写第一章、第二章、第三章，郝连军编写第四章、第五章、第六章，陈继业编写第七章，王达开编写第八章和第一章、第五章的习题及其答案，高焱编写第二章、第六章的习题及其答案，杨迪编写第三章、第七章的习题及其答案，徐健楠编写第四章、第八章的习题及其答案，赵书慧编写各章复习题及其答案. 辽宁石化职业技术学院田春尧对本书进行了审阅并提出了宝贵意见.

我们在编写本书的过程中得到了辽宁石化职业技术学院曲伟等诸多老师的支持和帮助，在此表示诚挚的谢意！

由于编者水平有限，书中难免存在疏漏和不足之处，敬请广大读者批评指正.

编　者

目　　录

第一章　函数、极限与连续 ······ 1

第一节　函数及其性质 ······ 1

第二节　极限的概念 ······ 10

第三节　极限的运算 ······ 17

第四节　无穷小与无穷大 ······ 22

第五节　函数的连续性 ······ 26

复习题一 ······ 36

第二章　导数与微分 ······ 39

第一节　导数的概念 ······ 39

第二节　函数的和、差、积、商的求导法则 ······ 47

第三节　复合函数的求导 ······ 51

第四节　反函数的导数和基本初等函数的求导公式 ······ 55

第五节　高阶导数 ······ 59

第六节　隐函数及参数方程所确定的函数的导数 ······ 62

第七节　函数的微分 ······ 67

第八节　曲率 ······ 74

复习题二 ······ 80

第三章　导数的应用 ······ 83

第一节　中值定理与洛必达法则 ······ 83

第二节　函数的单调性与极值 ······ 89

第三节　函数的最大值和最小值 ······ 94

第四节　曲线的凹凸与拐点 ······ 97

第五节　函数图像的描绘 ······ 100

复习题三 ······ 104

第四章　不定积分 ······ 107

第一节　原函数与不定积分 ······ 107

第二节　不定积分的基本公式、法则及直接积分法 …… 111
第三节　换元积分法 …… 115
第四节　分部积分法 …… 126
复习题四 …… 131

第五章　定积分 …… 135
第一节　定积分的概念 …… 135
第二节　定积分的计算公式和性质 …… 141
第三节　定积分的换元积分法和分部积分法 …… 146
第四节　广义积分 …… 149
第五节　定积分在几何中的应用 …… 153
第六节　定积分在物理中的应用 …… 162
复习题五 …… 168

第六章　常微分方程 …… 171
第一节　微分方程的基本概念 …… 171
第二节　可分离变量的微分方程与齐次方程 …… 177
第三节　一阶线性微分方程 …… 183
第四节　可降阶的高阶微分方程 …… 189
第五节　二阶常系数齐次线性微分方程 …… 193
第六节　二阶常系数非齐次线性微分方程 …… 198
复习题六 …… 203

第七章　拉普拉斯变换 …… 205
第一节　拉普拉斯变换的概念 …… 205
第二节　拉氏变换的性质 …… 210
第三节　拉氏变换的逆变换 …… 214
第四节　拉氏变换的应用举例 …… 218
复习题七 …… 222

第八章　行列式、矩阵与线性方程 …… 225
第一节　行列式的定义及性质 …… 225
第二节　克莱姆法则 …… 228
第三节　矩阵的概念及运算 …… 231
第四节　矩阵的初等变换与矩阵的秩 …… 236
第五节　一般性方程组解的讨论 …… 239

复习题八 …… 242
参考答案 …… 245
参考文献 …… 264

第一章　函数、极限与连续

函数是高等数学中最重要的基本概念，也是高等数学主要的研究对象. 函数研究变量的变化趋势，从而导出函数的极限. 通过极限的知识进而学习导数、微分与积分. 可见函数的极限在高等数学中的地位是多么的重要. 本章在原有函数知识的基础上，进一步加深对函数知识的介绍，进而对极限思想、求极限的方法、函数的连续性等进行说明.

第一节　函数及其性质

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义 1.1　设 D 是一个非空数集，如果对于 D 上变量 x 的每一个确定值，按照某种对应法则 f，变量 y 都有唯一确定的值与之对应，称 y 为定义在数集 D 上 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 其中 x 叫作自变量，y 叫作因变量，数集 D 称为函数的定义域. 当 x 取遍定义域 D 内的每一个值时，对应函数值的全体所组成的集合称为函数的值域，一般用 M 表示.

例如，反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的定义域和值域分别为 $D:\{x\mid x\neq 0\}$，$M:\{y\mid y\neq 0\}$.

在函数的定义中，如果对每一个 x 值，对应的 y 值都是唯一的，我们称 y 是 x 的单值函数，$x\to y$ 的对应法则 f 称为单值对应. 否则，称该函数为多值函数，$x\to y$ 的对应法则 f 称为多值对应. 定义 1.1 所描述的函数是单值函数. 例如，反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 是单值函数，而 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 是多值函数.

2. 函数的表示法及函数值

(1)函数的表示法. 表示函数的方法常用的有解析法、列表法、图像法.

①**解析法**. 解析法就是把两个变量的函数关系用一个等式来表示,这个等式称为函数的解析表达式,简称解析式. 解析式是表示函数的主要形式. 除了用符号 $f(x)$表示,还常用 $g(x)$,$F(x)$,$G(x)$等符号表示. 例如,

$$g(x)=ax^2+bx+c,\quad F(x)=|x|$$

用解析法表示的函数还有以下几种形式:

a. 分段函数. 在不同区间内用不同解析式表示的函数称为分段函数. 例如,

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

分段函数的定义域是函数的各个定义区间的并集.

b. 隐函数. 由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数称为隐函数. 例如,$2x-y+3=0$,$xy=e^{x+y}$都是隐函数.

为了区别,我们称前面讨论的函数为显函数,如 $y=2x$,$y=e^x$ 等都是显函数,分段函数也是显函数.

注意:部分隐函数能够化为显函数,也有部分隐函数不能够化为显函数. 例如,$2x-y+3=0$ 可化为显函数 $y=2x+3$,而 $xy=e^{x+y}$无法化为显函数.

②**列表法**. 列表法是指用列出的表格来表示两个变量的函数关系.

例如,数学用表中的平方表、平方根表、三角函数表,还有银行里常用的“利息表”等都是用列表法来表示函数关系的.

③**图像法**. 图像法就是用函数图像表示两个变量之间的关系. 例如,气象台用自动记录器描绘温度随时间变化的曲线.

(2)函数值与函数表达式的求法.

定义 1.2 当自变量 x 在其定义域内取一个确定的值 a 时,函数 $f(x)$的对应值叫作函数 $f(x)$在 $x=a$ 处的函数值,记作 $f(a)$.

$f(a)$是由 a 代替函数表达式中的 x 而得到的.

例 1 设 $\varphi(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2-1}$,求 $\varphi(0)$,$\varphi(a)$.

分析:此函数带有绝对值. 所以,求 $\varphi(a)$时要根据 a 的情况进行讨论.

解:$\varphi(0)=\dfrac{|0-1|}{0^2-1}=\dfrac{1}{-1}=-1$；

$$\varphi(a)=\frac{|a-1|}{a^2-1}=\begin{cases}\dfrac{1}{a+1}, & a>1\\ -\dfrac{1}{a+1}, & a<1\text{ 且 }a\neq-1\end{cases}.$$

例 2　已知 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\in(0,+\infty)\\ 1, & x=0\\ -x+1, & x\in(-\infty,0)\end{cases}$，求 $f(-1),f(0),f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

解:因为 $-1\in(-\infty,0)$，所以 $f(-1)=(-x+1)|_{x=-1}=-(-1)+1=2$；

$f(0)=1$；

因为 $\dfrac{1}{2}\in(0,+\infty)$，所以 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=(x+1)|_{x=\frac{1}{2}}=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

例 3　设 $f(x+1)=x^2+3x+5$，求 $f(x)$的表达式.

解:令 $x+1=u,x=u-1$，得

$$f(u)=(u-1)^2+3(u-1)+5=u^2+u+3$$

所以，$f(x)$的表达式为 $f(x)=x^2+x+3$.

3. 函数定义域的求法

我们在研究函数时，只有在其定义域内进行才有意义. 因此，研究函数首先要确定其定义域. 在实际问题中，函数的定义域是由其实际意义确定的.

例如，圆的面积 A 与半径 r 的函数关系是 $A=\pi r^2$，此函数的定义域是$(0,+\infty)$.

如果所讨论的函数是由一个解析式 $y=f(x)$确定的，那么函数的定义域是使解析式 $y=f(x)$有意义的自变量的取值范围. 确定函数的定义域通常有以下几种情况：

(1)在分式函数中，分母不能为零.

(2)在偶次根式函数中，根号里的表达式不能为负.

(3)在对数函数式中，真数部分必须大于 0，底数大于 0 且不等于 1.

(4)在三角函数式中，正切不能取 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，余切不能取 $k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

(5)在反三角函数式中，反正弦和反余弦不能取绝对值大于 1 的代数式.

(6)如果函数表达式是由几个代数式经过加、减运算组合而成的，则其定义域应取各代数式定义域的交集.

例 4 求下列函数的定义域.

(1)$y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x-2}$；　　(2)$y=\ln(x^2+x-6)$；

(3)$y=\dfrac{1}{|x+1|-2}+\arcsin\dfrac{x-1}{5}$；　　(4)$y=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x+1, & x>1\end{cases}$.

解:(1)要使函数有意义,须

$$\begin{cases}4-x^2\neq 0\\ x-2\geqslant 0\end{cases}$$

即

$$x>2$$

所以,函数的定义域为$(2,+\infty)$.

(2)要使函数有意义,须

$$x^2+x-6>0$$

即

$$(x+3)(x-2)>0$$

解得

$$x<-3\text{ 或 }x>2$$

所以,函数的定义域为$(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$.

(3)要使函数有意义,须

$$\begin{cases}\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant 1\\ |x+1|-2\neq 0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 6\\ x\neq 1\\ x\neq -3\end{cases}$$

所以,函数的定义域为$[-4,-3)\cup(-3,1)\cup(1,6]$.

(4)因为分段函数的定义域是函数的各个定义区间的并集,$[0,1]\cup(1,+\infty)=[0,+\infty)$,所以,函数的定义域为$[0,+\infty)$.

4. 函数的两个要素

一个函数是由其定义域和对应关系确定的，而函数的值域一般称为派生要素，由定义域和对应关系确定. 所以，定义域和对应关系构成了函数的两个要素. 对于两个函数，当且仅当它们的定义域和对应关系分别相同时，这两个函数才相同.

例 5　判断下列各组中的函数是否相同.

(1)$y=x,y=\sqrt{x^2}$；　(2)$y=x,y=(\sqrt{x})^2$；

(3)$y=x,y=\sqrt[3]{x^3}$；　(4)$y=C,y=Cx^0$.

解：(1)虽然 $y=x,y=\sqrt{x^2}$的定义域都是实数集 **R**，但是它们的对应关系不同，$y=x$ 中 $f:x\to x$，而 $y=\sqrt{x^2}$中 $f:x\to\sqrt{x^2}=|x|$. 所以，$y=x,y=\sqrt{x^2}$是不同的函数.

(2)$y=x$ 的定义域是实数集 **R**，$y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域是非负实数集，它们的定义域不同. 所以，$y=x,y=(\sqrt{x})^2$ 是不同的函数.

(3)$y=x,y=\sqrt[3]{x^3}$定义域都是实数集 **R**，对应关系也相同. 所以，$y=x,y=\sqrt[3]{x^3}$是相同的函数.

(4)$y=C$ 的定义域是实数集 **R**，$y=Cx^0$ 的定义域是非零实数集，它们的定义域不同. 所以，$y=C,y=Cx^0$ 是不同的函数.

二、函数的特性

函数具有四种特性，即函数的奇偶性、单调性、有界性和周期性，如表 1-1 所示.

表 1-1

特　性	定　义	几何特性
奇偶性	若 $y=f(x)$的定义域关于原点对称，且 (1)$f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数； (2)$f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数； 否则，称 $f(x)$为非奇非偶函数	奇函数的图像关于原点对称； 偶函数的图像关于 y 轴对称
单调性	若对于任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$且 $x_1<x_2$ 有 (1)$f(x_1)<f(x_2)$，称 $f(x)$在(a,b)内单调增加； (2)$f(x_1)>f(x_2)$，称 $f(x)$在(a,b)内单调减少	单调增加函数的图像趋势为“从左向右呈上升状”； 单调减少函数的图像趋势为“从左向右呈下降状”

续表

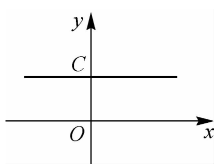
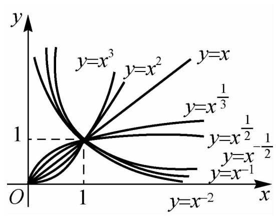
特　　性	定　　义	几何特性
有界性	若存在常数 $M>0$,使对一切 $x\in(a,b)$有 $\|f(x)\|\leqslant M$,则称 $f(x)$在 $x\in(a,b)$内有界	有界函数的图像在 $x\in(a,b)$内全部夹在直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间
周期性	若对于任意的 $x\in D$,存在正数 l,使 $f(x+l)=f(x)$,则称 $f(x)$为 D 上的周期函数,称 l 为$f(x)$的周期,称 l 的最小正值为 $f(x)$的最小正周期	周期函数的图像每隔一个周期重复出现一次

在上述四种特性中,奇偶性和周期性是函数的整体特性,它们所对应等式中的 x 是定义域中的任意值;而单调性和有界性是函数的局部特性(如 $y=\dfrac{1}{x}$ 在$[1,2]$上有界,而在整个定义域上无界),它们所对应的区间可能是定义域的全部,也可能是定义域的一部分.

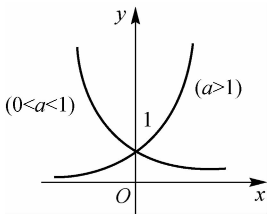
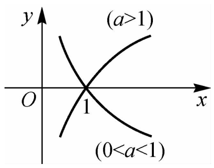
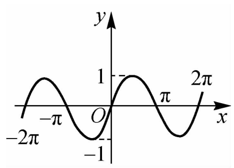
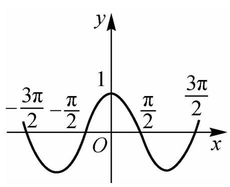
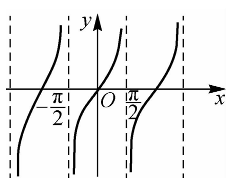
三、基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.基本初等函数的表达式、定义域、图像及主要性质如表 1-2 所示.

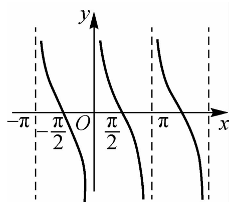
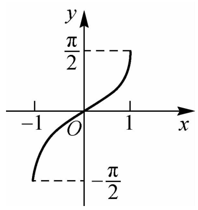
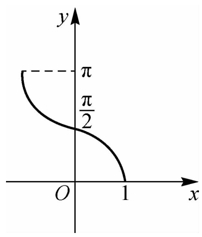
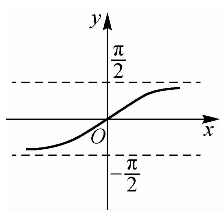
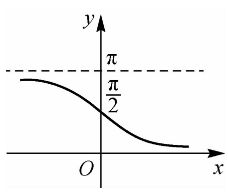
表 1-2

函数名称	表 达 式	定 义 域	图　　像	主要性质
常数函数	$y=C$ (C 为常数)	$(-\infty,+\infty)$		图像过点$(0,C)$,为平行于 x 轴的一条直线
幂函数	$y=x^{\alpha}$ (α 为实数)	随 α 的不同而不同,但在(0,+∞)内总有定义		(1)图像过点$(1,1)$. (2)若 $\alpha \gt 0$,函数在$(0,+\infty)$内单调增加;若 $\alpha \lt 0$,函数在$(0,+\infty)$内单调减少

续表

函数名称	表 达 式	定 义 域	图　　像	主要性质
指数函数	$y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$	$(-\infty,+\infty)$		(1)当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少. (2)图像在 x 轴上方，且都过点$(0,1)$
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$	$(0,+\infty)$		(1)当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少. (2)图像在 y 轴右侧，且都过点$(1,0)$
三角函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$		(1)奇函数，周期为 2π，有界. (2)在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加； 在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少$(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$		(1)偶函数，周期为 2π，有界. (2)在$[(2k-1)\pi,2k\pi]$内单调增加；在$[2k\pi,(2k+1)\pi]$内单调减少$(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$		(1)奇函数，周期为 π，无界. (2)在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加$(k\in\mathbf{Z})$

续表

函数名称	表达式	定义域	图像	主要性质
三角函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$		(1)奇函数,周期为 π,无界. (2)在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$
反三角函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$		(1)奇函数,单调增加函数,有界. (2)$\arcsin(-x)=-\arcsin x$
	$y=\arccos x$	$[-1,1]$		(1)非奇非偶函数,单调减少函数,有界. (2)$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$
	$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$		(1)奇函数,单调增加函数,有界. (2)$\arctan(-x)=-\arctan x$
	$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,+\infty)$		(1)非奇非偶函数,单调减少函数,有界. (2)$\operatorname{arccot}(-x)=\pi-\operatorname{arccot} x$

四、复合函数

定义 1.3　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,u 是 x 的函数 $u=g(x)$,如果对于函数 $u=g(x)$ 定义域内的每一个 x 对应的 u 都能使函数 $y=f(u)$有意义,那么 y 就是 x 的函数,这个函数

称为 $y=f(u)$，$u=g(x)$的复合函数，记为 $y=f[g(x)]$. u 称为复合函数 $y=f[g(x)]$的中间变量.

例如，由 $y=u^2$，$u=\sin x$ 可复合成 $y=\sin^2 x$；由 $y=\ln u$，$u=\sin v$，$v=\sqrt{x}$可复合成 $y=\ln(\sin\sqrt{x})$.

例 6　指出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=\mathrm{e}^{\sin x^2}$；　(2) $y=\arctan\dfrac{1}{1+x^2}$；

(3) $y=2^{\ln(x^2+1)}$；　(4) $y=\cos^2(3x+1)$.

解：(1) $y=\mathrm{e}^{\sin x^2}$ 由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=\sin v$，$v=x^2$ 复合而成；

(2) $y=\arctan\dfrac{1}{1+x^2}$由 $y=\arctan u$，$u=\dfrac{1}{v}$，$v=1+x^2$ 复合而成；

(3) $y=2^{\ln(x^2+1)}$ 由 $y=2^u$，$u=\ln v$，$v=x^2+1$ 复合而成；

(4) $y=\cos^2(3x+1)$由 $y=u^2$，$u=\cos v$，$v=3x+1$ 复合而成.

五、初等函数

定义 1.4　由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合构成的，且用一个式子表示的函数称为初等函数.

例如，$y=\sin^2 x+\ln x$，$y=\dfrac{3x-1}{\mathrm{e}^x}$都是初等函数；分段函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 不是初等函数，因为它不是用一个式子表示的函数.

注意：不是所有的分段函数都不是初等函数，如 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 就是初等函数.

以后，我们所讨论的函数一般都是初等函数.

习题 1-1

1. 判断下列各组函数是否相同并说明理由.

(1) $y=\ln|x|$，$y=\ln x$；　(2) $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$，$y=x-1$；

(3) $y=1$，$y=\sec^2 x-\tan^2 x$；　(4) $y=\ln x^3$，$y=3\ln x$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{3x-x^2}$；

(2) $y=\dfrac{\sqrt{-x^2-3x+4}}{x}$；

(3) $y=\lg(x^2-3x+2)$；

(4) $y=\dfrac{x}{\tan x}$；

(5) $y=\dfrac{x}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2-x)}}$；

(6) $y=\sqrt{25-x^2}-\lg(\cos x)$.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases} 2+x, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x^2-1, & 0<x\leqslant 4 \end{cases}$，求函数 $f(x)$ 的定义域和 $f(-1)$，$f(3)$ 的值，并作出它的图像.

4. 将下列各题中的 y 表示为 x 的函数.

(1) $y=\sqrt{u}$，$u=x^2-1$；

(2) $y=\arcsin u$，$u=\sqrt{x}$；

(3) $y=\mathrm{e}^u$，$u=\sin v$，$v=x^2+1$；

(4) $y=\ln u$，$u=5^v$，$v=\sin x$.

5. 指出下列函数的复合结构.

(1) $y=3^{\sin x}$；

(2) $y=\sqrt[3]{4x-1}$；

(3) $y=\ln[\sin(x-1)]$；

(4) $y=\cos^3(4x-1)$；

(5) $y=\arcsin\sqrt{x^2+1}$；

(6) $y=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}$.

第二节　极限的概念

一、数列的极限

陈景润曾在一次讲座中对极限的概念给出了一个让众人耳目一新的解释. 他引用了庄子《天下篇》中的“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，即一尺长的木棒，第一天取去一半，还剩下 $\frac{1}{2}$ 尺，第二天再在这 $\frac{1}{2}$ 尺中取去一半，还剩下 $\frac{1}{4}$ 尺……这样，把木棒每天所剩的长度列出

来，就成为这样一个数列：$1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$. 显然，当 n 无限增大时，2^n 便无限增大，而 $\frac{1}{2^n}$ 便无限缩小，但是不管 n 多么大，$\frac{1}{2^n}$ 永远不会等于零，因此"万世不竭"包含了朴素的极限概念.

公元三世纪的刘徽创造了"割圆术"，即圆的内接正多边形的边数无限增加后，它的面积会无限接近圆的面积，并用这个方法来计算圆周率. 后来，祖冲之用这个方法把圆周率的值计算到小数点后七位. 极限概念也是现代微积分概念的基础.

对于无穷数列 $\{a_n\}$，当 n 无限增大时，a_n 的变化趋势如何？

从下面三个数列：

(1) $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$；

(2) $0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n-1}{n},\cdots$；

(3) $\frac{1}{2},-\frac{1}{4},\frac{1}{8},-\frac{1}{16},\cdots,(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n,\cdots$.

可以看出，当 n 无限增大时，数列(1)表示数列 $a_n=\frac{1}{n}$ 的点逐渐密集在 $x=0$ 的右侧，即数列 $\{a_n\}$ 从 $x=0$ 的右侧无限接近于 0；数列(2)表示数列 $a_n=\frac{n-1}{n}$ 的点逐渐密集在 $x=1$ 的左侧，即数列 $\{a_n\}$ 从 $x=1$ 的左侧无限接近于 1；数列(3)表示数列 $a_n=(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 的点逐渐密集在 $x=0$ 的左、右两侧，即数列 $\{a_n\}$ 从 $x=0$ 的左、右两侧无限接近于 0.

以上三个数列有一个共同的性质：当 n 无限增大时，数列 $\{a_n\}$ 都分别与一个确定的常数无限接近. 一般地，有如下定义：

定义 1.5　如果当 n 无限增大($n\to\infty$)时，数列 $\{a_n\}$ 无限接近一个确定的常数 A，那么，这个确定的常数 A 就称为数列 $\{a_n\}$ 的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A \quad 或 \quad 当\ n\to\infty 时，a_n\to A$$

根据定义 1.5 可知，上述三个数列的极限分别记为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1,\quad \lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$$

例 1　观察下列数列的变化趋势，写出它们的极限.

(1) $a_n=\frac{1}{n^2}$；　　(2) $a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$；　　(3) $a_n=1$.

解:列出数列的前几项,如表 1-3 所示. 考察当 $n \to \infty$ 时,数列的点逐渐密集的位置.

表 1-3

n	1	2	3	4	5	…	$\to\infty$
$a_n=\frac{1}{n^2}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$	…	$\to 0$
$a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{1\,024}$	…	$\to 0$
$a_n=1$	1	1	1	1	1	…	$\to 1$

由表 1-3 所示的三个数列的变化趋势及数列极限的定义知:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$;　　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}1=1$.

一般地,有下列三个基本数列极限公式:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0(\alpha>0)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0(|q|<1)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$($C$ 是任意常数).

值得注意的是,不是所有的无穷数列都有极限,如果当 n 无限增大时,数列 $\{a_n\}$ 不与一个确定的常数 A 无限接近,那么,就说这个数列无极限,或者说这个数列的极限不存在. 例如,下面的两个数列就不存在极限:

(1) $a_n=1+(-1)^n$,当 n 无限增大时,a_n 的值在 2,0 两个数上来回跳动,而不是与一个确定的常数无限接近. 所以,这个数列无极限.

(2) $a_n=2^n$,当 n 无限增大时,a_n 的值也无限增大,它不能与一个确定的常数无限接近. 所以,这个数列无极限.

二、函数的极限

下面我们研究函数的极限,主要讨论函数 $y=f(x)$ 当自变量趋于无穷大($x\to\infty$)时和自变量趋于有限值($x\to x_0$)时两种情况的极限.

1. $x\to\infty$时函数的极限

$x\to\infty$表示自变量 x 的绝对值无限增大，为区别起见，把 $x>0$ 且无限增大记为 $x\to+\infty$，把$x<0$ 且其绝对值无限增大记为 $x\to-\infty$.

定义 1.6　如果当 x 取正实数且无限增大，即 $x\to+\infty$时，函数 $f(x)$无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就称为函数 $f(x)$当 $x\to+\infty$时的极限，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad \text{或} \quad \text{当 } x\to+\infty\text{时}, f(x)\to A$$

定义 1.7　如果当 x 取负实数而绝对值无限增大，即 $x\to-\infty$时，函数 $f(x)$无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就称为函数 $f(x)$当 $x\to-\infty$时的极限，记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \quad \text{或} \quad \text{当 } x\to-\infty\text{时}, f(x)\to A$$

定义 1.8　如果当 x 的绝对值无限增大，即 $x\to\infty$时，函数 $f(x)$无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就称为函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad \text{或} \quad \text{当 } x\to\infty\text{时}, f(x)\to A$$

当 $x\to\infty$时，$f(x)$的极限也可以定义为：如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$，则称 A 为 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限，即

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=A$$

也就是说，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$都存在但不相等或其中有一个不存在，则$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$不存在.

例 2　当 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to\infty$时，求下列函数的极限.

(1)$f(x)=\dfrac{1}{x}$；　　　　(2)$f(x)=\arctan x$.

解：(1)如图 1-1 所示，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0；$$

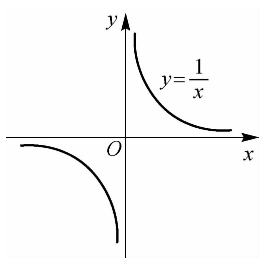


图 1-1

(2)如图 1-2 所示，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$不存在.

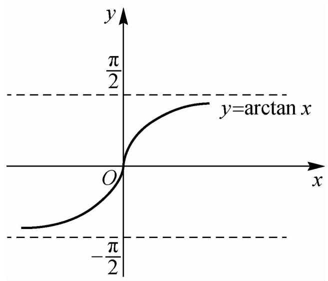


图 1-2

一般地，有下列三个基本函数的极限公式：

(1)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}=0(\alpha>0)$；

(2)$\lim\limits_{x\to\infty}q^{x}=0(|q|<1)$；

(3)$\lim\limits_{x\to\infty}C=C$($C$是任意常数).

2. $x\to x_0$ 时函数的极限

与$x\to\infty$的情形类似，$x\to x_0$表示x无限趋近于x_0，它包含以下两种情况：

(1)x从大于x_0的方向趋近于x_0，即从x_0的右侧趋近于x_0，记作$x\to x_0^{+}$(或$x\to x_0+0$)；

(2)x从小于x_0的方向趋近于x_0，即从x_0的左侧趋近于x_0，记作$x\to x_0^{-}$(或$x\to x_0-0$).

显然，$x\to x_0$表示以上两种情况同时存在.

例如，当$x\to1$时，观察函数$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$的变化趋势.

注意到，当$x\neq1$时，函数$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$，所以当$x\to1$时，$f(x)$的值无限接近于常数 2，如图 1-3 所示.

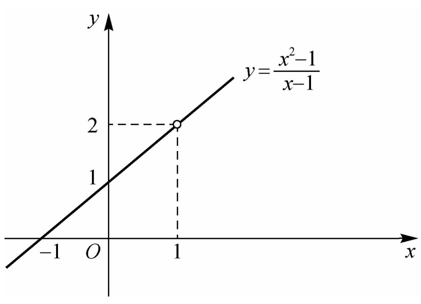


图 1-3

像这种当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的变化趋势，我们有如下定义：

定义 1.9　如果当 x 从 x_0 的左侧无限接近于 x_0（记为 $x \to x_0 - 0$ 或 $x \to x_0^-$）时，$f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么，称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的左极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0 - 0) = A$$

定义 1.10　如果当 x 从 x_0 的右侧无限接近于 x_0（记为 $x \to x_0 + 0$ 或 $x \to x_0^+$）时，$f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么，称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的右极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0 + 0) = A$$

定义 1.11　如果当 x 从 x_0 的两侧同时无限接近于 x_0（记为 $x \to x_0$）时，$f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么，称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad 当\ x \to x_0\ 时，f(x) \to A$$

与前述相仿，只有在 $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ 都存在且相等时，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 才存在且与它们相等，得到充分必要条件，即

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

注意：(1) 定义 1.11 中的“$x \to x_0$”表示 x 以任意方式趋近于 x_0.

(2) 定义 1.11 考虑的是 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的变化趋势，与 x 是否等于 x_0 无关，也与 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处是否有定义无关.

例 3　观察函数的变化趋势，写出下列极限.

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} C$（$C$ 是任意常数）；　　　(2) $\lim\limits_{x \to x_0} x$.

解：(1) 设 $f(x) = C$，由于不论 x 取何值，$f(x) = C$ 总成立，所以，当 x 趋于 x_0 时，$f(x) = C$ 的极限为 C，即 $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$；

(2) 设 $f(x) = x$，由于不论 x 取何值，$f(x) = x$ 总成立，所以，当 x 趋于 x_0 时，$f(x)$ 的极限为 x_0，即 $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

例 4　设 $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$，作出该函数的图像，并讨论 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$，$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$，$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 是否存在.

解：由图 1-4 可以看出，$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$，$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$，得 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

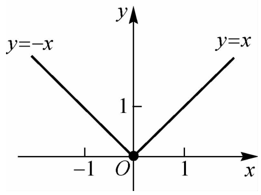


图 1-4

例 5 利用图像判断函数

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$$

当 $x\to0$ 时的极限是否存在.

解:作出函数 $f(x)$ 的图像(图 1-5),由图像可知

$$f(0-0)=\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(x-1)=-1$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x+1)=1$$

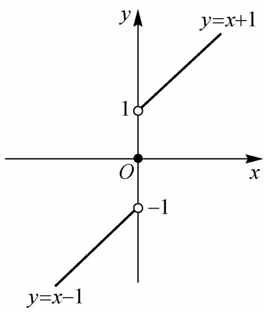


图 1-5

因为 $f(0-0)\neq f(0+0)$,所以极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

习题 1-2

1. 利用函数图像判断下列函数的变化趋势,并写出其极限.

(1) $\lim\limits_{x\to2}(4x-5)$;　　(2) $\lim\limits_{x\to2}(x^2+1)$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$;　　(4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$;

(5) $\lim\limits_{x\to1}(\lg x)$;　　(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)$;

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x$；　　(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)$；

(9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)$；　　(10) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan x)$.

2. 利用图像判断

$$f(x)=\begin{cases}x+2, & x<1\\ 2x+1, & x\geqslant 1\end{cases}$$

当 $x\to1$ 时的极限是否存在.

3. 求函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ x^2, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$ 当 $x\to0$ 和 $x\to1$ 时的极限.

第三节　极限的运算

一、极限的四则运算法则

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则有

法则 1　$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$.

法则 2　$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$.

推论　(1) $\lim Cf(x)=C\lim f(x)=CA$（C 为常数）；

(2) $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n=A^n$（$n\in\mathbf{N}$）.

法则 3　$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$（$B\neq0$）.

法则 1 和法则 2 可推广到有限个函数极限的情形（这里 lim 下面没有标 x 的变化趋势，表示本法则对 x 的各种变化趋势都适用，以后不再说明）.

注意：(1) 这里给出的 $x\to x_0$ 时函数的极限四则运算法则，适用于其他各种形式的极限，以后不再赘述.

(2)本书省略了对法则的证明.法则的各种结论均可直接用极限的定义证明,有兴趣的同学可以自行给出.

例 1 求$\lim\limits_{x\to 1}(5x-3)$.

解:$\lim\limits_{x\to 1}(5x-3)=\lim\limits_{x\to 1}5x-\lim\limits_{x\to 1}3=5\lim\limits_{x\to 1}x-\lim\limits_{x\to 1}3=5\times 1-3=2$.

例 2 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+1}$.

解:
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x^2+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x-4)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)}=\frac{(\lim\limits_{x\to 1}x)^2+\lim\limits_{x\to 1}3x-\lim\limits_{x\to 1}4}{(\lim\limits_{x\to 1}x)^2+1}=\frac{1+3-4}{2}=0.$$

二、计算有理式极限的运算法则

例 3 求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

解:因为分母极限$\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}2=0$,故不能利用法则 3 求解.但在 $x\to 2$ 的过程中,$x-2\neq 0$,在分式中可约去分子与分母的公因子 $x-2$,所以
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

上例中,当 $x\to 2$ 时,函数$\dfrac{x^2-4}{x-2}$的分子、分母极限都是 0,我们称这种极限为$\dfrac{0}{0}$型未定式极限.致使函数$\dfrac{x^2-4}{x-2}$的分子、分母极限都是 0 的因子 $x-2$,我们称它为零因子.求此类极限的方法是分子、分母采用约分的方法消去零因子,使函数转化为能用法则求极限的形式.

例 4 求$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$.

解:此极限为$\dfrac{0}{0}$型未定式极限,$x+2$ 为零因子,所以
$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x^2-2x+4)=12$$

例 5　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{x^2-2x+3}$.

解:当 $x\to\infty$时，分子和分母的极限都不存在，故不能利用法则 3 求解. 对于这类极限，我们可以先用函数分子、分母中 x 的最高次 x^2 同除分子与分母，然后根据基本极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^\alpha}=0(\alpha>0)$求极限，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+1}{x^2-2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=2$$

例 6　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{x^3-2x+3}$.

解:当 $x\to\infty$时，分子和分母的极限都不存在，我们可先用函数分子、分母中 x 的最高次 x^3 同除分子与分母，然后根据基本极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^\alpha}=0(\alpha>0)$求极限，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+1}{x^3-2x+3}=\frac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}=\frac{0+0+0}{1-0+0}=0$$

例 7　求$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5^x+1}{5^x-1}$.

解:当 $x\to+\infty$时，分子和分母的极限都不存在，我们可先用 5^x 同除分子与分母，然后根据基本极限$\lim\limits_{x\to+\infty}q^x=0(|q|<1)$求极限，即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x+1}{5^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{5^x}}{1-\dfrac{1}{5^x}}=1$$

三、第一个重要极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

第一个重要极限公式具有以下几个特征：

(1)$\dfrac{0}{0}$型极限.

(2)$\lim\limits_{u(x)\to0}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}=1$ 成立.

(3)分子中的三角函数必须是正弦函数.

(4)极限变量、分母变量、分子的正弦函数变量要保持一致(三位一体).

例 8 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{3x}$.

解:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{3x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{3}\times 1=\dfrac{1}{3}$.

例 9 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}$.

解:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{2}{\cos 2x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\cos 2x}=2$.

例 10 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{4\cdot\dfrac{x^2}{4}}=\dfrac{2}{4}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$.

例 11 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

解:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{3\sin 3x}{3x}}{\dfrac{5\sin 5x}{5x}}=\dfrac{3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}{5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}}=\dfrac{3}{5}$.

例 12 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

解:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{x}{\arcsin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sin(\arcsin x)}{\arcsin x}}$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{\arcsin x\to 0}\dfrac{\sin(\arcsin x)}{\arcsin x}}=\frac{1}{1}=1.$$

四、第二个重要极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\quad 或\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$$

第二个重要极限公式具有以下几个特征:

(1)1^∞型极限.

(2)$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ 或$(1+x)^{\frac{1}{x}}$中括号内的常数必须是 1,中间的连接符号必须是“+”号.

(3)$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ 或$(1+x)^{\frac{1}{x}}$中的$\frac{1}{x}$和 x 是倒数关系.

(4)一个不变(底数加号),两个相同(底数的两个 1),三位一体(极限变量、底数分母变量、指数变量保持一致).

例 13　求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$.

解:$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}=\mathrm{e}^{2}$.

例 14　求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$.

解:$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\left[1+\left(\frac{1}{-x}\right)\right]^{-x}\right\}^{-1}=\mathrm{e}^{-1}$.

例 15　求$\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{2x}}$.

解:$\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{2x}}=\lim\limits_{x\to 0}\{[1+(-3x)]^{\frac{1}{-3x}}\}^{-\frac{3}{2}}=\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$.

例 16　求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+2}\right)^{2x}$.

解:$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+2}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x+2}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{3}}\right)^{\frac{x+2}{3}-\frac{2}{3}}\right]^{6}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{3}}\right)^{\frac{x+2}{3}}\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}}\right]^{6}=(\mathrm{e}\cdot 1)^{6}=\mathrm{e}^{6}.$$

习题 1-3

1. 求函数的极限.

(1)$\lim\limits_{x\to -2}(3x^{2}-5x+2)$;　　(2)$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^{2}+5}{x-3}$;

(3)$\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{2}{x-3}\right)$;　　(4)$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{2}-1}{x-3}$;

(5)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^{3}-2x^{2}+x}{3x^{2}+2x}$;　　(6)$\lim\limits_{x\to 1}\frac{6x^{2}+5}{(x-1)^{2}}$;

(7)$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^{2}-x-2}$;　　(8)$\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{8x^{3}-1}{6x^{2}-5x+1}$;

(9) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t^2}\right)$；　　(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{6x^2-2x+5}$.

2. 求函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 8x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{6x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{5x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{2x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin 3x}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^x$；　　(8) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$；

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^x$；　　(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+1}$.

第四节　无穷小与无穷大

一、无穷小

1. 无穷小的定义

定义 1.12　如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的极限为零，那么 $f(x)$ 称为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小量，简称无穷小，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0 \quad \text{或} \quad \lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

例如，$f(x)=x-1$ 是当 $x\to 1$ 时的无穷小，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小.

注意：

(1)一个函数 $f(x)$ 是无穷小，与自变量 x 的变化趋势有关，因此，“称呼”一个函数 $f(x)$ 是无穷小时，必须指明 x 的变化趋势. 例如，$f(x)=x-1$ 当 $x\to 1$ 时是无穷小，当 $x\to 2$ 时不是无穷小.

(2)绝对值很小的常数不一定是无穷小. 例如，0.000 01 不是无穷小. 无穷小是变量的变

化状态，而不是变量的大小，不能与很小的数混淆.

(3)常数中只有“0”是无穷小.

(4)无穷小要与负无穷大区分开.

(5)当 $x \to x_0^+$，$x \to x_0^-$，$x \to +\infty$，$x \to -\infty$时，可得到相应的无穷小的定义.

2. 无穷小的性质

在自变量 x 的同一变化过程中，无穷小具有以下性质：

性质 1.1　有限个无穷小的代数和为无穷小.

注意：无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小.

例如，当 $n \to \infty$时，$\dfrac{1}{n}$是无穷小；但 n 个$\dfrac{1}{n}$之和为 1，不是无穷小.

性质 1.2　有界函数与无穷小的乘积为无穷小.

性质 1.3　有限个无穷小的乘积为无穷小.

推论 1　有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2　常数与无穷小的乘积是无穷小.

例 1　求$\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

解：因为$\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{1}{x}=0$，$|\sin x| \leqslant 1$ 即 $\sin x$ 是有界函数，所以由性质 1.2 可推得

$$\lim_{x \to \infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

例 2　求$\lim\limits_{x \to 0}x\cos\dfrac{1}{x}$.

解：因为$\lim\limits_{x \to 0}x=0$，$\left|\cos\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$ 即 $\cos\dfrac{1}{x}$是有界函数，所以由性质 1.2 可推得

$$\lim_{x \to 0}x\cos\frac{1}{x}=0$$

类似地，利用性质 1.2 可知

$$\lim_{x \to 0}x\arccos\frac{1}{x}=0, \quad \lim_{x \to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

3. 函数极限与无穷小的关系(极限基本定理)

定理 1.1　$\lim\limits_{x \to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha=\alpha(x)$是 $x \to x_0$ 时

的无穷小，即$\lim\limits_{x \to x_0}\alpha(x)=0$.

例如，$\lim\limits_{x \to 1}(x+1)=2$，所以 $x+1=2+\alpha$，其中 $\alpha=x-1$ 且$\lim\limits_{x \to 1}\alpha=\lim\limits_{x \to 1}(x-1)=0$.

4. 无穷小的比较

由无穷小的定义可知，无穷小都趋于零. 但它们趋于零的"速度"差别很大. 例如，当 $x \to 0$ 时，$2x$ 和 x^2 都是无穷小，但在趋于零的过程中，x^2 比 $2x$ 显然要快得多. 为了表达无穷小的这种特点，我们引入无穷小"阶"的概念.

定义 1.13 设 α 与 β 是同一变化过程中的两个无穷小($\lim\limits_{x \to x_0}\alpha=0$，$\lim\limits_{x \to x_0}\beta=0$)

(1)若$\lim\limits_{x \to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是比 β 高阶的无穷小，记作 $\alpha=o(\beta)$；

(2)若$\lim\limits_{x \to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称 α 是比 β 低阶的无穷小；

(3)若$\lim\limits_{x \to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=C(C\neq 0, C\neq 1, C$ 为常数)，则称 α 与 β 是同阶无穷小；

(4)若$\lim\limits_{x \to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则称 α 与 β 是等价无穷小，记作 $\alpha \sim \beta$.

根据以上定义可知，当 $x \to 0$ 时，x^2 是比 $2x$ 高阶的无穷小，$2x$ 是比 x^2 低阶的无穷小，$2x$ 与 $3x$ 是同阶的无穷小.

二、无穷大

定义 1.14 如果当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时，函数 $f(x) \to \infty$，那么 $f(x)$称为当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时的无穷大量，简称无穷大，记作

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)=\infty \quad \text{或} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)=-\infty, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)=+\infty$$

例如，$\dfrac{1}{x}$是当 $x \to 0$ 时的无穷大.

注意：

(1)一个函数 $f(x)$是无穷大，与自变量 x 的变化趋势有关，因此，"称呼"一个函数 $f(x)$是无穷大时，必须指明 x 的变化趋势. 例如，$\dfrac{1}{x-1}$是当 $x \to 1$ 时的无穷大；当 $x \to 2$ 时，$x-1$ 不是无穷大.

(2)绝对值再大的常数也不是无穷大. 例如，1 000 000 不是无穷大.

(3)常数中没有无穷大.

三、无穷小与无穷大的关系

定理 1.2　在自变量的同一变化过程 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)中,如果 $f(x)$为无穷大,则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小;相反,如果 $f(x)$为无穷小,且 $f(x)\neq 0$,则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

例如,当 $x\to\infty$时,$\dfrac{1}{x}$是无穷小,x 是无穷大.

利用定理 1.2 可以解决如下一类极限问题.

例 3　求$\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-5x+6)$.

解:因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2-5x+6}=0$,所以$\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-5x+6)=\infty$.

例 4　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x+1}{x^2-2x+3}$.

解:当 $x\to\infty$时,分子和分母的极限都是无穷大,我们称这种极限为$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式极限.我们先用函数分子、分母中 x 的最高次 x^3 同除分子与分母,然后根据基本极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^\alpha}=0(\alpha>0)$求极限,即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x+1}{x^2-2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}$$

但上式极限的分母极限为 0,故不能用极限运算法则.因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{2x^3+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}{2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=\frac{0}{2}=0$$

所以,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x+1}{x^2-2x+3}=\infty$.

一般地,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m\\ 0, & n<m\\ \infty, & n>m\end{cases}$.

习题 1-4

1. 下列函数在指定的变化过程中哪些是无穷小？哪些是无穷大？

(1)$\dfrac{x}{x^2-1}$，当 $x\to1$ 时； (2)$2^{1-x}-1$，当 $x\to1$ 时；

(3)$\dfrac{1+2x}{x^2}$，当 $x\to0$ 时； (4)e^x，当 $x\to\infty$时；

(5)$e^{\frac{1}{x}}$，当 $x\to0$ 时； (6)$\ln x(x>0)$，当 $x\to+\infty$时.

2. 下列函数在 x 的什么趋势之下为无穷小，什么趋势之下为无穷大？

(1)$y=\dfrac{1}{x^3}$； (2)$y=\dfrac{x}{x^2-1}$；

(3)$y=\cot x$； (4)$y=\ln x$.

3. 利用无穷小的性质，计算下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to0}(x^3+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})$； (2)$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2x}+3^x\right)$；

(3)$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x\cos x$； (4)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x^2}{x}$；

(5)$\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$； (6)$\lim\limits_{x\to1}(x^2-1)\cos\dfrac{1}{x-1}$.

4. 比较下列无穷小的阶.

(1)当 $x\to0$ 时，$2x-x^2$ 与 x^2-x^3；

(2)当 $x\to+\infty$时，3^{-x}与 e^{-x}.

第五节　函数的连续性

一、函数连续的概念

函数是物质世界中各种变量之间依存关系的具体反映. 例如，做自由落体运动的物体垂

直下落时的位移是时间的函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$（g 是常数），位移随着时间的变化而不断变化. 该函数的图像是一条连续不断的曲线（抛物线）. 这个事实揭示出函数的另外一个重要性质，即函数的连续性.

首先看一个预备定义：当 x 从 x_0 变到 x_1 时，称 x_1-x_0 为变量 x 在点 x_0 处的增量，记为 Δx，即 $\Delta x=x_1-x_0$. Δx 可正可负，当 $\Delta x>0$ 时，x 在增大；当 $\Delta x<0$ 时，x 在减少.

对于函数 $f(x)$，当 x 从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数 $f(x)$ 相应地从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$，称 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的增量，记为 Δy，即

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的连续

定义 1.15　若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其近旁有定义，x 在点 x_0 处有增量 Δx，则相应函数的增量为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 当自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$ 趋近于零时，对应的函数的增量 $\Delta y=f(x+x_0)-f(x_0)$ 也趋近于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \quad 或 \quad \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

成立，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

如图 1-6 所示的函数图像，曲线 $y=f(x)$ 在点 x_0 处满足 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，所以，$y=f(x)$ 在点 x_0 处是连续的；如图 1-7 所示的函数图像，曲线 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不满足 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，所以，$y=f(x)$ 在点 x_0 处是不连续的.

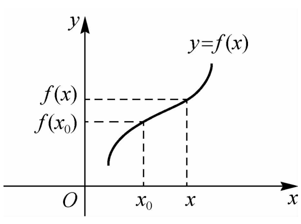


图 1-6

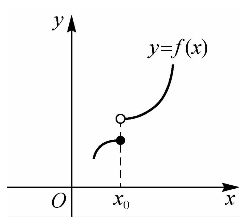


图 1-7

例 1　证明函数 $y=x^3$ 在点 x_0 处连续.

证明：(1) 写出函数在 $x=x_0$ 处的增量.

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^3-x^3=3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$$

(2) 求极限.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3]=0$$

由定义 1.15 可知，函数 $y=x^3$ 在点 x_0 处连续.

上述有关函数连续的定义还可以写成另外的形式：

在 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$ 中，令 $x_0+\Delta x=x$，则 $\Delta x\to 0\Leftrightarrow x\to x_0$，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

定义 1.16　若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其近旁有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

由定义 1.16 可知，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续必须满足三个条件（设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的左右近旁有定义）：

(1) $f(x_0)$ 存在，即函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处有定义.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，即函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $f(x_0)$ 相等，即函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的极限值等于函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值.

以上三个条件缺一不可，否则，称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续或间断，并将点 x_0 称为函数 $y=f(x)$ 的不连续点或间断点. 连续的三个条件决定了间断点有以下三种情形（设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义）：

(1) 在 $x=x_0$ 处没有定义.

(2) 虽在 $x=x_0$ 处有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

(3) 虽在 $x=x_0$ 处有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

通过观察下述几个函数的曲线在 $x=1$ 处的情况，给出间断点的不同情形：

(1) 函数 $f(x)=x^2+1$，由于在 $x=1$ 处满足上述三个条件，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续（图 1-8）.

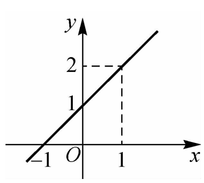


图 1-8

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，由于在 $x=1$ 处没有定义，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续（图 1-9）.

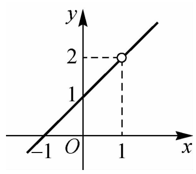


图 1-9

(3)函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<1 \\ x, & x\geqslant 1\end{cases}$,虽在 $x=1$ 处有定义,但由于 $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$,即 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$不存在,所以 $f(x)$在 $x=1$ 处不连续(图 1-10).

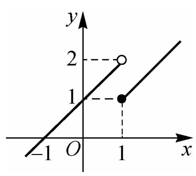


图 1-10

(4)函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq 1 \\ 1, & x=1\end{cases}$,虽在 $x=1$ 处有定义,且 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$存在,但 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$,所以 $f(x)$在 $x=1$ 处不连续(图 1-11).

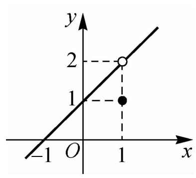


图 1-11

(5)函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$,由于在 $x=1$ 处没有定义,$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$也不存在,所以 $f(x)$在 $x=1$ 处不连续(图 1-12).

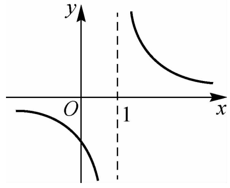


图 1-12

例 2 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 2 \\ x+2, & x>2 \end{cases}$ 在 $x=2$ 处的连续性.

解:因为 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 2 \\ x+2, & x>2 \end{cases}$ 在 $x=2$ 处有定义,并且

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0} x^2=4,\ \lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}(x+2)=4$$

$$f(2)=4$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=4=f(2)$$

所以,$f(x)$在 $x=2$ 处连续.

例 3 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$在 $x=1$ 处的连续性.

解:因为 $f(x)$在 $x=1$ 处无定义,所以 $f(x)$在 $x=1$ 处间断,$x=1$ 是函数 $f(x)$的间断点.

例 4 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} -x, & x<0 \\ x+2, & x\geqslant 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解:虽然函数 $f(x)=\begin{cases} -x, & x<0 \\ x+2, & x\geqslant 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处有定义,但是因为

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}(-x)=0,\ \lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}(x+2)=2$$

所以,$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在. 因此,$f(x)$在 $x=0$ 处间断,$x=0$ 是函数 $f(x)$的间断点.

例 5 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} 2x, & x\neq 1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处的连续性.

解:虽然函数 $f(x)=\begin{cases} 2x, & x\neq 1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处有定义,但是$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} 2x=2$,而

$$f(1)=0$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$$

所以,$f(x)$在 $x=1$ 处间断,$x=1$ 是函数 $f(x)$的间断点.

2. $f(x)$在区间上的连续性

定义 1.17 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 处及其左(或右)近旁有定义,如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$(或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$),那么,称函数 $f(x)$在点 x_0 处左连续(或右连续).

定义 1.18　如果函数 $f(x)$在开区间(a,b)内的每一点处都连续，那么，称函数 $f(x)$在区间(a,b)内连续，或称函数 $f(x)$为区间(a,b)内的连续函数，区间(a,b)称为函数 $f(x)$的连续区间.

定义 1.19　如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上有定义，在区间(a,b)内连续，且在右端点 b 处左连续，在左端点 a 处右连续，即 $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b)$，$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$，那么，称函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续.

二、初等函数的连续性

在几何上，连续函数的图像是一条连续不间断的曲线. 因为基本初等函数的图像在其定义域内都是连续的，所以有以下结论.

定理 1.3　基本初等函数在其定义域内都是连续的.

由极限的四则运算法则及连续的定义可知，两个连续函数四则运算后仍然连续. 此外，可以证明两个连续函数的复合函数仍然连续.

定理 1.4　如果 $f(x)$，$g(x)$都在点 x_0 处连续，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$都在点 x_0 处连续（证明略），即

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=f(x_0)\pm g(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=f(x)\cdot g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x)\neq 0)$$

定理 1.5　设函数 $y=f(u)$在点 u_0 处连续，函数 $u=\varphi(x)$在点 x_0 处连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在点 x_0 处连续，即

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)]$$

这个定理说明了连续函数的复合函数仍为连续函数，并可得到如下结论：

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]$$

特别地，当 $\varphi(x)=x$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$，这表示连续函数的极限符号与函数符号可以交换运算次序.

根据上述定理可以证明以下重要定理：

定理 1.6 一切初等函数在其定义域区间内都是连续的.

由定理 1.6 可知,对于$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$,若 x_0 是初等函数 $f(x)$定义域内的点,则其极限值就是对应点的函数值.

例 6 求下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)$;

(2)$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+x}-2}{x-2}$;

(3)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}(a>0,a\neq 1)$;

(4)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

解:(1)因为 $x=\dfrac{\pi}{2}$是函数 $y=\ln(\sin x)$定义域$(0,\pi)$内的一个点,所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)=\ln\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)=0$$

(2)因为 $x=2$ 不是函数$\dfrac{\sqrt{2+x}-2}{x-2}$定义域$[-2,2)\cup(2,+\infty)$内的点,所以不能将 $x=2$ 代入函数计算. 当 $x\neq 2$ 时,我们先对函数进行变形,再求其极限,即

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}-2}{x-2}&=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{2+x}-2)(\sqrt{2+x}+2)}{(x-2)(\sqrt{2+x}+2)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{2+x}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{2+x}+2}=\frac{1}{\sqrt{2+2}+2}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

(3)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\log_a e=\dfrac{1}{\ln a}$.

(4)令 $e^x-1=t$,则 $x=\ln(1+t)$,且当 $x\to 0$ 时,$t\to 0$. 由上题得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}}=\frac{1}{\ln e}=1$$

三、闭区间上连续函数的性质

闭区间上的连续函数有一些重要性质,这些性质直观上比较明显,因此我们只做介绍,不予证明.

定理 1.7(最值定理) 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则函数 $f(x)$在$[a,b]$上一定能取得最大值和最小值.

如图 1-13 所示,函数 $y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在点 ξ_1 处取得最小值 $f(\xi_1)=m$,

在点 ξ_2 处取得最大值 $f(\xi_2)=M$.

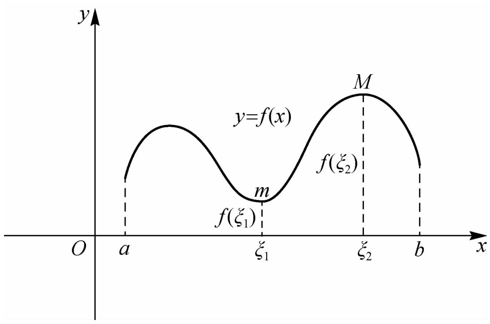


图 1-13

定理 1.7 要求的两个条件：

(1)区间是闭区间；

(2)函数是连续的.

这两个条件缺一不可.

例如，函数 $y=x^2$ 在开区间(0,2)内没有最大值和最小值.

又如，函数 $y=\begin{cases}x+1, & -1\leqslant x<0\\ x-1, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$ 在闭区间$[-1,1]$上不连续，它也没有最大值和最小值.

推论 1　闭区间上的连续函数是有界的.

定理 1.8(介值定理)　如果 $f(x)$在$[a,b]$上连续，μ 是介于 $f(x)$的最小值和最大值之间的任一实数，则在点 a 和点 b 之间至少可找到一点 ξ，使得 $f(\xi)=\mu$(图 1-14).

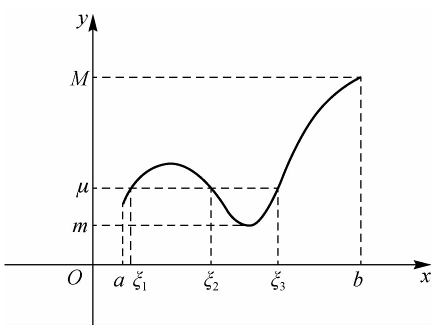


图 1-14

由图 1-14 可以看出，水平直线 $y=\mu(m\leqslant\mu\leqslant M)$与$[a,b]$上的连续曲线 $y=f(x)$至少相

交一次，如果交点的横坐标为 $x=\xi$，则有 $f(\xi)=\mu$.

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在[1,3]上连续，4 是介于 $f(1)=1$ 和 $f(3)=9$ 之间的一个值，则存在 $2\in(1,3)$，使得 $4=2^2$ 成立.

推论 2(根的存在性定理) 如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)$与 $f(b)$异号($f(a)\cdot f(b)<0$)，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

推论 2 的几何意义是显然的. 如图 1-15 所示，曲线两端点落在 x 轴的上下两侧，$f(a)<0$，$f(b)>0$，则连续曲线上的点由 A 到 B 至少要与 x 轴有一个交点. 设交点为 ξ，则 $f(\xi)=0$.

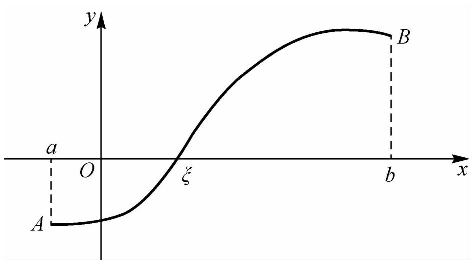


图 1-15

例 7 证明方程 $x^4+x=1$ 至少有一个根介于 0 和 1 之间.

证明:设 $f(x)=x^4+x-1$，则 $f(x)$在[0,1]上连续，且

$$f(0)=-1<0,\quad f(1)=1>0$$

根据推论 2，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$，由此说明方程 $x^4+x=1$ 至少有一个根介于 0 和 1 之间.

例 8 证明方程 $x^3+3x^2-1=0$ 在(0,1)内至少有一个根.

证明:设 $f(x)=x^3+3x^2-1$，则 $f(x)$在[0,1]上是连续的，且

$$f(0)=-1<0,\quad f(1)=3>0$$

根据推论 2 可知，在(0,1)内至少有一点 ξ，满足

$$\xi^3+3\xi^2-1=0$$

这个等式说明方程 $x^3+3x^2-1=0$ 在(0,1)内至少有一个根 ξ.

习题 1-5

1. 设函数 $f(x)=x^2+1$，求：

(1)当 x 从 $x_1=1$ 改变到 $x_2=-1.5$ 时，自变量的增量；

(2)当 x 从 $x_1=0$ 改变到 $x_2=2$ 时,函数的增量;

(3)当 x 从 $x_1=1$ 改变到 $x_2=1+\Delta x$ 时,函数的增量.

2. 判断函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 在区间 $(0,2)$ 内是否连续,在区间 $[0,2]$ 上是否连续.

3. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

4. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1 \\ \dfrac{1}{2}, & x=1 \\ 1, & 1<x<2 \end{cases}$,问:

(1) $f(x)$ 在 $x=1$ 处的左、右极限,函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否有极限?

(2)函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否连续?

(3)函数 $f(x)$ 的连续区间.

5. 求下列函数的间断点.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$;　(2) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$;

(3) $f(x)=\dfrac{1}{\tan 2x}$;　(4) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ \dfrac{\sin x}{x}, & x>0 \end{cases}$.

6. 求函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-3x+2}$;　(2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\sin 4x)^3$;　(4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{9}}[\ln(2\cos 3x)]$;

(5) $\lim\limits_{x\to 1}x\ln(3-2x)$;　(6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(1+\sin 2x)^2$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$;　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

7. 证明方程 $x^4+x=1$ 至少有一个根介于 0 和 1 之间.

8. 判别方程 $2x^3-5x+1=0$ 在实数范围内是否存在实数根.

复习题一

1. 判断题.

(1)分段函数一定不是初等函数. (　　)

(2)如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $f(x)$ 在点 x_0 处一定有定义. (　　)

(3)如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $f(x_0-0)=A$. (　　)

(4)无穷小的和必为无穷小. (　　)

(5)$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$. (　　)

(6)如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左右近旁有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续. (　　)

2. 填空题.

(1)已知函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,则 $f(x^2)$ 的定义域是________.

(2)函数 $y=\sqrt{\log_2(2x+3)}$ 的定义域是________.

(3)$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+k}{x-3}=4$,则 $k=$________.

(4)若当 $x\neq 0$ 时,$f(x)=\dfrac{\sin 2x}{x}$,且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,则 $f(0)=$________.

(5)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n+1}+\dfrac{n^2}{n+2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n+n}\right)=$________.

(6)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{kn}=\mathrm{e}^{-3}$,则 $k=$________.

(7)当 $x\to+\infty$ 时,$\dfrac{1}{x}$ 是比 $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}$________的无穷小.

(8)当 $x\to 0$ 时,无穷小 $1-\sqrt{1-x}$ 与 x 相比较是________无穷小.

(9)函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的间断点是________.

(10)函数 $y=\dfrac{x}{\sin x}$ 的间断点是________.

(11)函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+2, & x\leqslant 0 \\ e^x, & x>0 \end{cases}$,则 $f[f(0)]=$________.

(12)若 $f(x)=\begin{cases} |\sin x|, & x<1 \\ 0, & x\geqslant 1 \end{cases}$,则 $f(1)=$________,$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=$________.

3. 选择题.

(1)函数 $y=\frac{3}{x}-\sqrt[3]{1-x^2}$的定义域是(　　).

A. $x\neq 0$　　B. $x\in[-1,1]$

C. $x\in[-1,0)\cup(0,1]$　　D. $x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

(2)下列函数中表示同一个函数的是(　　).

A. $y_1=1,y_2=\frac{x}{x}$　　B. $y_1=x,y_2=\sqrt{x^2}$

C. $y_1=|x|,y_2=\sqrt{x^2}$　　D. $y_1=x+1,y_2=\frac{x^2-1}{x-1}$

4. 写出下列函数的复合过程.

(1)$y=(a+bx)^5$;　　(2)$y=\sqrt{1+x^2}$;

(3)$y=(e^{\sin x})^2$;　　(4)$y=(\arcsin\sqrt{1-x^2})^3$.

5. 求函数的极限.

(1)$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$;　　(2)$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-1}$;

(3)$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1}$;　　(4)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)^3}{n^4+1}$;

(5)$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$;　　(6)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}$;

(7)$\lim\limits_{u\to 1}\frac{u^3-1}{u^2-1}$;　　(8)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}$;

(9)$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{1-x^2}$;　　(10)$\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

(11)$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$.

6. 已知 $f(x)=\begin{cases}1, & x<-1\\ x, & -1\leqslant x\leqslant 1\\ 1, & x>1\end{cases}$,证明 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续,在 $x=-1$ 处间断.