活页式

AR（增强现实）

主编　孟宪杰
张远镇
孙海青

计算机数学基础

JISUANJI SHUXUE JICHU

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

计算机数学基础

策划编辑：金颖杰
责任编辑：高　宇
封面设计：张瑞阳

ISBN 978-7-5635-6829-1
定价：55.00元

计算机数学基础

主　编　孟宪杰　张远镇　孙海青
副主编　闫艳花　李艳宁　纪张伟

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

内 容 简 介

本书共分为 9 章，主要内容包括计算机数学概述、一元函数微分学、定积分与不定积分、线性代数初步、概率论基础、随机变量和数字特征、数理逻辑初步、图论基础和 Mathematica 软件初步.

本书适合作为高等职业院校计算机和通信类相关专业数学课程的教材.

图书在版编目(CIP)数据

计算机数学基础 / 孟宪杰，张远镇，孙海青主编．-- 北京：北京邮电大学出版社，2022.12
ISBN 978-7-5635-6829-1

Ⅰ．①计… Ⅱ．①孟… ②张… ③孙… Ⅲ．①电子计算机—数学基础—高等职业教育—教材 Ⅳ．①TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 246514 号

策划编辑：金颖杰　**责任编辑：**高　宇　**封面设计：**张瑞阳

出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号
邮政编码：100876
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：三河市骏杰印刷有限公司
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：14.5
字　　数：300 千字
版　　次：2022 年 12 月第 1 版
印　　次：2022 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-6829-1　　定　价：55.00 元

·如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系·

服务电话：400-615-1233

前 言

PREFACE

数学是研究客观世界“数量关系”与“空间形式”的科学，是对客观世界进行定性把握和定量描述，进而将其抽象概括而形成的方法和理论. 数学具有广泛的应用性. 它既是抽象的，又是具体的，是一种工具，也是一种文化，更是一种信息. 数学是一种普适性工具，在数据处理、表达计算、演绎推理等方面为其他学科提供了一种特有的语言、思想和方法，其基础性地位无可替代.

针对数学课程的教学研究与改革工作一直没有停止过. 为进一步深化数学课程的教学改革，突出数学教学与专业培养相融合、应用技能与文化素养并重的理念，编者在充分调研的基础上，落实立德树人根本任务，以“重概念、强应用、轻推理、少论证、易理解”为原则编写了本书.

本书共分为 9 章，主要内容包括计算机数学概述、一元函数微分学、定积分与不定积分、线性代数初步、概率论基础、随机变量和数字特征、数理逻辑初步、图论基础和 Mathematica 软件初步.

本书取材新颖，阐述严谨，内容丰富，重点突出，思路清晰，图文并茂，富有启发性，便于教学和自学. 具体编写特色如下.

1. 课程内容优化

本书从第 2 章开始，均设计有建模实例、趣味数学、数学与人生、课后活动模块，内容整体优化，充分体现“提高数学素养、为专业服务、为职业生涯发展奠定基础”的数学课程的定位，激发学生学习数学的主动性和积极性，提高学生的综合职业素养和创新意识.

2. 数学软件辅助

增加数学软件的详细介绍，用计算机完成复杂的计算，降低学生的学习难度，提高学生的学习兴趣，强化学生应用数学工具解决实际问题的能力.

3. 教学资源丰富

将微课、动画、闯关题、AR 模型等融入教材，使学生能不受时间和空间的限制，更好地进行学习.

4. 教材形式创新

本书是新型活页式教材，图文并茂，形式活泼，语言表达精炼、准确、科学，方便学生抽出或加入新册页，可变性与灵活性较高，充分激发学生的学习热情。

本书由天津电子信息职业技术学院孟宪杰、张远镇、孙海青任主编，天津电子信息职业技术学院闫艳花、李艳宁，唐山职业技术学院纪张伟任副主编. 在编写过程中，编者参考了国内外众多院校教师编写的教材，在此对相关作者表示感谢，同时对积极支持本书编写和出版的领导表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，书中难免存在不足之处，恳请读者提出宝贵意见.

编　者

目　录

CONTENTS

第 1 章 计算机数学概述

数学的发展大致可以分为三个阶段.第一阶段是 17 世纪以前的初级阶段,即常量数学阶段,如初等几何、初等代数等.第二阶段是从 17 世纪初到 19 世纪末,即变量数学阶段,有微积分、解析几何、高等代数等.第三阶段从 19 世纪末开始,数学获得了巨大的发展,进入近代数学阶段,产生了实变函数、泛函分析、非欧几何、拓扑学、近世代数、计算数学、数理逻辑等新的数学分支.

1.1 数学与计算机数学

1.1.1 数学的内容与特点

1.数学的内容

数学是研究数量、结构、变化、空间以及信息等概念的一门学科,是研究集合上各种结构(关系)的科学.数学在人类历史发展和社会生活中发挥着不可替代的作用,是人们学习和研究现代科学技术必不可少的基本工具.高等数学是由微积分学,较深入的代数学、几何学以及它们之间的交叉内容所形成的一门基础学科,其主要内容包括数列、极限、微积分、空间解析几何与线性代数、级数、常微分方程等.

2. 数学的特点

1)高度的抽象性

抽象性是数学最基本、最显著的特点,在抽象中只保留了量的关系和空间形式,并且数学的抽象性是一级一级逐步提高的,所达到的抽象程度大大超过了其他学科.

2)严密的逻辑性与精确性

严密的逻辑性是指在数学理论的归纳和整理中,无论是概念表述,还是推理判断,都要运用逻辑规则和逻辑思维,学习数学的过程就是思维训练的过程.

数学的精确性表现在数学推理的逻辑严格性和数学结论的确定无疑性.

3)广泛的应用性

对于人类社会的进步,数学科学起着很重要的作用.尤其是到了现代,计算机的出现和普及使得数学的应用领域更加广阔,现代数学成为科技发展的强大动力,其广泛深入地渗透到其他各行各业各领域.

1.1.2 计算机数学

计算机和数学这两门学科在许多方面有着十分密切的联系,学好数学知识和数学思维对学习计算机有着十分重要的意义,同时计算机的发展也会进一步促进数学学科的发展,如四色定理的证明就是使用计算机手段解决的.计算机数学是使用数学手段来解决与计算机中算法相关的各类问题的学科.

离散数学为计算机算法的研究提供了有效的方法.离散数学是研究离散量的结构及其相互关系的数学学科,主要内容包括集合论、图论、组合数学等.离散数学的研究重点是相关算法的分析,其中大整数的分解算法需要数论、代数等传统数学基础知识作为支撑.

算法研究的核心内容是判定性问题和计算机复杂度的理论研究,而很多数学问题都通过判定性问题得到了澄清.一个算法的好坏可以通过对时间复杂度及空间复杂度的研究进行分析,通过对计算复杂度进行分类,可以解决计算机复杂度的理论研究问题.

1.2 数学的应用性

20 世纪,数学作为科学的推动力和直接的参与者,以空前的广度与深度向其他科学技术和人类知识领域渗透,加上电子计算机的推动,应用数学的蓬勃发展已经形成当代数学的一股强大潮流.数学之用是巨大、广泛而深刻的,凡涉及数量与空间的科学都不可避免地要用到数学.

天文学、物理学、生物医学、数理经济学、计算机科学等都需要借助数学的理论知识去研究,下面介绍数学在一些相关学科领域中的具体应用.

1. 数学在生物医学中的应用

随着近代生物医学的快速发展,数学在生命科学中的作用愈发突出.生物医学不管是微

观方向的研究，还是宏观方向的发展，都必须借助精密的数学计算作为推动其前进的动力.现代生物医学的发展总趋势是从定性到定量研究的转变，能够更加有效地探索医学科学领域中物质的量与量之间的关系，推动医学科学向着定量、精确、可计算、可预测、可控制的方向发展，而这些都需要利用高等数学的理论知识来探索.例如，常微分方程可以应用到临床医学的定量分析和群体医学的动态分析；统计学和概率论可以为药物使用、人口统计与流行病、公共卫生管理等做出决策；数学模型可以为临床医学、预防医学等建立医学数学模型，从而得到可供人们做出分析、判断、预测和决策的结果.

2.数学在经济学中的应用

作为基础学科，数学在经济学的发展中起着至关重要的作用.连续复利的计算借助了高等数学知识，将经济学中的离散变量进行连续化处理，最终得出连续复利的实质为数列的极限问题；经济学中的增长率、边际问题、弹性问题等涉及变化率的问题都需要借助导数的计算；积分学在经济学中一个经典的应用是由边际函数求总函数，如由边际成本求总成本；利用微分方程可以计算商品的市场价格与供给量或者需求量之间的函数关系；银行关于吸收存款后的准备金和放款总额需要利用级数的知识进行计算.

3.数学在物理学中的应用

微积分是高等数学的核心，基本上近现代数学的每一个分支都要用到微积分的理论.微积分的理论基础是极限，极限的思想是牛顿在研究物质运动时提出来的.导数概念就来源于变速直线运动的瞬时速度，实质为增量比值的极限，在此之后的复变函数、积分变换、无穷级数等都成为研究物理学的有效工具.在量子力学中，薛定谔的波动方程就是一种微分方程；在凝聚态物理中，需要用到泛函分析去研究；此外，变直线做功、不均匀构件的质量、不均匀物体的质心、物体的引力、磁感应强度、磁通量等的计算都需要利用定积分的微元思想进行计算.

4.数学在化学中的应用

化学是一门关于物质存在和转化的科学，数学在近代化学中的基础作用日益增强.从定量分析到量子化学，从数量分析到计量化学，所涉及的数学知识越来越深奥.例如，利用高等数学方法可以证明化学热力学的结论和推导相关公式，可以计算基元反应的反应速率，等等.

5.数学在计算机科学中的应用

现代计算机的发展，如移动通信、可穿戴设备、物联网概念的提出和实施改变着人们的生活方式，而计算机的发展是随着新的数学问题产生的，数学思想在其中发挥着非常重要的作用，数学学科对计算机科学的发展产生了很重要的影响.傅里叶级数在数字信号处理中得到广泛的应用，把信号从时域转化到频域上并分析其频率与相位的变化关系，傅里叶级数的发现在数字信号处理发展史上具有里程碑的作用；矩阵的低秩逼近在机器学习和模式识别的应用中大大降低了数据特征的维数，节省了存储和计算资源；稀疏矩阵在海域监测、国家领空监测中也具有重要应用；离散数学的数理逻辑中的命题与逻辑演算发展而来的数字逻

辑被广泛应用到计算机程序硬件中;数据结构中的图和树这两个重要概念由离散数学中的图论理论引出;组合数学如 Ramsey 数在信息检索、分组交换网设计等计算机科学领域中有很重要的应用.

随着现代计算机的飞速发展、社会的进步,人们已经逐渐步入信息技术时代.数学作为一门基础课程,在计算机领域有着十分重要的地位,使用相关的数学知识可以解决计算机中的相关算法问题.

1.3 数学建模初步

1.3.1 数学模型的概念

人们在学习和生活中,为了更好地分析和研究客观对象的内在规律,常常需要设计和抽象出其相应的模型,它在我们周围随处可见,如钢铁厂展览室中的炼钢转炉模型,房地产公司售楼处常见的售楼沙盘,博物馆中飞机、轮船等实物模型.为了描述事物的某些特征和内在规律,也经常用图表、公式、符号、文字的形式来描述事物的模型,如地图、电路图、化学结构式等.

微课:数学建模的基本概念

模型是指为了某个特定目的将原型的某一部分信息减缩、提炼而构造的原型替代物.为了便于利用模型解决问题,需要对原有问题进行简化,分离出人们所关注系统的主要特征和要素,从而进一步分析、处理其内在关系,并对实际效果进行观测和分析.

这里主要讨论的是数学模型.数学模型是为了某种目的,根据特有的内在规律,做出必要的简化假设,运用数字、字母及其他恰当的数学工具,得到的(不)等式、图表等数学结构.

1.3.2 数学建模的过程

数学建模面临的实际问题多种多样,没有适用一切实际问题的数学建模方法和模式,具体方法与问题的性质、建模的目的等有关.但在建模过程中大致需要以下几个阶段.

1. 调研

建模前首先要做好建模的准备,即首先明确建模的目的,了解实际问题的背景,做好对问题深入细致的调查研究,搜集必要的信息(如数据等).模型建立的好坏依赖于对问题的理解和认识的程度.

2. 问题的提出和转化

提出问题、将实际问题转化为数学问题是解决问题的关键.问题的提出和转化是面对实际的研究对象,在分析和整理搜集资料的基础上,弄清所研究问题的来龙去脉,抓住问题的本质和主要特征,弄清问题的层次及问题的主要部分和次要部分,确定建模的已知、目标和类型,将实际问题转化为一个比较清晰的数学问题.

3. 实际问题的简化假设

实际问题常常是错综复杂且杂乱无章的，是质与量、现象与本质、偶然与必然的统一体. 如果不对其进行抽象、简化，而把它的众多因素都考虑进去，就可能无法继续下一步的建模工作，或者建立的模型太复杂，求解困难，影响应用. 建模时必须根据建模对象的特征和建模目的，抓住问题的关键和主要因素，忽略其次要的、非本质因素，使之摆脱原型的具体复杂形态，将实际问题进行必要的简化处理，做出合理的、必要的假设. 模型假设过于简单或不符合实际，将导致模型错误或无法使用. 因此，对实际问题做出合理的假设是建模的基础、前提，是为下一步建立模型服务的.

4. 模型建立

根据模型假设，利用适当的数学工具和相关领域的知识，通过联想和创造性思维及严密的推理，最终形成描述所研究对象的数学结构. 建立数学模型需要注意以下几点.

1)量的分析和处理

根据建模的目的，分析研究对象所涉及的量的内在关系及它们的地位、作用，分清主次. 建模时要注意抓住问题的本质，简化变量间的关系. 在研究变量关系时，数据的变换和处理是其重要的方法之一，通过数学软件绘图制表，结合变量间的关系进行分析，从而进一步明确变量间的关系.

2)数学工具的选择

对于变量要分析其类型. 往往对确定型变量，建模时采用初等数学、微积分、微分方程、线性规划、非线性规划、投入产出、确定性存储等数学工具；而对于随机型变量，多用概率论、统计、随机型确定性存储、排队论等数学工具；对于变量是离散型取值的，往往采用层次分析、模拟等数学工具. 数学工具的选择应遵循一个原则：尽量选择简单的数学工具，模型越简单越便于模型的使用和推广.

3)建模要有严密的推理

在建模中，使用逻辑推理应注意保证其严密性，这样才能保证所推出的数学结构的正确性.

4)建模要有足够的精度

模型假设虽然忽略了其次要因素，但建立的模型要有足够的精度，既能把问题的本质和内容反映出来，又要注意反映现实的真实度.

5. 模型的求解

根据不同的模型需采用不同的数学工具进行求解. 利用 Excel、Mathematica、Matlab、LINGO、SPSS 等软件，可对模型进行方程求解、绘图分析、数字计算、统计分析、优化求解等，有时也要进行高级语言的编程.

6. 模型的分析和检验

模型分析是根据建模的目的要求，对模型结果进行数学上的分析，如结果的误差分析、统计分布、模型对数据的灵敏度分析或稳定性分析.

结合实际问题对模型进行合理性分析，把求解结果返回到客观实际中去检验，常常是用实验或问题提供的信息进行检验. 若理论数据与实际数据比较吻合，则可以认为模型比较成功. 对于预测模型，要检验是否达到了精度要求. 若考察结果不符合要求，须检查和修改，并重新建模.

7. **模型应用**

数学建模的应用十分广泛，越来越受到各行业的普遍重视. 例如，航天、微电等高新技术产业，电力、化工、冶炼等生产过程最优控制，经济产值及气象、人口的预测以及一些新的交叉学科领域（计量经济学、数学地质学等），数学建模几乎是必不可少的工具. 数学建模在科学的决策和计划的统筹安排中起着至关重要的作用，对促进科学技术和工农业发展具有重要意义.

以上提出数学建模的几个阶段和步骤之间有着密切的联系，是一个统一体，不能严格区分开. 在建模过程中应根据具体情况具体分析，灵活运用，反复运用. 建模过程可以写成图 1-1 所示的流程图.

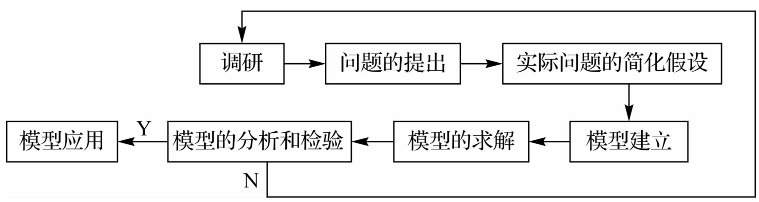


图 1-1

第 2 章

一元函数微分学

价值作用

微分学是建立在实数、函数、极限、连续性等一组基本概念之上的. 建立微分学所用的分析方法对整个数学的发展产生了深远的影响,被运用到许多数学分支中,并渗透到自然科学与技术科学等众多领域. 在计算机图形图像处理等方面,微分学“化曲为直”的思想有着极其重要的意义.

学习目标

《 知识目标 》

- 理解函数、极限与连续的概念及性质.
- 记忆间断点的概念与类型.
- 理解初等函数的连续性.
- 记忆闭区间上连续函数的性质.
- 理解导数的概念,会求一般函数的导数.
- 理解极值的概念.
- 理解无穷级数的概念,理解泰勒展开公式.
- 理解牛顿下山法求极值的算法.

《 能力目标 》

- 能运用函数描述实际问题.

- 进行由实际问题抽象为数学模型能力的初步训练.

《 **素质目标** 》

- 建立数形结合的数学思想,体会数与形的完美统一,领悟数学与自然的和谐美.
- 理解事物之间相互联系和相互制约的辩证唯物主义观点.
- 培养逻辑思维能力和缜密思考的习惯.

名人说

学习数学要多做习题,边做边思索.先知其然,然后知其所以然.

——苏步青

微分学的创立是数学史上最重要的事件之一.微分学主要是从微观角度分析客观世界中量的变化.本章主要介绍函数、极限、连续性、导数、微分与级数的基本概念及其应用.

2.1 集合与函数

2.1.1 集合与区间

集合是近现代数学最基本的内容之一.集合的概念及其理论,称为集合论,是近现代数学的一个重要基础.

1. 集合

具有某种共同属性或特征的对象的全体称为**集合**.

集合常用大写字母 A、B、C 等表示;组成集合的每一个对象称为该集合的**元素**,常用小写字母 a、b、c 等表示.

设 A 是一个集合,若 a 是 A 的元素,则称 a 属于 A,记作 $a\in A$;若 a 不是 A 的元素,则称 a 不属于 A,记作 $a\overline{\in}A$ 或 $a\notin A$.

如果集合只包含有限个元素,则称这样的集合为**有限集合**;反之,则称其为**无限集合**.

由数组成的集合称为**数集**.常用的数集及其符号如表 2-1 所示.

表 2-1

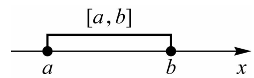
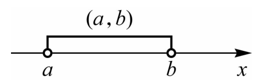
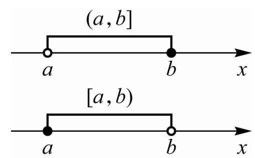
数　　集	自然数集	整数集	有理数集	实数集
符　　号	**N**	**Z**	**Q**	**R**

常见的集合运算有交和并.设 A 和 B 是两个集合,把属于 A 且同时属于 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**,记作 $A\cap B$,即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$;把至少属于 A、B 之一的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的**并集**,记作 $A\cup B$,即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

2. 区间

区间是实数集的又一种表示形式，在数轴上是指介于某两点之间的线段上点的全体. 常见区间及其表示如表 2-2 所示.

表 2-2

区间的名称	区间满足的不等式	区间记号	区间在数轴上的表示
闭区间	$a\leqslant x\leqslant b$	$[a,b]$	
开区间	$a<x<b$	(a,b)	
半开区间	$a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$	$(a,b]$或$[a,b)$	

区间可分为两种类型，表 2-2 所示区间为**有限区间**，$b-a$ 称为区间的长度；而$(-\infty,+\infty)$、$[a,+\infty)$、$(a,+\infty)$、$(-\infty,b]$、$(-\infty,b)$等称为**无限区间**.

2.1.2　函数的概念及性质

1. 函数的概念

定义 2-1　设 x、y 是两个变量，D 是 $\mathbf{R}$ 的一个非空子集. 对于任意的 $x\in D$，通过对应关系 f，变量 y 都有唯一确定的实数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**，记为

$$y=f(x),x\in D,$$

其中，x 为自变量，y 为因变量，D 为函数的定义域，f 为函数关系. y 在 x_0 处的函数值记为 $f(x_0)$或$y|_{x=x_0}$；函数值的集合为函数的值域，记为 $f(D)$.

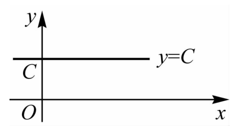
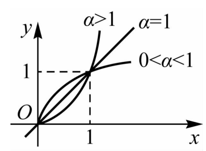
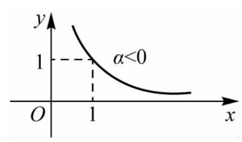
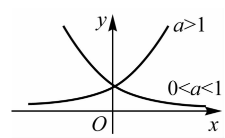
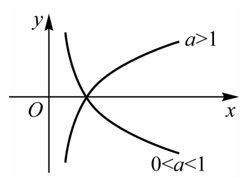
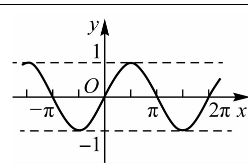
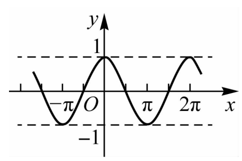
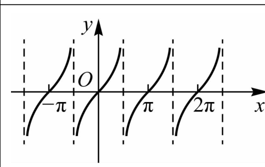
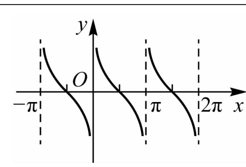
注意：定义域 D 和函数关系 f 是函数的两个要素，当函数的两个要素都相同时，即为同一个函数. 例如，函数 $y=\sqrt{x^2}$ 和 $y=|x|$ 的定义域和函数关系都相同，所以是同一函数；而函数 $y=\ln x^2$ 和 $y=2\ln x$ 尽管函数关系相同，但定义域不同，因而是两个不同的函数.

2. 函数关系

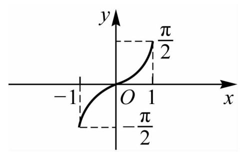
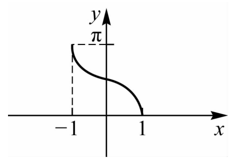
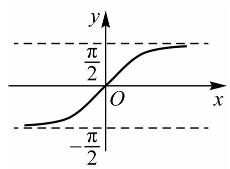
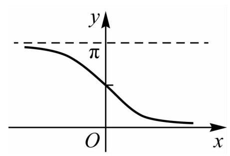
函数关系的表示方法有图形法、表格法和解析式法，下面介绍解析式法表示函数关系的常见类型.

(1)基本初等函数. 相关内容如表 2-3 所示.

表 2-3

名　称	表达式	定义域和值域	图　形	主要特征
常数函数	$y=C$	$x\in(-\infty,+\infty)$		平行于 x 轴，纵截距为 C 的直线
幂函数	$y=x^{\alpha}$ ($\alpha\neq0$ 且为常数)	依 α 不同而异		曲线过点 $(1,1)$，$\alpha>0$ 时函数单调增加
				曲线过点 $(1,1)$，$\alpha<0$ 时函数单调减少
指数函数	$y=a^{x}$ ($a>0$ 且 $a\neq1$)	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		曲线过点 $(0,1)$，$0<a<1$ 时函数单调减少，$a>1$ 时函数单调增加
对数函数	$y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq1$)	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		曲线过点 $(1,0)$，$0<a<1$ 时函数单调减少，$a>1$ 时函数单调增加
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，有界，周期为 2π
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，有界，周期为 2π
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，无界，周期为 π，在每个区间 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ 内单调增加
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，无界，周期为 π，在每个区间 $(k\pi,\pi+k\pi)$ 内单调减少

续表

名　　称	表 达 式	定义域和值域	图　　形	主要特征
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$		奇函数，有界，过原点，递增函数
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		有界，递减函数
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$		有界，过原点，递增函数
	$y=\text{arccot}\, x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		有界，递减函数

(2)复合函数. 在实际问题中，有时两个变量之间的联系是通过另外的变量实现的. 例如，出租车的车费 y 是里程 s 的函数，里程 s 又是时间 t 的函数，即车费 y 也是时间 t 的函数. 这种函数关系称为复合函数关系.

定义 2-2　设 y 是 u 的函数，$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数，$u=\varphi(x)$，通过 u 将 y 表示为 x 的函数，则称 y 是 x 的复合函数，记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中，u 为中间变量.

注意：不是任意两个函数都能构成复合函数，如 $y=\arcsin u$ 和 $u=2+x^2$ 就不能构成一个复合函数，因为对于 $u=2+x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内的任意 x 值所对应的 u，都不能使 $|u|\leqslant 1$ 成立，所以 $y=\arcsin(2+x^2)$ 没有意义.

另外，复合函数的中间变量可以不止一个，例如，$y=u^2$，$u=\sin v$，$v=2x$ 可以复合成函数 $y=\sin^2 2x$，u、v 都是中间变量.

例 1　指出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=(1-x)^3$；　　(2) $y=\sin 2x$；　　(3) $y=3^{\tan 2x}$.

解　(1) $y=(1-x)^3$ 由 $y=u^3$，$u=1-x$ 复合而成；

(2) $y=\sin 2x$ 由 $y=\sin u$，$u=2x$ 复合而成；

(3) $y=3^{\tan 2x}$ 由 $y=3^u$，$u=\tan v$，$v=2x$ 复合而成.

例 2 已知 $f(x-1)=x^3-x+1$，求 $f(x)$.

解 设 $x-1=u$，则 $x=u+1$，于是

$$f(u)=(u+1)^3-(u+1)+1=u^3+3u^2+2u+1,$$

因此

$$f(x)=x^3+3x^2+2x+1.$$

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合过程并用一个式子表示的函数称为**初等函数**. 本教材所涉及的函数绝大多数是初等函数.

(3)分段函数. 在定义域的不同范围内对应不同的函数解析式的函数称为**分段函数**.

例如，符号函数 $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, x>0\\0, x=0\\-1, x<0\end{cases}$，绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0\\-x, x<0\end{cases}$.

符号函数是非初等函数，但绝对值函数可表示为一个解析式 $y=|x|=\sqrt{x^2}$，故它是初等函数.

微课：函数定义域

3. 函数的定义域

函数的定义域是使函数解析式有意义时自变量所取的实数的集合.

小贴士

在不考虑实际意义的情况下，求函数定义域可从以下方面考虑.

(1)分式的分母不为零.

(2)对数的真数大于零.

(3)偶次根式下式子非负.

(4)正切符号下式子不等于 $\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$；余切符号下式子不等于 $k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

(5)反正弦、反余弦符号下式子的绝对值小于等于 1.

(6)若函数由若干部分组成，则该函数的定义域为各部分定义域的交集.

例 3 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$；　(2) $f(x)=\frac{1}{x-1}$；　(3) $y=\ln(1-x)+\sqrt{x+4}$.

解 (1)要使函数有意义，应满足 $4-x^2\geqslant 0$，即 $x^2\leqslant 4$，故函数的定义域是 $[-2,2]$.

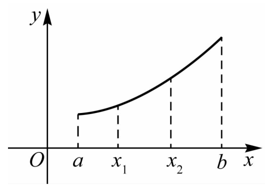
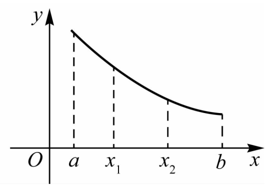
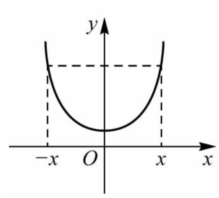
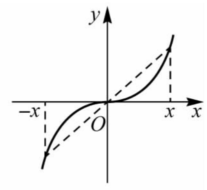
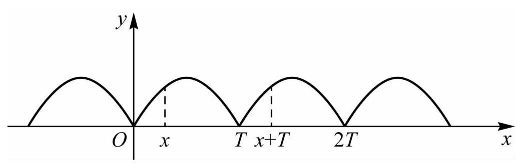
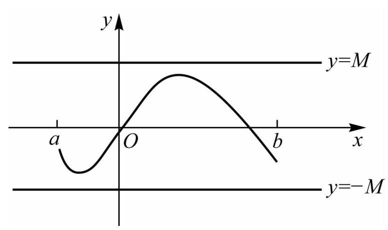
(2)要使函数有意义，应满足 $x-1\neq 0$，即 $x\neq 1$，故函数定义域是 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

(3)要使函数有意义，应满足 $\begin{cases}1-x>0\\x+4\geqslant 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x<1\\x\geqslant -4\end{cases}$，故函数的定义域是 $[-4,1)$.

4. 函数的性质

函数的几种常用性质及几何图形意义如表 2-4 所示.

表 2-4

性　　质	概　　念	几何图形意义
单调性	函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，对于任意 $x_1<x_2\in(a,b)$，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内为单调增（或递增）函数；若有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内为单调减（或递减）函数	 
奇偶性	设函数 $y=f(x)$ 的定义区间 D 内关于原点对称，对任意 $x\in D$，若有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为偶函数；若有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为奇函数	 
周期性	设 T 为一个非零实数，若函数 $y=f(x)$ 对其定义域内任意 $x\in D$，且 $x+T\in D$，都有 $f(T+x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 是周期函数. 使 $f(T+x)=f(x)$ 成立的最小正数 T，称为函数 $y=f(x)$ 的周期	
有界性	设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在一个正数 M，使得对于任意 $x\in(a,b)$，不等式 $\|f(x)\|\leqslant M$ 恒成立，则称 $y=f(x)$ 是有界函数，即 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界；如果这样的正数 M 不存在，则称 $y=f(x)$ 是无界函数，即 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内无界	

5. **函数模型**

运用数学工具解决实际问题往往需要先找出问题中变量之间的函数关系，即建立数学模型，然后对它进行研究，这是解决实际问题的重要一步. 至于如何建立函数关系，并无一定的法则可循，只能根据具体问题进行具体分析. 值得注意的是，对于这类应用问题的函数定义域，除函数的解析式外还要考虑变量的实际意义.

下面通过几个实例介绍如何建立函数关系，为以后运用微积分方法解决实际问题打下一些基础.

例 4　要制作一个底为正方形，容积为 100 m^3 的长方体开口容器，试将容器的表面积表

示为底面边长的函数.

解 如图 2-1 所示,设容器的底面边长为 x(m),高为 h(m),则容器的表面积为

$$S=x^2+4xh(\mathrm{m}^2)$$

由于容器的容积为 100 m³,即 $x^2h=100\ \mathrm{m}^3$,由此得 $h=\dfrac{100}{x^2}$(m),所以容器的表面积与底面边长的函数关系为

$$S=x^2+\frac{400}{x}(\mathrm{m}^2),x\in(0,+\infty)$$

例 5 设圆桌的半径为 a,在桌面中心的上方挂一电灯,电灯距桌面的高低直接影响电灯照射圆桌边缘的亮度(见图 2-2). 如果电灯对圆桌边缘的照度为 $I=K\dfrac{\sin\varphi}{r^2}$,$K$ 为常数,试将照度 I 表示为电灯与桌面的距离 x 的函数.

解 由于 $\sin\varphi=\dfrac{x}{r}$,$r=\sqrt{x^2+a^2}$,所以有

$$I=K\frac{\sin\varphi}{r^2}=K\frac{x}{r^3}=\frac{Kx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}},x\in(0,+\infty).$$

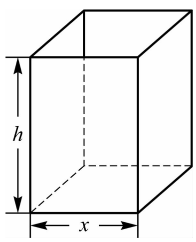


图 2-1

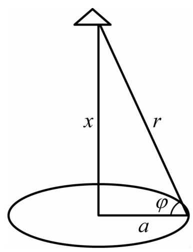


图 2-2

习题 2.1

1. 下列各题中的两个函数是否表示同一函数? 为什么?

(1) $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ 和 $y=x-2$;

(2) $y=\sin x$ 和 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$;

(3) $y=|x-1|$ 和 $y=\begin{cases}x-1,x\geqslant 1\\1-x,x<1\end{cases}$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$;

(2) $y=\dfrac{x}{x^2-x-2}$;

(3) $y=\dfrac{\sqrt{2+x}}{\ln(1-x)}$;

(4) $y=\arcsin\dfrac{x+1}{3}$.

3. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=(x^2+1)\cos x$；　　(2) $f(x)=2^x-2^{-x}$；

(3) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$；　　(4) $f(x)=\dfrac{x\cos x}{x^2+1}$.

4. 指出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=(1+2x)^8$；　　(2) $y=\ln\tan x$；

(3) $y=\sin^5 x$；　　(4) $y=\sqrt{\tan\dfrac{x}{3}}$；

(5) $y=\mathrm{e}^{\sqrt{2x+1}}$；　　(6) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\ln(x^2+1)}}$.

5. 已知 $f(x)=\begin{cases}2^x, x\leqslant 0\\ x-1, x>0\end{cases}$，求 $f(-3)$、$f(3)$、$f(0)$.

2.2 极限与连续

2.2.1 函数的极限

从本质上说，极限是一种数学思想，后面将学习的微积分都是通过极限来定义的. 函数的极限与自变量的变化趋势有着密切的关系，本节主要研究自变量的绝对值趋于无穷大($|x|\to\infty$)和自变量趋于某常数($x\to x_0$)时函数的极限.

1. 当 $|x|\to\infty$ 时函数的极限

考察 $|x|\to\infty$（x 的绝对值无限增大）时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势（见图 2-3）.

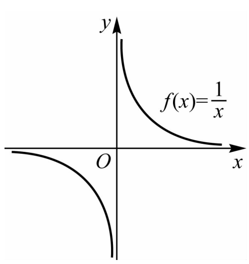


图 2-3

由图 2-3 可以看出，当 x 的绝对值无限增大时，$f(x)$ 的值无限接近零. 对于这种当 $|x|\to\infty$ 时函数的变化趋势，给出如下定义.

定义 2-3　当自变量 x 的绝对值无限增大，即 $|x|\to\infty$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近唯一确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $|x|\to\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A$$

或

$$f(x)\to A(x\to\infty).$$

注意:定义中自变量 x 的绝对值无限增大是指 x 既可以取正值无限增大(记为 $x\to+\infty$),也可以取负值而绝对值无限增大(记为 $x\to-\infty$).有时 x 的变化趋势只能或只需两种变化中的一种,即定义中的 $x\to\infty$ 可以换成 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时的情形.

一般地,有

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

如图 2-3 所示,有 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$,故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

例 1 求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty} e^x$.

解 如图 2-4 所示,$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$,$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$ 不存在,所以 $\lim\limits_{x\to\infty} e^x$ 不存在.

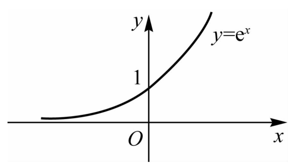


图 2-4

2. 当 $x\to x_0$ 时函数的极限

定义 2-4 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 近旁有意义,当自变量 x 无限接近 x_0 时,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近唯一确定的常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**极限**,记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$$

或

$$f(x)\to A(x\to x_0).$$

特别地,当自变量 x 从 x_0 的左侧(右侧)无限接近 x_0 时,函数值无限接近唯一确定常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**左极限(右极限)**,记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A,\ \lim_{x\to x_0^+} f(x)=A.$$

一般地,有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A.$$

例 2 观察函数图形求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x$; (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

动画:函数在 x_0 点的变化

解 (1)由图 2-5 可知,无论 x 从大于零的方向还是从小于零的方向趋于 0,$\sin x$ 的值总是无限趋于 0,因此有 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$.

(2)函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

虽然函数在 $x=1$ 处无定义,但由图 2-6 可知,无论自变量 x 从小于 1 还是大于 1 的方向趋于 1,函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的值总是趋于 2,因此有 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

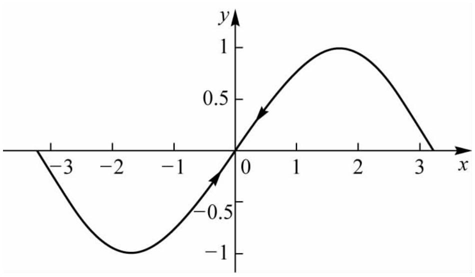


图 2-5

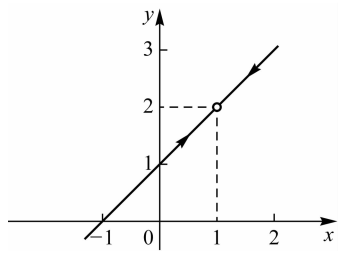


图 2-6

小贴士

在例 2 的(1)中,$\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$,即 $\sin x$ 在 $x\to0$ 时的极限与 $\sin x$ 在 $x=0$ 时的函数值恰好相等;(2)中函数尽管在 $x=1$ 处无定义,但当 $x\to1$ 时,函数的极限依然存在. 可见,函数在 x_0 点处的极限情况与该点处的函数值情况是无关的.

例 3 求符号函数 $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, x>0\\0, x=0\\-1, x<0\end{cases}$ 当 $x\to0$ 时的极限.

解 如图 2-7 所示,$\operatorname{sgn} x$ 在 $x=0$ 处的左极限为 $\lim\limits_{x\to0^-}\operatorname{sgn} x=\lim\limits_{x\to0^-}(-1)=-1$,右极限为 $\lim\limits_{x\to0^+}\operatorname{sgn} x=\lim\limits_{x\to0^+}1=1$. 因为 $\lim\limits_{x\to0^-}\operatorname{sgn} x\neq\lim\limits_{x\to0^+}\operatorname{sgn} x$,所以 $\lim\limits_{x\to0}\operatorname{sgn} x$ 不存在.

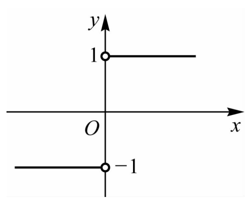


图 2-7

微课:无穷大量与无穷小量

2.2.2 无穷小量和无穷大量

1. 无穷小量

定义 2-5 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,若函数 $f(x)$ 的极限为零,则称 $f(x)$ 为当

$x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的**无穷小量**,简称**无穷小**.

注意:无穷小量是极限为零的变量,如$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$,$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$,$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$,所以 x^2 是 $x\to 0$ 时的无穷小,$x-1$ 是 $x\to 1$ 时的无穷小,$\frac{1}{x}$是 $x\to\infty$时的无穷小.

特别地,常数零是任意自变量变化趋势下的无穷小.

> **小贴士**
>
> 无穷小具备如下性质.
>
> (1)有限个无穷小的代数和仍是无穷小.
>
> (2)有界函数与无穷小的乘积是无穷小.
>
> (3)有限个无穷小的乘积仍是无穷小.

2.无穷大量

定义 2-6 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,若函数绝对值$|f(x)|$无限增大,则称 $f(x)$为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的**无穷大量**,简称**无穷大**,记为∞;若函数 $f(x)$ 大于零且无限增大(或小于零但绝对值无限增大),则称 $f(x)$为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的**正**(或**负**)**无穷大**,记为$+\infty$(或$-\infty$).

动画:无穷大

例如,$\frac{1}{x}$是当 $x\to 0$ 时的无穷大,e^x 是当 $x\to+\infty$时的正无穷大.

3.无穷小与无穷大的关系

无穷小与无穷大之间存在着密切的关系,即在自变量的同一变化过程中,若 $f(x)$是无穷大,则$\frac{1}{f(x)}$是无穷小;反之,若 $f(x)$是非零常数的无穷小,则$\frac{1}{f(x)}$是无穷大.

例 4 下列函数当自变量怎样变化时是无穷大?

(1)$y=\frac{1}{x+1}$;　　　　(2)$y=\ln x$.

解 (1)因为 $\lim\limits_{x\to -1}(x+1)=0$,所以 $x\to -1$ 时 $x+1$ 为无穷小,所以$\frac{1}{x+1}$为 $x\to -1$ 时的无穷大.

(2)因为 $x\to+\infty$时,$\ln x\to+\infty$,$x\to 0^+$时,$\ln x\to-\infty$,所以当 $x\to+\infty$和 $x\to 0^+$时,$\ln x$ 都是无穷大.

2.2.3 极限的运算

1.四则运算法则

在自变量的同一变化过程中,若有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B.$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B.$

特别地，$\lim\limits_{x\to x_0}[kf(x)]=k\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=kA$，

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^k=[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]^k=A^k$（$k$ 为常数）.

(3) 当 $B\neq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}.$

注意：上述运算法则对于 $x\to\infty$ 等其他变化过程同样成立，且此法则只适用于有限个函数，不适用于无穷多项.

例 5 求$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-3)$.

解
$$\lim_{x\to 2}(x^2+2x-3)=\lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}2x-\lim_{x\to 2}3=(\lim_{x\to 2}x)^2+2\lim_{x\to 2}x-3=2^2+2\times 2-3=5.$$

结果表明，多项式函数 $f(x)$ 在 x_0 处的极限就等于该函数在 x_0 处的函数值，即有
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

例 6 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+5}{x^2+3}$.

解 由于$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3)=1^2+3=4\neq 0$，由商的极限运算法则，得
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+5}{x^2+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+5)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3)}=\frac{4}{4}=1.$$

例 7 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

解 因为分子、分母的极限都为零（称为“$\dfrac{0}{0}$”型），所以不能运用商的极限运算法则直接求极限. 由于分子、分母都有公因子 $x-1$，而 $x\to 1$ 时，意味着$x\neq 1$，分子、分母可约去这个不为零的因子，所以有
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2.$$

微课：极限计算：零比零型

微课：极限计算：无穷比无穷型

例 8 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+5}{6x-8}$.

解 因为分子、分母的极限都为∞（称为“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型），所以不能运用商的极限运算法则直接求极限. 将分子分母同时除以 x，即有
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{6x-8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\dfrac{5}{x}}{6-\dfrac{8}{x}}=\frac{1}{2}.$$

小贴士

多项式函数的商的形式称为有理分式函数.

当 $x\to\infty$ 时，有理分式函数分子、分母的极限都是 ∞，称为“$\frac{\infty}{\infty}$”型，其极限有以下结果.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+a_m}=\begin{cases}0, n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0}, n=m\\ \infty, n>m\end{cases}\ (a_0\neq 0, b_0\neq 0).$$

2. **两个重要极限**

两个重要极限在极限计算中有着十分重要的作用，它们的基本形式如下.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

在应用两个重要极限时，常用到它们的广义形式，即

(1) $\lim\limits_{f(x)\to 0}\dfrac{\sin[f(x)]}{f(x)}=1$.

(2) $\lim\limits_{f(x)\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{f(x)\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}$.

动画：lim 的几何意义

动画：lim… 的意义

例 9 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x^2}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5\right)=5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=5$.

(2)
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{2x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2x^2(1+\cos x)}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^2}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{4}.$$

微课：第一个重要极限

例 10 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot 3}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}]^3=\mathrm{e}^3$.

微课：第二个重要极限

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}\cdot(-2)}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right]^{(-2)}=\mathrm{e}^{-2}$.

2.2.4 函数的连续性

微课：函数的连续性

函数的连续性是一个非常重要的概念，它反映了现实世界中事物渐变的特性. 例如，植物随时间逐渐生长，地球绕太阳连续公转，冰山由于温室效应渐渐融化，这些现象在函数关系上的反映就是函数的连续性.

定义 2-7 设函数 $f(x)$在点 x_0 处及近旁有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$在点 x_0 处**连续**.

由定义可见，函数在点 x_0 处连续必须满足三个条件.

(1) $f(x)$在点 x_0 处有定义.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

显然，函数 $f(x)$在点 x_0 处连续，则 $f(x)$在点 x_0 处的极限必存在；反之，未必.

小贴士

函数 $f(x)$在点 x_0 处连续的条件$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$还可以这样表示：设函数 $f(x)$的自变量从 x_0 变到 x，并记 $\Delta x=x-x_0$，称 Δx 为自变量 x 的增量；此时，相应的函数值从$f(x_0)$变到 $f(x)$. 类似地，记 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$，称 Δy 为函数值 $f(x)$的增量，于是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$等价于$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，表明当自变量的增量 Δx 趋于零时，函数值 $f(x)$的增量 Δy 也趋于零，则函数 $f(x)$在点 x_0 处连续. 其直观意义为：自变量改变一点点，函数值也改变一点点.

特别地，若函数 $f(x)$在点 x_0 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$在点 x_0 处**右连续**；若函数 $f(x)$在点 x_0 处有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$在点 x_0 处**左连续**.

若函数 $f(x)$在开区间(a,b)内的每一点都连续，则称函数 $f(x)$**在开区间**(a,b)**内连续**.

若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上有定义，在开区间(a,b)内连续，且在区间左端点 $x=a$ 处右连续，在区间右端点 $x=b$ 处左连续，则称函数 $f(x)$**在闭区间**$[a,b]$**上连续**.

例 11 试判断函数 $f(x)=2x^3+x$ 在 $x=1$ 处的连续性.

解 因为$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(2x^3+x)=3=f(1)$，所以函数 $f(x)$在 $x=1$ 处连续.

例 12 试判断函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0\\ \dfrac{\sin x}{x}, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)=1$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$，所以 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，于是 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1=f(0)$，故函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

1. 初等函数的连续性及性质

在定义区间内基本初等函数是连续的. 连续函数的四则运算与复合运算在定义域区间内也是连续的，故初等函数在其定义区间内也是连续的. 因此，初等函数在一点处的极限值即为该点处的函数值.

例 13 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{1+x^3}$； (2) $\lim\limits_{x\to0}e^{\sin x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{1+x^3}=\sqrt{1+x^3}\Big|_{x=1}=\sqrt{1+1^3}=\sqrt{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}e^{\sin x}=e^{\sin x}\Big|_{x=0}=e^0=1$.

2. 函数的间断点

不满足函数连续性的点称为**间断点**，即间断点有以下三种情形.

(1) $f(x)$ 在点 x_0 处无定义.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

微课：函数的间断点

其中，当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的左、右极限都存在的间断点称为**第一类间断点**，除此以外的间断点称为**第二类间断点**. 特别地，左、右极限都存在且左、右极限不相等的间断点称为**跳跃间断点**，左、右极限都存在且相等（函数极限存在）的间断点称为**可去间断点**.

例 14 求下列函数的间断点并判断类型.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$； (2) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ x-1, & x\geqslant0\end{cases}$； (3) $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\neq1\\ 1, & x=1\end{cases}$.

解 (1) 函数在 $x=-2$ 处无定义，故函数在 $x=-2$ 处间断，且因 $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=\infty$，极限不存在，故 $x=-2$ 为第二类间断点.

(2) 函数有定义，$f(0)=-1$，但 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在，故函数在 $x=0$ 处间断，$x=0$ 为第一类间断点，且为跳跃间断点.

(3) 函数有定义，$f(1)=1$，但 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$，即 $\lim\limits_{x\to1}f(x)\neq f(1)$，故函数在 $x=1$ 处间断，$x=1$ 为第一类间断点，且为可去间断点.

3. 闭区间上连续函数的性质

闭区间上连续函数的图形是一条不断开且有端点的曲线，有如下重要性质.

最值性 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它在闭区间上必有最大值和最小值.

介值性 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，m、M 分别是其最小值和最大值，则对于 m 与 M 之间的任意数 C，在区间 (a,b) 内至少存在一点 x_0，使得 $f(x_0)=C$.

如图 2-8 所示，函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，过 y 轴上 m 与 M 之间的任意一点$(0,C)$画一条与 x 轴平行的直线 $y=C$，该直线与函数 $f(x)$的图形至少交于一点(ξ,C)，其中 $a<\xi<b$.

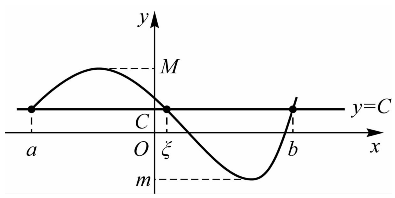


图 2-8

定理 1(零点定理) 若函数 $y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则在区间(a,b)内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

如图 2-9 所示，满足条件的函数 $f(x)$的图形是一条连续的曲线，且曲线的两端分别位于 x 轴的上、下两侧，因此，它至少要和 x 轴相交一次. 若记交点的横坐标为 ξ，则 $f(\xi)=0$.

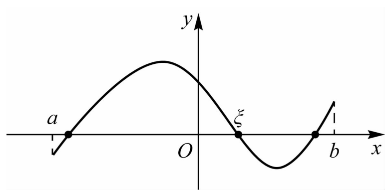


图 2-9

例 15 证明方程 $x^3-4x+1=0$ 在区间$(0,1)$内至少有一个实根.

证明 设 $f(x)=x^3-4x+1$，显然 $f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续；又 $f(0)=1>0$，$f(1)=-2<0$，所以由零点定理可知，在区间$(0,1)$内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$，即

$$\xi^3-4\xi+1=0,$$

所以方程 $x^3-4x+1=0$ 在区间$(0,1)$内至少有一个实根.

小背景

零点定理最直接的一个应用是求解一元方程根的二分法.

在中学，大家已经知道一次、二次代数方程以及某些特殊的高次方程或超越方程的解法. 这些解法都是代数解法，也称精确解法. 实际上，三次、四次代数方程也存在求解公式，但不实用，而一般的五次或五次以上的代数方程已经被证明根本没有求根公式. 在工程实践中，有许多方程问题也都是没有精确解法的. 这样一来，需要寻找一些满足实际应用精度的近似解法，而二分法是最基本的一种求解方程根的近似算法，其思路是：先将方程根所在的区间平分为两个小区间，再判断根属于哪个小区间；把有根的小区间再平分为二，判断根所在的更小的区间……重复这一过程，如果取含根的区间中点作为根的近似值，其误差不超过含根区间长度的一半，即得所需要的根的近似值.

习题 2.2

1. 利用四则运算法则计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+1}{x+2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+4}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3}{x^3+2x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-2}{3x^2-4x+1}$.

2. 利用两个重要极限公式计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

3. 指出下列函数的间断点.

(1) $y=\dfrac{1}{x}$；　　(2) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$；

(3) $y=\begin{cases}2^x, x\geqslant 0\\ x, x<0\end{cases}$；　　(4) $y=\begin{cases}\cos x, x>0\\ 0, x=0\\ x+1, x<0\end{cases}$.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, x<0\\ a+x, x\geqslant 0\end{cases}$，试确定 a 值，使 $f(x)$ 在其定义域内连续.

5. 证明方程 $x^2+x=1$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

闯关题：函数、极限与连续

2.3 导数与微分

2.3.1 导数的概念

在现实生活中，许多量是非均匀变化的. 量的变化快慢也称为变化率，研究非均匀变化量的变化率问题有着广泛的实际意义. 导数本质上表达的是函数相对于自变量的变化率.

1. 变化率问题

1)引例 1：曲线的切线斜率

曲线 $y=f(x)$ 在点 $A(x_0, y_0)$ 处的切线是指过点 A 的一条割线 AB 当点 B 沿曲线趋近 A 时的极限位置，如图 2-10 所示.

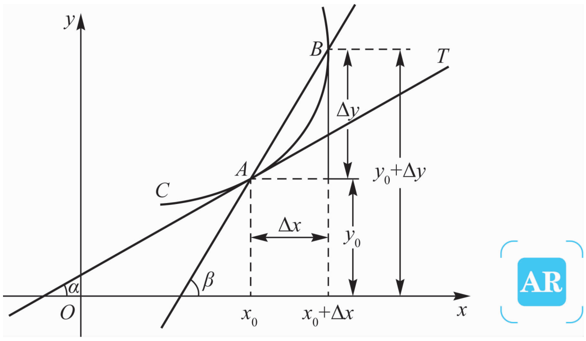


图 2-10

(1)求近似.在曲线 C 上 A 点的附近取一点 $B(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$,则过点 A、B 两点割线的斜率为

$$k_{割}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

(2)求极限.显然,当 $\Delta x\to 0$ 时,$k_{割}\to k_{切}$,所以有

$$k_{切}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

2)引例 2:变速直线运动的瞬时速度

某质点做直线运动,其位移时间函数为 $s=s(t)$,求质点在时刻 t_0 的瞬时速度 v.

(1)平均速度.时间从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 时,物体经过的路程 $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$,于是平均速度为

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

(2)瞬时速度.当 $\Delta t\to 0$ 时,平均速度 $\bar{v}$ 的极限值就是该点的瞬时速度 v,即

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

上述两个问题的实际意义不同,但特殊结构的极限在许多实际问题中都有着广泛的应用,这种类型的极限称为导数.由于它描述的是一个变量对于另一个变量的变化快慢,又俗称变化率问题.

小背景

与第 3 章将要学习的积分学相比,微分学的起源要晚很多.刺激微分学发展的主要科学问题是求曲线的切线、求瞬时变化率以及求函数的极大值(极小值)等(这些问题也称为微分学基本问题).其中,对于求曲线的切线问题,很多著名数学家都研究过,包括阿基米德、笛卡儿、费马等.

2.导数的概念

定义 2-8 设函数 $y=f(x)$在 x_0 处及近旁有定义,当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx 时,

相应的函数取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称 $f(x)$ 在 x_0 处可导，并称该极限为 $f(x)$ 在 x_0 处的**导数(或变化率)**，记作 $f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

微课：导数的定义

函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数还可记为

$$y'\Big|_{x=x_0},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}\text{或}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}.$$

动画：何时导数不存在

若函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内任意一点 x 都可导，即对于任意一点 $x\in(a,b)$，都有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

则 $f'(x)$ 是一个关于 x 的函数，称为 $f(x)$ 的**导函数**，简称**导数**，记作

$$y',f'(x),\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\text{或}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}.$$

注意：导函数 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 的关系就是函数与函数值的关系，$f'(x_0)$ 是导函数 $f'(x)$ 在 x_0 处对应的函数值，而不是对 $f(x_0)$ 求导数. 因此，无论是求导函数还是求函数在点 x_0 处的导数，都应归结为先求导函数.

例 1 设 $f(x)=x^2$，求 $f'(x)$，$f'(2)$.

解 由导数的定义，得

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x,$$

所以 $f'(2)=4$.

微课：可导与连续的关系

由例 1 可得，幂函数求导就是把原来函数的幂指数降低一次，再乘以原来幂级数的指数. 这个规律也适用于一般幂函数，即

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}.$$

根据导数定义和求导方法可以得到基本初等函数的导数公式，如表 2-5 所示.

表 2-5

$(C)'=0$	$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$
$(a^x)'=a^x\ln a(a>0,a\neq1)$	$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$
$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}(a>0,a\neq1)$	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

续表

$(\sin x)'=\cos x$	$(\cos x)'=-\sin x$
$(\tan x)'=\sec^2 x$	$(\cot x)'=-\csc^2 x$
$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\text{arccot}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

3. 高阶导数

函数 $y=f(x)$的导数 $f'(x)$一般也是 x 的函数，对 $f'(x)$再求导数，称为 $f(x)$的**二阶导数**，记作 $f''(x)$，y''或$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

类似地，二阶导数的导数为三阶导数 y'''，三阶导数的导数为四阶导数 $y^{(4)}$，…，$n-1$ 阶导数的导数为 n 阶导数 $y^{(n)}$. 二阶及二阶以上的导数统称为**高阶导数**，而 $f'(x)$称为 $y=f(x)$的一阶导数.

由此可知，求高阶导数只要反复应用求一阶导数的方法即可.

动画：二阶导数和更高阶导数

微课：高阶导数

4. 导数的几何意义

由本节开头的引例 1 可知，函数 $f(x)$在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$表示函数曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处切线的斜率，即 $k=f'(x_0)$.

由此可知，曲线 $y=f(x)$在点 $A(x_0,f(x_0))$处的切线方程可写成

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

动画：导数的几何意义

例 2 求过点(2,4)且与曲线 $y=x^2$ 相切的直线方程.

解 由导数的几何意义可知，所求切线的斜率 k 为

$$k=(x^2)'\big|_{x=2}=2x\big|_{x=2}=4,$$

故所求切线方程为

$$y-4=4(x-2),$$

即

$$4x-y-4=0.$$

动画：切线定义

2.3.2 导数的运算

通过导数定义或导数公式可对基本初等函数求导，但实际应用过程中涉及的函数往往比较复杂，用定义不容易计算，甚至有些函数不能用定义求导，为此先考虑函数四则运算求导，再考虑复合函数的求导法.

微课：导数的几何意义

1. 四则运算求导法

设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$在点 x 处可导，k_1，k_2 为常数，则下列各等式成立.

(1) $[k_1u(x)\pm k_2v(x)]'=k_1u'(x)\pm k_2v'(x)$.

(2) $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.

(3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}[v(x)\neq 0]$.

小贴士

对于乘法的导数运算，可以按照"前导后不导与后导前不导之和"来记忆.

对于除法的导数运算，可以按照"分母的平方分之上导下不导与下导上不导之差"来记忆.

推广：有限个可导函数的代数和也可导，且为相应导数的代数和. 例如，三个函数的情形有如下公式.

$$(u\pm v\pm w)'=u'\pm v'\pm w'.$$

微课：导数的四则运算

例 3 设 $f(x)=2x^3+\cos x-\mathrm{e}^x+6$，求 $f'(x)$.

解 $f'(x)=(2x^3)'+(\cos x)'-(\mathrm{e}^x)'+6'$

$=6x^2-\sin x-\mathrm{e}^x$.

例 4 设 $y=\mathrm{e}^x\sin x$，求 y'.

解 $y'=(\mathrm{e}^x\sin x)'=(\mathrm{e}^x)'\sin x+\mathrm{e}^x(\sin x)'$

$=\mathrm{e}^x\sin x+\mathrm{e}^x\cos x$

$=\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)$.

例 5 证明若 $y=\tan x$，则 $y'=\sec^2 x$.

证明 $y'=(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'$

$=\dfrac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$，

即

$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x=1+\tan^2 x.$$

类似可得

$$(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x=-(1+\cot^2 x),$$

$$(\sec x)'=\sec x\tan x,\ (\csc x)'=-\csc x\cot x.$$

微课：复合函数的求导

2. 复合函数的求导

链导法则：若 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导，而 $y=f(u)$ 在相应点 $u=\varphi(x)$ 处可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x 处可导，且 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，或记为 $\{f[\varphi(x)]\}'=f'(u)\cdot\varphi'(x)$.

推广：复合函数的求导法则可以推广到多个中间变量的情形. 例如，$y=f(u)$，$u=g(v)$，

$v=h(x)$，则复合函数 $y=f\{g[h(x)]\}$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

小贴士

复合函数求导法可以按照"由外向里逐层求导再乘积"的链导法则记忆.

例 6 求下列函数的导数.

(1) $y=(2x^2-3)^3$； (2) $y=\sin 2x$； (3) $y=\cos^2 2x$.

解 (1) $y'=3(2x^2-3)^2\cdot(2x^2-3)'=3(2x^2-3)^2\cdot(4x)=12x(2x^2-3)^2$.

(2) $y'=\cos 2x\cdot(2x)'=2\cos 2x$.

(3) $y'=[(\cos 2x)^2]'=2\cos 2x\cdot(\cos 2x)'=-2\cos 2x\sin 2x\cdot(2x)'=-2\sin 4x$.

微课：函数的微分

2.3.3 微分的概念

设一个正方形的金属薄片受温度变化的影响，其边长从 x_0 变化到 $x_0+\Delta x$（见图 2-11），则薄片面积改变了多少？

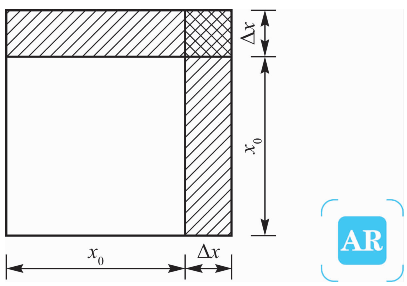


图 2-11

此薄片在温度变化前、后的面积分别为

$$s(x_0)=x_0^2,\ s(x_0+\Delta x)=(x_0+\Delta x)^2,$$

从而薄片面积的改变量为

$$\Delta s=s(x_0+\Delta x)-s(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

显然 Δs 由两部分组成：第一部分 $2x_0\Delta x$ 是 Δx 的线性函数（图 2-11 中斜线部分的面积），为主要部分；第二部分 $(\Delta x)^2$（图 2-11 中有交叉斜线的小正方形的面积），当 $\Delta x\to 0$ 时，是比 Δx 高阶的无穷小. 于是当 $|\Delta x|$ 很小时，面积的改变量 Δs 可以近似地用第一部分 $2x_0\Delta x$ 来代替，即 $\Delta s\approx 2x_0\Delta x$，且 $|\Delta x|$ 越小，近似程度越高.

又 $s'(x_0)=(x^2)'|_{x=x_0}=2x_0$，所以面积改变量的近似值为 $\Delta s\approx s'(x_0)\Delta x$.

定义 2-9 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的近旁有定义，自变量 x 在点 x_0 处有增量 Δx，如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，则称 $f'(x_0)\Delta x$ 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的**微分**，记作 $dy|_{x=x_0}$，即

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x.$$

函数 $y=f(x)$ 在任意点 x 处的微分称为函数的微分，记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$.

对于函数 $y=x$，$\mathrm{d}x=x'\Delta x=\Delta x$，因此函数的微分 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$，或写成 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$，即求微分可归结为求导的问题.

例 7 求下列函数的微分.

(1) $y=\sin x$； (2) $y=\mathrm{e}^x\ln x$.

解 (1) 因为 $y'=\cos x$，所以 $\mathrm{d}y=(\sin x)'\mathrm{d}x=\cos x\mathrm{d}x$.

(2) 因为 $y'=\mathrm{e}^x\ln x+\mathrm{e}^x\ \frac{1}{x}=\frac{\mathrm{e}^x(x\ln x+1)}{x}$，所以

$$\mathrm{d}y=(\mathrm{e}^x\ln x)'\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^x(x\ln x+1)}{x}\mathrm{d}x.$$

小应用

计算机构建图形时需要绘制成千上万条直线. Bresenham 算法是计算机图形学领域使用最广泛的直线扫描转换算法，其原理即微分学知识. 此处不做推导给出第一象限内直线 Bresenham 算法思想（见图 2-12）.

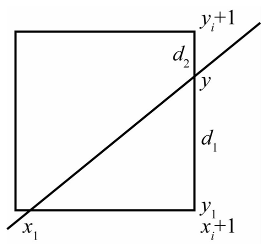


图 2-12

(1) 画点 (x_1, y_1)，$\mathrm{d}x=x_2-x_1$，$\mathrm{d}y=y_2-y_1$，计算误差初值 $P_1=2\mathrm{d}y-\mathrm{d}x$，$i=1$.

(2) 求直线的下一点位置 $x_{i+1}=x_i+1$，若 $P_i>0$，则 $y_{i+1}=y_i+1$，否则 $y_{i+1}=y_i$.

(3) 画点 (x_{i+1}, y_{i+1}).

(4) 求下一个误差 P_{i+1}，若 $P_i>0$，则 $P_{i+1}=P_i+2\mathrm{d}y-2\mathrm{d}x$，否则 $P_{i+1}=P_i+2\mathrm{d}y$.

(5) $i=i+1$，若 $i<\mathrm{d}x+1$，则转步骤(2)，否则结束操作.

2.3.4 函数的极值

1. 极值的概念

定义 2-10 设 $f(x)$ 在 x_0 及近旁有定义，对于 x_0 近旁任意异于 x_0 的点，若有 $f(x)<f(x_0)$ [或 $f(x)>f(x_0)$]，则称 $f(x)$ 在 x_0 点取得**极大值**（或**极小值**）$f(x_0)$，点 x_0 称为极大（或极小）值点.

极值是局部性概念,对于一个定义在(a,b)内的函数,其极值往往有很多个,且在某一点取得的极大值可能比在另一点取得的极小值还要小,如图 2-13 所示.

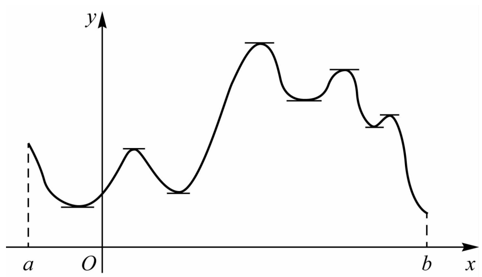


图 2-13

动画:函数极值

微课:函数的极值

2.极值的判别法

定义 2-11 使函数 $f(x)$的导数 $f'(x_0)=0$ 的点称为函数的**驻点**.

由图 2-13 可以看出,对于可导函数,在函数取得极值时,曲线的切线是水平的,即极值点处的导数为零,但导数为零的点不一定都能取得极值.那么如何求函数的极值呢?可按以下方法进行求解.

设 $f(x)$在 x_0 处连续,在 x_0 近旁可导.

(1)若 $x<x_0$ 时,$f'(x)>0$,而 $x>x_0$ 时,$f'(x)<0$,则 $f(x)$在 x_0 处取得极大值.

(2)若 $x<x_0$ 时,$f'(x)<0$,而 $x>x_0$ 时,$f'(x)>0$,则 $f(x)$在 x_0 处取得极小值.

例 8 求 $f(x)=x^2-2x+5$ 的极值.

解 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,$f'(x)=2x-2=2(x-1)$,令 $f'(x)=0$,得驻点 $x=1$(见表 2-6).

表 2-6

x 取值	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

故得 $x=1$ 为 $f(x)$的极小值点,极小值为 $f(1)=4$.

下面介绍另一种求函数极值的方法——**牛顿下山法.**

已知点 $A(x_n,f(x_n))$,以及 A 点的斜率 $f'(x_n)$,则直线 L 的方程为

$$f(x)-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n).$$

当 L 交于 x 轴时 $f(x)=0$,则

$$f(x_n)+f'(x_n)(x-x_n)=0,$$

解得

$$x=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

迭代后得

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

动画:牛顿迭代法

牛顿下山法求零点的迭代公式 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ 经过若干次迭代后，x_{n+1} 即为方程 $f(x)=0$ 的解. 可以将求凸函数的最值问题看作求凸函数一阶导数的零点问题，即迭代方程为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}.$$

经过若干次迭代后，x_{n+1} 即为方程 $f'(x)=0$ 的解，也就是凸函数 $f(x)$ 取得极小值的点.

闯关题：导数与微分

小贴士

牛顿下山法在计算机计算中比较常见，是一个很好的迭代方法.

习题 2.3

1. 求下列函数的导数.

(1) $y=x^3+\dfrac{1}{x}$；　(2) $y=x^2\cos x$；

(3) $y=x^2(2+x)$；　(4) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$；

(5) $y=\sin\dfrac{1}{x}$；　(6) $y=\ln(x^2+x+1)$.

2. 求下列函数的微分.

(1) $y=\dfrac{x^2}{1+x}$；　(2) $y=\sin x-x\cos x$；

(3) $y=xe^x$；　(4) $y=\sin^2 x$.

3. 求下列函数的极值.

(1) $f(x)=x^3-3x^2-9x-3$；　(2) $f(x)=\ln(1+x^2)$；

(3) $f(x)=xe^x$；　(4) $f(x)=\ln(1+x)-x$.

4. 求曲线 $y=x^3-3x^2+2$ 在点 $(1,0)$ 处的切线的方程.

2.4 级　　数

2.4.1 数项级数

1. 数项级数的概念及基本性质

对于数列 $\{u_n\}$，把和式 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 称为常数项无穷

微课：数项级数的概念和基本性质

级数，简称**级数**，u_n 为级数的一般项.

无穷级数的前 n 项和 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ 称为级数的**部分和**，当 n 依次取 $1,2,3,\cdots$ 时，它们构成了一个新的数列 $S_1,S_2,S_3,\cdots$，根据这个数列有没有极限，引入级数的收敛、发散与和的概念.

定义 2-12 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，则称级数**收敛**，$S$ 称为级数的**和**，记作 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$；若 $\{S_n\}$ 没有极限，则称级数**发散**.

例 1 讨论几何级数(等比级数)

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots$$

的敛散性.

解 由于 $S_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3}\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$.

因此，所给级数收敛，且级数的和为 $\frac{1}{2}$.

小贴士

两个非常重要的级数如下.

(1) 几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}\begin{cases}收敛, & |r|<1\\ 发散, & |r|\geqslant 1\end{cases}$.

(2) p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}收敛, & p>1\\ 发散, & 0<p\leqslant 1\end{cases}$.

数项级数的基本性质如下.

(1) (**级数收敛的必要条件**) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

(2) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 均收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}v_n.$$

(3) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}au_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 有相同的敛散性，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}au_n=a\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

(4) 增加、去掉或改变级数的有限项不改变级数的敛散性.

小贴士

(1)基本性质(1)中的$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$只是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的必要条件而非充分条件，其逆否命题是"若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$必发散"，可以用来证明级数发散.

(2)若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$发散.

(3)若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$均发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$的敛散性不确定.

2. 正项级数敛散性的判别法

各项均为非负的级数称为**正项级数**，那么正项级数的敛散性如何判定呢?

(1)**比较审敛法**：设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数，且$u_n\leqslant v_n(n=1,2,3,\cdots)$，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

例 2 判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n+1}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{2n^3+n}$.

解 (1)因为$\dfrac{1}{3n+1}\geqslant\dfrac{1}{3n+n}=\dfrac{1}{4n}$，

由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n}=\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，所以由比较审敛法可知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n+1}$发散.

(2)因为$\dfrac{n+1}{2n^3+n}<\dfrac{n+1}{2n^3}<\dfrac{n+n}{2n^3}=\dfrac{1}{n^2}$，

由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛，所以由比较审敛法可知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{2n^3+n}$收敛.

(2)**比值审敛法**：设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是正项级数，若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则$\rho<1$时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，$\rho>1$时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，$\rho=1$时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性不确定.

例 3 判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{3^n}$的敛散性.

解 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\dfrac{n^2}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2=\dfrac{1}{3}<1$，故由比值审敛法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{3^n}$收敛.

小贴士

使用上述判别法时，一般地，当 u_n 中含有阶乘、乘幂、多个因子连乘连除时，可考虑用比值审敛法；若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 不易计算或 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$，则要用比较审敛法.

3. 交错级数敛散性的判别法

交错级数是指各项为正负交错的级数，可以写成如下形式.

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots(u_n>0)$$

或

$$-u_1+u_2-u_3+u_4-\cdots(u_n>0).$$

例如，$1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n+\cdots$为交错级数.

如何判别交错级数的敛散性？

莱布尼茨判别法：若交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n>0)$满足条件

$$u_n\geqslant u_{n+1}(n=1,2,3,\cdots),$$

且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则该级数收敛，且其和 $S\leqslant u_1$.

例如，交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$满足上述两个条件，故收敛.

4. 绝对收敛与条件收敛

任意项级数的各项都换为它的绝对值，对应于一个正项级数，该正项级数与原级数的敛散性有如下关系.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **绝对收敛**；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **条件收敛**.

例 4 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{4^n}$的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{4^{n+1}}}{\frac{n}{4^n}}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{4}<1,$$

所以由比值审敛法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{4^n}$绝对收敛.

注意：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，不能说级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 一定发散. 例如，$u_n=(-1)^n\frac{1}{n}$，显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$满足莱布尼茨判别法的条件，故收敛.

2.4.2 幂级数及其收敛域

微课：幂级数及其收敛域

1. 幂级数的概念及收敛域

定义 2-13 形如 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ 的级数称为 x 的**幂级数**，其中，$a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots$ 均为常数.

幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=0$ 处显然是收敛的. 一般地，如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 不是仅在一点 $x=0$ 处收敛，也不是在整个数轴上收敛，那么一定存在一个完全确定的正数 R，当 $|x|<R$ 时，幂级数绝对收敛；当 $|x|>R$ 时，幂级数发散. R 称为幂级数的**收敛半径**，此时幂级数的收敛域是以原点为中心、以 R 为半径的一个开区间，此区间称为**收敛区间**.

下面给出求幂级数收敛半径 R 的方法.

对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，则有

(1) 若 $0<\rho<+\infty$，则 $R=\dfrac{1}{\rho}$，当 $|x|<R$ 时幂级数收敛，当 $|x|>R$ 时幂级数发散.

(2) 若 $\rho=0$，则 $R=+\infty$，幂级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处收敛.

(3) 若 $\rho=+\infty$，则 $R=0$，幂级数仅在 $x=0$ 处收敛.

注意：对于收敛区间 $(-R,R)$ 的端点 $x=\pm R$，定理没有给出是收敛还是发散的结论，这时可将 $x=R$ 和 $x=-R$ 代入幂级数，然后按数项级数的审敛法来判定其敛散性，从而确定它的收敛域.

例 5 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 的收敛半径和收敛区间.

解 因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$，所以 $R=1$.

于是，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 的收敛半径 $R=1$，收敛区间为 $(-1,1)$.

且有

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}.$$

例 6 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ 的收敛半径和收敛区间.

解 因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$，所以 $R=+\infty$.

于是，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ 的收敛半径 $R=+\infty$，收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$.

2. 函数展开为幂级数

定义 2-14 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内具有任意阶导数，则称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

为函数 $f(x)$ 的**泰勒级数**.

将函数展开为泰勒级数，通常有直接展开法和间接展开法.

1)直接展开法

按公式计算幂级数的系数 $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(n=0,1,2,\cdots)$，写出 $f(x)$ 的泰勒级数，并以此求出幂级数的收敛半径 R.

例 7 将函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 展开为 x 的幂级数.

解 因为

$$f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x(n=1,2,3,\cdots),$$

所以

$$f^{(n)}(0)=1(n=1,2,3,\cdots).$$

又

$$f(0)=1,$$

因此

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

它的收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$，即

$$f(x)=\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,(-\infty,+\infty).$$

2)间接展开法

用直接展开法将函数展开成幂级数，过程比较复杂. 将函数展开成幂级数更多地使用间接展开法. 间接展开法是从已知函数的幂级数展开式出发，通过变量替换、四则运算、逐项求导等方法求出未知函数的展开式.

例 8 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{4-x}$ 展开为 x 的幂级数.

解 因为

$$f(x)=\frac{1}{4-x}=\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{x}{4}},$$

已知

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,$$

用 $\dfrac{x}{4}$ 替换上式中的 x，得

$$\frac{1}{1-\frac{x}{4}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}x^n.$$

因$-1<\frac{x}{4}<1$，故上式的收敛区间为$(-4,4)$，于是

$$f(x)=\frac{1}{4-x}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^{n+1}}x^n,(-4,4).$$

小贴士

泰勒公式最直接的应用是计算，计算机一般是把 $\sin x$ 进行泰勒展开计算的.

泰勒公式还可以把问题简化，如计算$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$，代入 $\sin x$ 的泰勒展开式，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x+o(x^3)}{x}=1,$$

其中，$o(x^3)$是泰勒公式中的余项，是高阶无穷小.

习题 2.4

1. 判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3n+2}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n\cdot n}$.

2. 判别下列级数的敛散性；若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^2}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

3. 求下列幂级数的收敛区间.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 2^n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$.

4. 将下列函数展开成 x 的幂级数.

(1) $\frac{1}{1+x}$；　　(2) $\frac{1}{3-x}$；　　(3) $\frac{1}{1+x^2}$；　　(4) xe^x.

建模实例

易拉罐的形状和尺寸设计问题

问题 在制造易拉罐时，形状与尺寸设计对提高材料利用率、降低生产成本有很大影响，其中包含许多科学的道理. 试分析如何设计易拉罐的形状和尺寸才能使总成本最低.

分析 (1)从美观的角度出发，液体饮料的包装形状应选择柱状. 市场上的易拉罐大都是圆柱体，因为面积相同的圆、正方形与正三角形，以正三角形的周长最大，正方形的周长次之，圆的周长最小，所以体积一定的柱形容器(高度相同)，圆柱形容器表面所需材料最省. 其实同样容积的容器，球形的表面积是最小的，但易拉罐做成球形，技术上和使用上都不方便，所以易拉罐以圆柱形最为常见.

(2)易拉罐盛放液体时底部受到的压强要大于壁部受到的压强，且为防止拉拉环时造成顶部变形变坏，上下底均需做厚一些.

(3)常见易拉罐的容量为固定值，因此在尺寸设计中可将问题简化为在一个圆柱体体积一定的条件下，如何设计可使所用材料最少，这可以归结为求函数的最小值问题.

符号说明 V 为圆柱体的体积；r 为底面的半径；h 为圆柱体的高；S 为圆柱体的表面积；上、下底厚度与罐壁厚度的比为 $m:1$，即上下底厚度是罐壁厚度的 m 倍.

模型建立与求解 假设易拉罐的形状为正圆柱体，考虑它的最优设计.

圆柱体的表面积为

$$S=2\pi rh+2\pi r^2,$$

所用材料的体积为

$$A=2\pi rh+2\pi r^2 m,$$

而圆柱体的体积为

$$V=\pi r^2 h,$$

于是所用材料的体积为

$$A=2\pi r\frac{V}{\pi r^2}+2\pi r^2 m=2\pi\left(\frac{V}{\pi r}+r^2 m\right),$$

求导得

$$A'=2\pi\left(2rm-\frac{V}{\pi r^2}\right),$$

令 $A'=0$，得到 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi m}}$，此时材料体积达到最小，从而求得

$$h=\frac{V}{\pi}\sqrt[3]{\left(\frac{2\pi m}{V}\right)^2}=2mr,$$

即 $h:r=2m:1$，也就是说，易拉罐的高度是上、下底半径的 $2m$ 倍时，材料最省.

进一步探讨：其实易拉罐的形状不是标准的圆柱体，上部大约为一个圆台，下部为不标准的圆柱体. 易拉罐的设计中还包含其他数学道理. 对易拉罐的设计，经营者总是在寻找最

优方案.对于单个的易拉罐来说,这种最优设计可以节省的成本可能是很有限的,但是如果生产几亿,甚至几十亿个易拉罐,可以节省的成本就很可观了.

趣味数学

中国数学源远流长

中国数学源远流长,早在仰韶文化出土的陶器上即有规则三角形图案与计数点阵(见图 2-14).

最早的计数方法:上古无文字,结绳以记事(见图 2-15).《易·系辞下》:"上古结绳而治,后世圣人易之以书契."

图 2-14

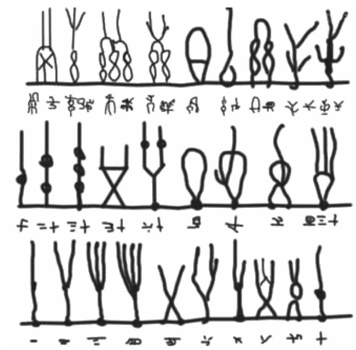


图 2-15

最早使用圆周率的人:东汉时,张衡(见图 2-16)得出 π 的平方除以 16 等于 5/8,即 π 等于 10 的开方(约为 3.162).

最早推算出圆周率精确数值的人:祖冲之(见图 2-17)进一步得出圆周率精确到小数点后 7 位的结果,在之后的 800 年里祖冲之计算出的 π 值都是最精确的.

图 2-16

图 2-17

最早的计算器:算盘(见图 2-18)是中国传统的计算工具.中国人在长期使用算筹的基础上发明了算盘,据公开资料显示,"珠算"一词最早见于东汉徐岳所撰的《数术记遗》.

最早发现勾股定理的人:西汉时期的《周髀算经》记载了周朝的商高对勾股定理的描述

与求解(见图 2-19),即勾三、股四、弦五.三国时期的赵爽通过数形结合的“弦图”给出了具体的证明过程.

图 2-18

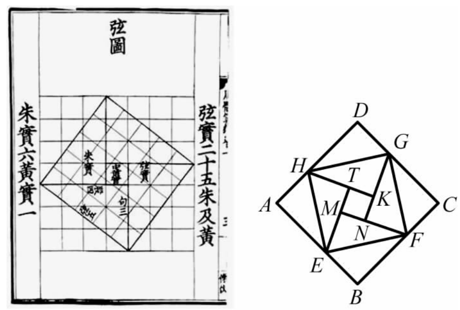


图 2-19

最早使用“0”的人:早期中国用空位来表示“0”.13 世纪 40 年代左右,数学家李治、秦九韶(见图 2-20)都用“0”在著作中表示数字的空位.

最早的数学著作:《算数书》(见图 2-21)是我国目前发现的最早的数学著作,约成书于公元前 2 世纪或更早,比此前一直被公认为中国最早数学著作的《周髀算经》和《九章算术》还要早 1 个世纪左右.

图 2-20

图 2-21

最早的不定方程组:《九章算术》中的“五家共井”是最早的不定方程求解问题.

最早的汉译数学著作:明末科学家徐光启编译了欧几里得的《几何原本》(见图 2-22),现代数学中的直线、四边形、平面等几何概念皆源于此译本.

图 2-22

数学与人生

找准核心，不断壮大

通过本章的学习，我们逐步理解了极限、导数和级数的基本概念和内在关系. 极限是基础，是核心要素，其他知识点都是在极限的基础上逐步形成和发展起来的. 可以说，没有极限思想的运用就没有现在数学学科乃至其他自然学科的发展和壮大，极限思想的地位不言而喻.

明代王守仁(王阳明)的心学主旨为致良知，即将良知推广到事事物物. 以这三个字为核心逐步发展撑起的一派思想至今仍指引我们修身养性、知行合一. 由良知到致良知再到知行合一的发展规律恰如极限的朴素想法到精确定义再到整个数学学科发展的过程，这种发展规律和过程不是一蹴而就的，需要汗水、努力、坚持、点点滴滴的积累.

当前，中国人民正在以习近平同志为核心的党中央的领导下，为努力实现中华民族伟大复兴的中国梦发奋图强. 作为一名当代的大学生，我们要扛起自己肩上的责任，无论是对于生活还是学习乃至将来的工作，我们都应找到能指引我们不断成长、不断壮大的核心支撑点，并为之不断成长，这样我们脚下的路才能走得更远更久，为中华民族的伟大复兴贡献自己的力量.

课后活动

一、评价与考核

学习内容	一元函数微分学	学生班级	
学生姓名		综合评分	
知识掌握情况评分(35 分)			
知识考核点	分值标准	教师评价	学生自评
极限、导数、级数的概念	5		
极限、导数、级数的性质	5		
极限、导数、级数的计算	10		
极限、导数、级数的应用	15		
任务完成情况评分(45 分)			
能力考核点	分值标准	教师评价	学生自评
概念间区别与联系的能力	10		
解决实际问题的能力	15		
数学模型理解能力	10		
小组协调合作能力	10		

续表

纪律遵守情况评分(20分)			
纪律考核点	分值标准	教师评价	学生自评
课上不玩手机	10		
无其他扰乱课堂秩序的行为	10		

二、问卷调查

亲爱的同学：

你好！为了更好地了解大家对本章知识体系的掌握情况，同时提高教师的教学能力，促进教育教学的改革，特设此问卷，请你如实反映情况，认真填写．选择题均为单选题，请选出你认为正确的答案，不要漏选，也不要多选，感谢配合！祝你学业有成、生活顺意！

1. 你认为本章知识点设计的目的是什么？（　　）

A. 考试需要　　B. 为学好专业课程做准备

C. 理解知识产生的实用价值　　D. 培养思维能力

E. 无任何目的

2. 你对本章内容架构体系是怎样评价的？（　　）

A. 逻辑性强，很有吸引力　　B. 理论深奥但实用性强

C. 内容繁杂，使人厌烦　　D. 内容枯燥，方法离奇

E. 太乏味，无兴趣

3. 你认为本章知识对专业课的学习有用吗？（　　）

A. 作用很大　　B. 有一定作用

C. 作用不大　　D. 没作用

4. 你觉得本章哪种能力最有助于专业课程的学习？（　　）

A. 逻辑推理能力　　B. 精确运算能力

C. 抽象概括能力　　D. 解决实际问题能力

5. 影响你学习本章内容兴趣的最主要原因是（　　）．

A. 学了没用处　　B. 教师教法不当

C. 内容繁杂，听不懂　　D. 内容无趣

E. 个人能力不足

6. 你最希望教师在本章教学中采取的有效的教学手段是（　　）．

A. 传统板书讲授　　B. 多媒体讲授

C. 网络与课堂联合讲授　　D. 视频讲授

E. 其他

7. 你希望教师讲解本章知识点时（　　）．

A. 按教材顺序讲述　　B. 多讲难题的解法和技巧

C. 多介绍数学史和文化知识　　D. 多讲数学实际应用案例

E. 只讲考试内容

8. 教师的哪些做法有助于提高学生的学习兴趣?(　　)
A. 插入思政元素,讲一些幽默有趣的故事
B. 讲解逻辑清晰,结合生活实例讲解
C. 经常提问学生,让学生上讲台做题
D. 多讲解数学与专业相关的知识
E. 无所谓

9. 你觉得完成本章数学作业最有效的方式是什么?(　　)
A. 按书上作业布置
B. 自己独立完成作业
C. 小组一起完成书上作业
D. 小组一起完成实际案例课题报告
E. 无所谓

本章测试题

一、填空题

1. 函数 $y=\ln(x-1)$ 的定义域是________.

2. 设 $f(x)=x^2+x+1$,则 $f(1)=$________.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=$________.

4. $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的________间断点.

5. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导且 $f'(x_0)=a$,则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$________.

6. 函数 $y=x\cos x$ 的微分是 $\mathrm{d}y=$________.

7. 曲线 $y=x^2+x-4$ 在点 M 处的切线斜率是 3,则点 M 的坐标是________.

8. 函数 $y=x-\mathrm{e}^x$ 的驻点是________.

9. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ 的敛散性是________.

10. 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{nx^n}{2^n}$ 的收敛半径是________.

二、选择题

1. 下列各组函数为同一函数的是(　　).
A. $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$
B. $f(x)=x, g(x)=\dfrac{x^2}{x}$
C. $f(x)=x, g(x)=\ln \mathrm{e}^x$
D. $f(x)=x, g(x)=\mathrm{e}^{\ln x}$

2. 设 $f(x-1)=x^2+2x+1$,则 $f(x)=$(　　).
A. $(x+1)^2$
B. $(x-1)^2$
C. x^2+2x
D. $(x+2)^2$

3. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3x-2}$，则 $x\to$(　　)时函数是无穷小量.

A. ∞　　B. 0　　C. $\frac{2}{3}$　　D. 以上都不对

4. 函数 $f(x)$在 x_0 处连续是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的(　　).

A. 必要条件　　B. 充分条件　　C. 充要条件　　D. 无关条件

5. 设 $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}$，则$\lim\limits_{x\to1}f(x)$为(　　).

A. 1　　B. -1　　C. 不存在　　D. 0

6. 设 $y=\ln\cos x$，则 $f'(x)=$(　　).

A. $\frac{1}{\cos x}$　　B. $\tan x$　　C. $\cot x$　　D. $-\tan x$

7. 若可微函数 $f(x)$在 x_0 处取到极大值 $f(x_0)$，则(　　).

A. $f'(x_0)=0$　　B. $f'(x_0)>0$

C. $f'(x_0)<0$　　D. $f'(x_0)$不一定存在

8. 下列级数收敛的是(　　).

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n+1}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{n+1}$

9. 下列级数发散的是(　　).

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n^2+1}$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{n^4+1}$

10. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{n^2}$的敛散性是(　　).

A. 条件收敛　　B. 绝对收敛　　C. 发散　　D. 不确定

三、解答题

1. 设 $f(x)=\ln(3-x)+\frac{1}{\sqrt{x-1}}$，求 $f(x)$的定义域和 $f(2)$的值.

2. 已知 $f(\sin\frac{x}{2})=\cos x+1$，求 $f(x)$.

3. 求下列各极限.

(1)$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$；　　(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2+x+1}$；

(3)$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin 2x}$；　　(4)$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3x-1}{3x+1})^{3x}$.

4. 讨论 $f(x)=\begin{cases}x+2, 0<x<2\\4,其他\end{cases}$ 的连续性.

5. 求下列函数的导数.

(1) $y=e^{2x}+\sqrt{x}+1$;

(2) $y=\sqrt{1+\ln x}$;

(3) $y=\sin \ln x$;

(4) $y=\ln \cos 3x$.

6. 讨论函数 $y=x^3-3x^2+1$ 的极值.

7. 证明方程 $x^3+3x-1=0$ 至少有一个小于 1 的正根.